Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, В. М. Кесельман, Конформный тип и изопериметрическая размерность субримановых многообразий, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:26:06

КОНФОРМНЫЙ ТИП И ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. А. Зорич, В. М. Кесельман

1) Мы вводим понятие *конформной изопериметрической размерности* субриманова многообразия и исследуем ее связь с конформным типом многообразия. Эта работа является продолжением работ [1]–[3].

2) Гладкое многообразие M вместе с поляризацией (распределением) $H \subset TM$ и римановой структурой g на H называют *субримановым многообразием* и обозначают через (M, H, g) или (M, H) (см. [4], [5]).

Если распределение $H \subset TM$ вполне неголономно, то на M возникает естественная метрика, относительно которой многообразие M становится метрическим пространством, названным М. Громовым *пространством Карно–Каратеодори* или, короче, *C-C-пространством*.

3) Метрическую (хаусдорфову) размерность многообразия M как C-C-пространства будем в дальнейшем обозначать через t . Она больше топологической размерности многообразия M , если $H \neq TM$.

4) Риманову метрику $\tilde{g}$ называют *конформно-эквивалентной* или *конформной* метрике g на H , если $\tilde{g} = \lambda^2 g$ на H для некоторой положительной регулярной функции λ на M .

5) Некомпактное субриманово многообразие (M, H) будем называть *конформно-параболическим* или, полнее, *многообразием конформно-параболического типа*, если его конформная t -емкость в бесконечности (т.е. емкость абсолюта M) равна нулю; если эта емкость положительна, то будем называть M *конформно-гиперболическим* или, полнее, *многообразием конформно-гиперболического типа* (см. [3]).

Имеет место следующий геометрический критерий конформного типа субриманова многообразия (см. [3]), берущий начало от критерия Альфорса [6] конформной параболичности поверхности.

ТЕОРЕМА 1. *Субриманово многообразие метрической размерности t имеет конформно-параболический тип тогда и только тогда, когда на нем существует полная метрика, конформная исходной метрике многообразия, для которой расходится интеграл*

$$(*) \quad \int^{+\infty} S^{\frac{1}{1-t}}(r) dr,$$

где $S(r)$ – площадь (т.е. $(t-1)$ -мера Хаусдорфа относительно C-C-метрики) геодезической сферы радиуса r .

6) Функция $P: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *изопериметрической функцией* субриманова многообразия (M, H, g) , если для всех областей $D \subset M$ (имеющих конечные t и $(t-1)$ хаусдорфовы меры множеств D и ∂D , обозначаемые далее через $V(D)$ и $S(\partial D)$ соответственно) выполняется изопериметрическое неравенство

$$(1) \quad P(V(D)) \leq S(\partial D).$$

7) *Изопериметрическая размерность* субриманова многообразия (M, H, g) – это точная верхняя грань всех таких чисел $p \geq 0$, для каждого из которых неравенство вида

$$(2) \quad V^{p-1}(D) \leq c \cdot S^p(\partial D)$$

(где $c = c(p)$ – постоянная) выполняется одновременно для всех областей $D \subset M$ таких, что $V(D) \geq \delta > 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01179).

8) *Конформной изопериметрической размерностью* субриманова многообразия назовем точную верхнюю грань его изопериметрической размерности в классе метрик, конформных исходной метрике многообразия.

9) Конформный тип субриманова многообразия определяется только структурой многообразия на бесконечности (массивностью абсолюта), поэтому мы рассматриваем исчерпания многообразия.

Если изопериметрические соотношения (1) или (2) выполняются для всех областей данного исчерпания, начиная с некоторой, то мы естественно приходим к понятиям *изопериметрической функции исчерпания*, *изопериметрической размерности исчерпания* и *конформной изопериметрической размерности исчерпания*.

10) Для любого исчерпания $E = \{D(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ существует бесконечно много ненулевых изопериметрических функций. Но в каждой метрике есть одна *максимальная изопериметрическая функция* для E :

$$P_{\max}(x) := S(\partial D(t)), \quad \text{где } x = V(D(t)).$$

11) Мы рассматриваем далее только *конформно-сферические исчерпания* многообразия, т.е. такие исчерпания, которые являются сферическими (с общим центром) в некоторой метрике, конформной его исходной метрике.

Будем говорить, что исчерпание E имеет *конформно-параболический тип* (конформно-гиперболический тип), если существует полная конформная исходной на H метрика, в которой исчерпание E является сферическим и интеграл (*) расходится (соответственно, сходится).

Отметим, что в силу теоремы 1 на конформно-гиперболическом многообразии любое сферическое исчерпание имеет конформно-гиперболический тип. А на конформно-параболическом многообразии существуют исчерпания обоих конформных типов (см. [7]).

12) Теперь формулируем основные результаты этой работы.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольного конформно-сферического исчерпания E субриманова многообразия (M, H) хаусдорфовой размерности t следующие утверждения (соответственно) эквивалентны:*

- 1) E имеет конформно-параболический (-гиперболический) тип;
- 2) конформная изопериметрическая размерность E равна $t (+\infty)$;
- 3) существует полная метрика, конформная исходной метрике многообразия, в которой E – сферическое исчерпание и его максимальная изопериметрическая функция имеет вид $P_{\max}(x) = x^{\frac{m-1}{m}}$ ($P_{\max}(x) = x$); в частности, в этой метрике изопериметрическая размерность исчерпания равна $t (+\infty)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Субриманово многообразие хаусдорфовой размерности t является конформно-параболическим (-гиперболическим) тогда и только тогда, когда для некоторой (любой) полной метрики, конформной исходной метрике многообразия, соответствующее ей сферическое исчерпание многообразия имеет конформную изопериметрическую размерность, равную $t (+\infty)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зорич В. А., Кесельман В. М. // Функции и его прил. 1996. Т. 30. №2. С. 40–55.
 [2] Зорич В. А., Кесельман В. М. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №3. С. 379–385.
 [3] Zorich V. A. // Geom. Funct. Anal. 1999. V. 9. №2. P. 393–411. [4] Gromov M. // Progr. Math. 1996. V. 144. P. 85–324. [5] Bellaïche A. (ed.) Sub-Riemannian Geometry. V. 144. Basel: Birkhäuser, 1996. (Progr. Math. V. 144.) [6] Ahlfors L. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1935. V. 201. P. 30–32. [7] Grimaldi R., Pansu P. // J. Math. Pures Appl. 1992. V. 71. №1. P. 1–19.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
 Кемеровский государственный университет
E-mail: vzor@glasnet.ru, kvm@glasnet.ru

Принято редколлегией
 03.06.1999