Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 3, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:05:59

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПРОСТЫМИ МНОГОГРАННИКАМИ

В. М. БУХШТАБЕР, Т. Е. ПАНОВ

Выпуклый n -мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходится ровно n граней коразмерности один. С каждым таким многогранником канонически связывается гладкое многообразие. Основной целью данной работы является исследование связи комбинаторной структуры простых многогранников с топологией этих многообразий.

Пусть P^n – простой многогранник, f_i – число его граней коразмерности $(i+1)$, $0 \leq i \leq n-1$ и $\mathcal{F} = (F_1^{n-1}, \dots, F_m^{n-1})$ – множество его граней коразмерности один, $m = f_0$. Фиксируем в качестве основного некоторое коммутативное кольцо k . Введем *кольцо граней* $k(P)$ [1].

Для любого простого многогранника P^n можно следующим образом построить два топологических пространства $\mathcal{Z}_P$ и $BT^m P$ (см. [2]). Задав стандартный базис $\{e_1, \dots, e_m\}$ в $\mathbb{Z}^m$, определим канонические подгруппы $T_{i_1, \dots, i_k}^k \subset T^m$ как торы, соответствующие подрешеткам в $\mathbb{Z}^m$, натянутым на векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$. Тогда определим $\mathcal{Z}_P = (T^m \times P^n) / \sim$, где $(g_1, p) \sim (g_2, q) \iff p = q$ и $g_1 g_2^{-1} \in T_{i_1, \dots, i_k}^k$. Здесь $i_1, \dots, i_k$ – набор индексов всех $(n-1)$ -граней, содержащих точку $p \in P^n$. Заметим, что $\dim \mathcal{Z}_P = m + n$. На $\mathcal{Z}_P$ действует тор T^m с пространством орбит P^n . Используя это действие, положим $BT^m P = ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}_P$, где ET^m – стягиваемое пространство универсального T^m -расслоения над $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Ясно, что гомотопический тип пространства $BT^m P$ определяется простым многогранником P^n .

ЛЕММА 1. *Любой простой многогранник P^n имеет естественную структуру кубического комплекса $\mathcal{C}$, составленного из $s = f_{n-1}$ кубов I_v^n размерности n , соответствующих вершинам $v \in P^n$. Комплекс $\mathcal{C}$ имеет $1 + f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1}$ вершин. Определено естественное вложение i_P комплекса $\mathcal{C}$ в границу m -мерного куба I^m .*

Вложение $\mathcal{C} \hookrightarrow I^m$ обладает следующим свойством:

- (1) Если $v = F_{i_1}^{n-1} \cap \dots \cap F_{i_n}^{n-1}$, то куб $I_v^n \subset P^n$ отображается на n -мерную грань куба I^m , выделяемую $m-n$ уравнениями $x_j = 1, j \notin \{i_1, \dots, i_n\}$.

Рассмотрим теперь стандартный полидиск $(D^2)^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid |z_i| \leq 1\} \subset \mathbb{C}^m$. Стандартное диагональное действие тора T^m на $\mathbb{C}^m$ задает действие T^m на $(D^2)^m$, пространством орбит которого является I^m .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть P^n – простой многогранник. Пространство $\mathcal{Z}_P$ имеет каноническую структуру гладкого многообразия размерности $m+n$, относительно которой действие T^m является гладким. Вложение $i_P: P^n \hookrightarrow I^m$, построенное в лемме 1, индуцирует T^m -эквивариантное вложение $i_e: \mathcal{Z}_P \hookrightarrow (D^2)^m \subset \mathbb{C}^m$ с тривиальным нормальным расслоением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho: \mathcal{Z}_P \rightarrow P^n$ – проекция на пространство орбит. Тогда из конструкции $\mathcal{Z}_P$ следует, что для любого куба $I_v^n \subset P^n$ (см. лемму 1) мы имеем $\rho^{-1}(I_v^n) = (D^2)^n \times T^{m-n}$, где $(D^2)^n$ – полидиск в $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием тора T^n . Отсюда вытекает, что $\mathcal{Z}_P$ представляется в виде объединения подмножеств $B_v \cong (D^2)^n \times T^{m-n}$. Тем самым $\mathcal{Z}_P$ приобретает структуру гладкого многообразия с гладким действием T^m . Легко видеть, что вложение в куб I^m грани I^n , заданной $m-n$ уравнениями вида $x_j = 1$, индуцирует эквивариантное вложение пространства вида $(D^2)^n \times T^{m-n}$ в $(D^2)^m$. Тогда утверждения второй части теоремы следуют из свойства (1) вложения $i_P: P^n \hookrightarrow I^m$.

Введем в $BT^m = (\mathbb{C}P^\infty)^m$ стандартную клеточную структуру, в которой каждое $\mathbb{C}P^\infty$ имеет по одной клетке в каждой четной размерности. Далее все когомологии рассматриваются с коэффициентами в основном кольце k .

Работа выполнена авторами при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01404).

