Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Вязилов, Остаточная эмпири-
ческая функция распределения в $GARCH(1,1)$ и ее применение при проверке
гипотез, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:04:48

ОСТАТОЧНАЯ ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В GARCH(1,1) И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ

А. Е. Вязилов

1. Модель GARCH(1,1) задается соотношениями

$$(1) \quad y_k = \sigma_k \varepsilon_k, \quad \sigma_k^2 = \alpha + \beta y_{k-1}^2 + \gamma \sigma_{k-1}^2; \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

где $\{\varepsilon_k\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $G(x)$, $E\varepsilon_1^2 = 1$; $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ – вектор неизвестных параметров, $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Если $\beta + \gamma < 1$, то система (1) имеет единственное стационарное решение

$$y_k = \alpha^{1/2} \varepsilon_k \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^m (\beta \varepsilon_{k-i}^2 + \gamma) \right]^{1/2},$$

при этом $E y_k^2 = \alpha [1 - \beta - \gamma]^{-1} < \infty$.

Модель GARCH впервые была рассмотрена в [1] при условии, что $G(x)$ – нормальная функция распределения. В работе излагается способ проверки общей гипотезы $\Gamma_0: G(x) = G_0(x)$, в том числе гипотезы нормальности. Этот тест основан на *асимптотической равномерной линейности* остаточной эмпирической функции распределения (см. теорему ниже). Для моделей с аддитивными шумами общие результаты такого типа получены для линейных [2] и нелинейных [3] моделей. Подход этой работы является обобщением на модель GARCH методов, предложенных для схем MA и ARCH в [4], [5].

2. Пусть $y_0, \dots, y_n$ – наблюдения из стационарного решения схемы (1). Положим

$$\sigma_k^2(\boldsymbol{\theta}) := \theta_1 + \theta_2 y_{k-1}^2 + \theta_3 \sigma_{k-1}^2(\boldsymbol{\theta}), \quad \varepsilon_k(\boldsymbol{\theta}) := \begin{cases} \frac{y_k}{\sigma_k(\boldsymbol{\theta})}, & \text{если } \sigma_k(\boldsymbol{\theta}) > 0, \\ 1, & \text{если } \sigma_k(\boldsymbol{\theta}) \leq 0, \end{cases}$$

где $k = 1, \dots, n$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\sigma_0(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Введем для $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^3$ *остаточную эмпирическую функцию распределения*

$$G_n(x, \boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I\{\varepsilon_k(\boldsymbol{\theta}) \leq x\},$$

являющуюся аналогом истинной эмпирической функции распределения $G(x)$.

Выпишем нужные нам условия на $G(x)$:

- (i) $G(x)$ – строго монотонна на множестве $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < G(x) < 1\}$,
- (ii) существует плотность $g(x) = G'(x)$ и ее производная $g'(x)$, такая что $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 |g'(x)| < \infty$.

Обозначим $\mathbf{e} = \left(E \frac{X}{\alpha X + \beta Y}, E \frac{Y}{\alpha X + \beta Y}, E \frac{Z}{\alpha X + \beta Y} \right)$, где $X = \frac{1}{1 - \gamma}$, $Y = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m y_{-m}^2$,

$Z = \frac{\alpha}{(1 - \gamma)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m \gamma^{m-1} y_{-m}^2$ и эти ряды сходятся в L_1 . Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение и $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$.

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия (i) и (ii), то для любого $T \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$(2) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}, |\mathbf{t}| \leq T} \left| \sqrt{n} \left[G_n \left(x, \mathbf{a} + \frac{\mathbf{t}}{\sqrt{n}} \right) - G_n(x) \right] - \frac{1}{2} x g(x) \langle \mathbf{t}, \mathbf{e} \rangle \right| = o_p(1).$$

Заметим, что для ARCH (2) совпадает с утверждением теоремы 1.1 из [5].

Пусть $\hat{\mathbf{a}}_n$ есть $\sqrt{n}$ -состоятельная оценка вектора параметров $\mathbf{a}$ (см. [6], [7]).

Обозначим $\hat{G}_n(x) := G_n(x, \hat{\mathbf{a}}_n)$. Из теоремы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия (i), (ii) и $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{a}) = O_p(1)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{n} [\hat{G}_n(x) - G_n(x)] - \frac{1}{2} x g(x) \langle \sqrt{n}(\hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{a}), \mathbf{e} \rangle \right| = o_p(1).$$

3. Полученный результат можно применить для проверки гипотезы Γ_0 : $G(x) = G_0(x)$, где $G_0(x)$ – известная функция распределения. Аналогичный тест использовался в [5] для проверки гипотезы Γ_0 в схеме ARCH. Его построение основано на идеях [8].

