Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, Частичные геометрии и их расширения, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 25–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:09:56

УДК 519.44

Светлой памяти племянника Алексея посвящается

ЧАСТИЧНЫЕ ГЕОМЕТРИИ И ИХ РАСШИРЕНИЯ

А. А. МАХНЕВ

Данный обзор состоит из трех частей: частичные геометрии, диаграммные геометрии и расширения частичных геометрий. В первой части помещены основные определения, все известные на данный момент примеры частичных геометрий, некоторые характеристические теоремы, а также некоторые результаты о получастичных геометриях. Во второй части обзора приведены определения, относящиеся к диаграммным геометриям, ряд общих результатов об этих геометриях, примеры геометрий ранга 2, выступающих в роли строительных блоков для геометрий большего ранга, а также теоремы о строении некоторых флаг-транзитивных геометрий ранга 2. В третьей части содержится обзор результатов, характеризующих расширения частичных геометрий: 2-схем и дуальных 2-схем; сетей и дуальных сетей; а также обобщенных четырехугольников. Кроме того, в заключительном пункте этой части приведены некоторые обобщения понятия расширения и соответствующие характеристические результаты.

Библиография: 129 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	26
§ 1. Частичные геометрии	30
1.1. Определения	30
1.2. Точечный граф частичной геометрии	30
1.3. Известные примеры истинных частичных геометрий	32
1.4. Некоторые характеристические теоремы	36
1.5. Получастичные геометрии	39
§ 2. Диаграммные геометрии	47
2.1. Определения	47
2.2. Диаграммы	50
2.3. Некоторые диаграммные геометрии ранга 2	51
2.4. Общие результаты о диаграммных геометриях	53
2.5. Флаг-транзитивные диаграммные геометрии ранга 2	53
§ 3. Расширения частичных геометрий	58
3.1. Расширения сетей и двойственных сетей	60
3.2. Расширения двойственных 2-схем	62
3.3. Расширения обобщенных четырехугольников	66
3.4. Некоторые обобщения расширений	68
Список литературы	71

Введение

Данная статья является обзором достижений (в том числе и самых недавних) по частичным геометриям и их расширениям. Помещены также определения и некоторые общие результаты по диаграммным геометриям. Публикаций на русском языке по последней теме до сих пор не было (кроме небольшого раздела в обзоре Кондратьева, Махнева, Старостина [73]). Среди обзоров на английском языке можно отметить работы Де Клерка, Ван Мальдегема [34] и Бюкенхаута, Пазини [15].

Система инцидентности $\mathbf{S} = (P, B, I)$ с множеством точек P , множеством блоков B и симметричным отношением инцидентности $I \subseteq (P \times B) \cup (B \times P)$ называется *геометрией ранга 2*. *Двойственной к $\mathbf{S}$* называется следующая геометрия ранга 2: $\mathbf{S}^D = (P^D, B^D, I^D)$, где $P^D = B$, $B^D = P$ и $I^D = I$. Если предположить, что в B нет двух блоков, инцидентных одному и тому же множеству точек (нет кратных блоков), то каждый блок можно отождествить с множеством инцидентных ему точек, отношение инцидентности становится симметризованным включением и геометрия обозначается через $\mathbf{S} = (P, B)$.

Для непустого подмножества Q из P имеется геометрия, называемая *ограничением $\mathbf{S}$ на Q* , с множеством точек Q и множеством блоков $\{L \cap Q \mid L \in B\}$. Две точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке (заметим, что точка коллинеарна себе). Коллинеарность точек x и y (двойственно, факт пересечения блоков L и M) мы будем обозначать как $x \sim y$ (соответственно $L \sim M$). Для точки x положим $x^\perp = \{y \in P \mid y \sim x\}$. *Вычетом геометрии $\mathbf{S}$ в точке x* называется геометрия $\mathbf{S}_x = (P_x, B_x, I_x)$, где $P_x = x^\perp - \{x\}$, $B_x = \{L \mid x \in L, L \in B\}$, $I_x = I \cap ((P_x \times B_x) \cup (B_x \times P_x))$. Пара $(x, L) \in (P, B)$ называется *флагом* (*антифлагом*), если $x \in L$ ($x \notin L$).

ПРИМЕР 0.1. Пусть G – группа подстановок на множестве P , H – подгруппа из G и L – орбита H на P . Если рассмотреть множество блоков $B = \{Lg \mid g \in G\}$, то геометрия $\mathbf{S} = (P, B)$ имеет флаг-транзитивную группу автоморфизмов G .