ТЕОРЕМА 3. Пространство $BT^m P$ может быть реализовано как клеточный подкомплекс в BT^m , представляющий собой объединение клеточных подкомплексов $BT_{i_1, \dots, i_k}^k$ по всем симплексам $\Delta = (i_1, \dots, i_k)$ симплицеального комплекса K_P . При этом вложение $i: BT^m P \hookrightarrow BT^m$ индуцирует эпиморфизм $H^*(BT^m) = k[v_1, \dots, v_m] \rightarrow k(P) = H^*(BT^m P)$.

Простой многогранник P^n с m гранями коразмерности один называется q -смежностным, если $(q-1)$ -остов двойственного симплицеального комплекса K_P^{n-1} совпадает с $(q-1)$ -остовом $(m-1)$ -мерного симплекса.

ТЕОРЕМА 4. 1) $\pi_1(\mathcal{Z}_P) = \pi_1(BT^m P) = 0$; 2) $\pi_2(\mathcal{Z}_P) = 0, \pi_2(BT^m P) = \mathbb{Z}^m$; 3) $\pi_q(\mathcal{Z}_P) = \pi_q(BT^m P)$ при $q \geq 3$; 4) если P^n является q -смежностным, то $\pi_i(\mathcal{Z}_P) = 0$ при $i < 2q+1$ и π_{2q+1} — свободная абелева группа, образующие которой соответствуют мономам $v_{i_1} \cdots v_{i_{q+1}} \in I$.

С помощью спектральной последовательности Эйленберга–Мура [3] и теоремы 3 выводится

ТЕОРЕМА 5. Если k — поле, то имеет место изоморфизм алгебр:

$$H^*(\mathcal{Z}_P) \cong \text{Tor}_{k[v_1, \dots, v_m]}(k(P), k).$$

В частности, $H^r(\mathcal{Z}_P) = \sum_{j-i=r} \text{Tor}_{k[v_1, \dots, v_m]}^{-i,j}(k(P), k), i, j \geq 0$.

Используя комплекс Кошуля в качестве резольвенты (см. [4]) и теорему 5, получаем:

ТЕОРЕМА 6. Спектральная последовательность Лере–Серра расслоения $\mathcal{Z}_P \times ET^m \rightarrow BT^m P$ со слоем T^m вырождается в члене E_3 . Таким образом, имеет место изоморфизм алгебр $H^*(\mathcal{Z}_P) \cong H[k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d], d(a \otimes u_i) = av_i \otimes 1, d(a \otimes 1) = 0, \text{bideg } a = (0, \deg a), \text{bideg } u_i = (-1, 2), \text{ где } a \in k(P) = k[v_1, \dots, v_n]/I \text{ и } \Lambda[u_1, \dots, u_m] \text{ — внешняя алгебра.}$

СЛЕДСТВИЕ 7. В терминах комплекса $k(P) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m]$ имеем:

- 1) представителями фундаментального коцикла многообразия $\mathcal{Z}_P$ являются все элементы вида $v_{i_1} \cdots v_{i_n} \otimes u_{j_1} \cdots u_{j_{m-n}}, j_1 < \dots < j_{m-n}$, где $(i_1, \dots, i_n)$ — набор индексов граней коразмерности один, сходящихся в некоторой вершине, и $\{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_{m-n}\} = \{1, \dots, m\}$;
- 2) если два элемента $v_{i_1} \cdots v_{i_p} \otimes u_{j_1} \cdots u_{j_r}$ и $v_{k_1} \cdots v_{k_s} \otimes u_{l_1} \cdots u_{l_t}$ являются коциклами, то они представляют классы когомологий, двойственные по Пуанкаре, тогда и только тогда, когда $p+s = n, r+t = m-n, (i_1, \dots, i_p, k_1, \dots, k_s) \text{ — набор индексов граней коразмерности один, сходящихся в некоторой вершине, и } \{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_r, k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_t\} = \{1, \dots, m\}$.

Из теоремы 6 при помощи теоремы Гильберта о сизигиях можно получить выражение ряда Пуанкаре кольца $k(P^n)$ в терминах $H^*(\mathcal{Z}_P)$. Сопоставляя это выражение с формулой $F(k(P), \lambda) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} f_i \delta^{i+1}, \delta = \lambda^2/(1 - \lambda^2)$, полученной из комбинаторных соображений (см. [1]), и используя следствие 7, можно получить комбинаторные соотношения Дена–Соммервилля [5] для простых многогранников.

В заключение отметим, что изложенный здесь подход к исследованию многообразий $\mathcal{Z}_P$ частично сформировался в ходе выполнения работы [6], и в связи с этим авторы выражают благодарность Найджеду Рэю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stanley R. Combinatorics and Commutative Algebra. Boston: Birkhäuser, 1983. [2] Davis M., Januszkiewicz T. // Duke Math. J. 1991. V. 62. №2. P. 417–451. [3] Smith L. // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 129. P. 58–93. [4] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966. [5] Брэнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988. [6] Бухштабер В. М., Рэй Н. // УМН. 1998. Т. 53. №2. С. 139–140.