Пусть $C := \{H(t), t \in [0, 1] : H(0) = 0 \text{ и существует } H'(t) \in L_2[0, 1]\}$. Введем скалярное произведение $(H_1, H_2) := \int_0^1 h_1(t) h_2(t) dt$, где $H_i \in C$, $h_i(t) = H'_i(t)$. Положим $\hat{U}_n(t) := \sqrt{n} [\hat{G}_n(G_0^{-1}(t)) - t]$ и $(H_i, \hat{U}_n) = \int_0^1 h_i(t) d\hat{U}_n(t) := n^{-1/2} \sum_{k=1}^n h(G_0(\varepsilon_k(\hat{\mathbf{a}}_n))) - \sqrt{n} \int_0^1 h(t) dt$.

Обозначим $a_0(t) := G_0^{-1}(t) g_0(G_0^{-1}(t))$, и пусть $a_0 \in C$. Выберем функции $\{H_i, i = 1, 2, \dots\} \in C$, удовлетворяющие условию

$$(iii) (H_i, H_j) = \delta_{ij}, (H_i, t) = 0, (H_i, a_0) = 0, H''_i \in L_1[0, 1].$$

В качестве тестовой статистики для проверки Γ_0 возьмем $\Xi_m^2 := \sum_{i=1}^m (H_i, \hat{U}_n)^2$. Асимптотическое разложение для $\hat{U}_n(t)$, вытекающее из следствия 1 и условия (iii), влечет

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполнены условия (i)–(iii), $a_0 \in C$, $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{a}) = O_p(1)$ и гипотеза Γ_0 , то $\Xi_m^2 = \sum_{i=1}^m [n^{-1/2} \sum_{k=1}^n h_i(G_0(\varepsilon_k))]^2 + o_p(1) \xrightarrow{d} \chi^2(m)$, где $\chi^2(m)$ – распределение хи-квадрат с m степенями свободы.

Например, при проверке гипотезы Γ_Φ : $G(x) = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – гауссовская функция распределения, можно взять $h_i(\Phi(x)) = c_i^{-1} P_i(x/\sqrt{2})$, $i = 1, 3, 4, \dots$, где $P_i(x)$ – полиномы Эрмита, а $c_i^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_i^2(x) e^{-x^2} dx$.

4. Рассмотрим гипотезу симметрии Γ_s : $G(x) + G(-x) = 1$. Тестовой статистикой для проверки Γ_s возьмем $\hat{\omega}_n^2 := n \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{G}_n(x) + \hat{G}_n(-x) - 1]^2 d\hat{G}_n(x)$. Используя нечетность функции $xg(x)$ при гипотезе Γ_s , из следствия 1 получаем, что

$$(3) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sqrt{n} [\hat{G}_n(x) + \hat{G}_n(-x) - 1] - \sqrt{n} [G_n(x) + G_n(-x) - 1]| = o_p(1).$$

Из (3) следует, что

$$(4) \quad \hat{\omega}_n^2 = \omega_n^2 + o_p(1),$$

где статистика $\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [G_n(x) + G_n(-x) - 1]^2 dG_n(x)$ (см. [9]) имеет предельное распределение величины $\int_0^1 w^2(t) dt$, где $w(t)$ – винеровский процесс. Оно затабулировано в [10] и в силу (4) совпадает с предельным распределением $\hat{\omega}_n^2$ при гипотезе Γ_s .

Автор выражает признательность М. В. Болдину за постановку задачи и ее обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bollerslev T. // J. Econometrics. 1986. V. 31. №3. P. 307–327. [2] Koul H. L. Weighted Empirical and Linear Models. Hayward, CA: IMS, 1994. [3] Koul H. L. // Ann. Statist. 1996. V. 24. P. 380–404. [4] Болдин М. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1989. Т. 34. С. 758–764. [5] Boldin M. V. // Mitt. Math. Sem. Giessen. 1998. V. 235. P. 49–66. [6] Shepard N. // Time Series Models in Econometrics, Finance and Other Fields / ed. D. R. Cox, D. V. Hinkley, O. E. Barndorff-Nielsen. London: Chapman & Hall, 1996. P. 1–55. [7] Lee S. W., Hansen B. E. // Econometric Theory. 1994. V. 10. P. 29–52. [8] Хмаладзе Э. В. // Теория вероятн. и ее примен. 1979. Т. 24. С. 280–297. [9] Мартынов Г. В. Критерии омега-квадрат. М.: Наука, 1978. [10] Орлов А. И. // Теория вероятн. и примен. 1972. Т. 17. С. 372–377.