Для антифлага (x, L) геометрии $\mathbf{S}$ через $\alpha(x, L)$ обозначим число точек, принадлежащих L и коллинеарных x , эквивалентно, число блоков, содержащих x и пересекающих L . Геометрия называется *φ -однородной*, если $\alpha(x, L) = 0$ или φ для любого антифлага (x, L) . Геометрия называется *сильно φ -однородной*, если $\alpha(x, L) = \varphi$ для любого антифлага (x, L) .

Если R – отношение эквивалентности на подмножестве Q из P и f – каноническое отображение Q на Q/R , то можно определить *частное $(P, B)/R$* как геометрию с множеством точек Q/R и множеством блоков $\{f(L \cap Q) \mid L \in B, P - Q \subseteq L\}$.

ПРИМЕР 0.2. Пусть G – группа подстановок на множестве P и aRb тогда и только тогда, когда a, b принадлежат общей орбите G на P . Тогда G действует тождественно на частном $(P, B)/R$.

Типичная иллюстрация для этой ситуации – это действие на правильном многограннике группы, порожденной центральной симметрией (переставляющей антиподальные вершины).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00462) и при поддержке программой сотрудничества между Российской Академией Наук и Венгерской Академией Наук 1996–98 гг.

ПРИМЕР 0.3. Пусть p – точка геометрии (P, B) . Определим частное $(P, B)/p$ с помощью отношения эквивалентности R на $P - \{p\}$, положив aRb тогда и только тогда, когда каждый блок, содержащий a, p , содержит b ; и каждый блок, содержащий b, p , содержит a . Здесь блоки частного $(P, B)/R$ определяются как $\{f(L - \{p\}) \mid p \in L \in B\}$.

Если R является отношением равенства на $P - \{p\}$, то частное $(P, B)/R$ совпадает с вычетом геометрии в точке p . Если (P, B) – проективное или аффинное пространство, то частное в точке будет проективным пространством. Если же (P, B) является t -схемой, то частное в точке будет обычной вычетной $(t - 1)$ -схемой.

Геометрия ранга 2 называется *частичным пространством прямых*, если каждый ее элемент (элемент из $P \cup B$) инцидентен по крайней мере двум элементам и любые две точки инцидентны не более чем одному блоку, эквивалентно, любые два блока инцидентны не более чем одной точке. В этом случае говорят, что B является множеством прямых. Прямую назовем *тонкой*, если она содержит точно две точки. Если все прямые частичного пространства прямых являются тонкими, то оно называется *тонким*. Если каждая точка лежит не менее чем на трех прямых и каждая прямая содержит не менее трех точек, то частичное пространство прямых называется *толстым*. Если любые две точки лежат на единственной прямой, то геометрия называется *пространством прямых*. Частичное пространство прямых называется $(0, \alpha)$ -геометрией (Де Клерк и Тас [37]), если оно α -однородно. Если каждая точка лежит на $t + 1$ прямой, а каждая прямая содержит $s + 1$ точек, $s, t \geq 1$, то S называется частичным пространством прямых *порядка* (s, t) . Легко проверить, что если S является $(0, \alpha)$ -геометрией с $\alpha \geq 2$, то найдутся натуральные числа s, t такие, что S имеет порядок (s, t) .

Геометрия S называется *вложенной* в проективное или аффинное пространство, если B – это некоторое множество прямых этого пространства, а P совпадает с множеством всех точек этого пространства, лежащих на прямых из B . Вложение геометрии порядка (s, t) в $V = AG(n + 1, s + 1)$ называется *линейным представлением*, если B является объединением параллельных классов прямых из V . В этом случае P совпадает с множеством всех точек V , прямые из B определяют в бесконечно удаленной гиперплоскости Π_∞ множество $\mathcal{K}$ из $t + 1$ точек. Мы обозначим соответствующее представление через $T_n^*(\mathcal{K})$. Прямую, пересекающую $\mathcal{K}$ по t точкам, назовем *t -секущей*. Далее, 1-секущую назовем *касательной*, а 0-секущую – *внешней прямой*.

Граф с множеством вершин P и отношением смежности, полученным удалением равенства из отношения коллинеарности, называется *точечным графом геометрии S* . Скажем, что геометрия *связна, регулярна* и т. п., если этими свойствами обладает ее точечный граф. Аналогично определяется *блочный граф* геометрии ранга 2.

С другой стороны, *граф инцидентности $\mathcal{I}(S)$* это граф с множеством вершин $P \cup B$, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие элементы инцидентны. Очевидно, геометрия определяется своим графом инцидентности. Далее, вершины графа одного типа могут быть соединены только путем четной длины. В частности, циклы из $\mathcal{I}(S)$ имеют четную длину. Если $2g$ – обхват графа $\mathcal{I}(S)$, то параметр g называется *угольностью* геометрии. Для вершины x графа Γ *локальным диаметром $d(x)$* называется наибольшая из длин геодезических путей в Γ

с началом в x . *Диаметром графа* называется наибольший из локальных диаметров вершин. Через d_p (d_l) обозначим максимум локальных диаметров $d(x)$ в графе $\mathcal{S}(\mathbf{S})$, когда x является точкой (блоком) геометрии $\mathbf{S}$, а через d – диаметр графа $\mathcal{S}(\mathbf{S})$ (т.е. максимум из двух чисел d_p, d_l). Наконец, *граф флагов* геометрии $\mathbf{S}$ имеет в качестве вершин флаги геометрии, и два различных флага смежны, если они имеют общую вершину или общий блок. Через d^* обозначим диаметр графа флагов.

Бюкенхаут [9] доказал, что связная геометрия $\mathbf{S}$, в которой каждый элемент инцидентен по крайней мере двум элементам и каждая точка (блок) имеет один и тот же локальный диаметр d_p (d_l), имеет диаметр d^* , равный минимуму из двух чисел d_p, d_l . В этом случае $\{d, d^*\} = \{d_p, d_l\}$, кроме того, всегда $g \leq d^*$ и $d - d^* \leq 1$. Такую геометрию Бюкенхаут назвал (g, d_p, d_l) -угольником. Иногда в это определение включают условие $d_p \leq g + 2$, возникшее из наблюдения, что многие геометрии ранга 2, построенные по конечным простым группам (особенно по спорадическим группам), удовлетворяют этому неравенству.

Реберным (линейным) графом данного графа Γ называется граф, вершинами которого являются ребра Γ , и две вершины смежны, если соответствующие ребра инцидентны общей вершине Γ . Граф Γ называется *регулярным валентности k* , если каждая его вершина смежна точно с k вершинами. *Дистанционно регулярным* графом с массивом пересечений $(b_0 = k, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1 = 1, c_2, \dots, c_d)$ называется регулярный связный граф диаметра d такой, что для любой пары вершин (x, y) , находящихся на расстоянии j , верны равенства

$$|\Gamma_{j-1}(y) \cap \Gamma_1(x)| = c_j \quad (1 \leq j \leq d), \quad |\Gamma_{j+1}(y) \cap \Gamma_1(x)| = b_j \quad (0 \leq j \leq d-1).$$

Для любого графа Γ диаметра d с множеством вершин $\{x_1, \dots, x_v\}$ матрицы расстояний A_h , $h = 0, \dots, d$, определяются как $(v \times v)$ -матрицы с элементами

$$(A_h)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } d(x_i, x_j) = h, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для дистанционно регулярного графа, имеющего массив пересечений $(b_0 = k, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1 = 1, c_2, \dots, c_d)$, и $a_i = k - b_i - c_i$ верны равенства

$$A_1 A_i = b_{i-1} A_{i-1} + a_i A_i + c_{i+1} A_{i+1} \quad (1 \leq i \leq d-1),$$

и $\{A_0 = I, A_1, \dots, A_d\}$ образуют базис соответствующей матричной алгебры (см. Броувер, Коэн и Ноймайер [4]).

Заметим, что любое ребро дистанционно регулярного графа лежит в λ треугольниках, где $\lambda = k - b_1 - 1$, а каждая пара вершин, находящихся на расстоянии 2, имеет $\mu = c_2$ общих соседей. Дистанционно регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным с параметрами (v, k, λ, μ) , где v – число вершин графа. Матрица смежности $A = A_1$ сильно регулярного графа удовлетворяет равенствам

$$AJ = kJ, \quad A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I = \mu J,$$

где J – матрица, все элементы которой равны 1. Таким образом, A имеет три различных собственных значения k, r, l , причем $r + l = \lambda - \mu$, $rl = \mu - k$. В следующей теореме собраны различные необходимые условия существования сильно регулярного графа (см. Броувер и ван Линт [5]).

ТЕОРЕМА 0.1. Если Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , то

- (1) $k(k - \lambda - 1) = \mu(v - k - 1)$ (прямоугольное соотношение);
- (2) кратности собственных значений $r > 0$ и $l < 0$ равны

$$f = \frac{-k(l+1)(k-l)}{(k+rl)(r-l)} \quad \text{и} \quad g = \frac{k(r+1)(k-r)}{(k+rl)(r-l)} \quad \text{соответственно}$$

(требование, что данные дроби должны быть натуральными числами, называется условием целочисленности);

- (3) либо Γ имеет параметры $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$, либо собственные значения r и l целые;
- (4) дополнительный граф $\bar{\Gamma}$ также сильно регулярен с параметрами $\bar{k} = v - k - 1$, $\bar{\lambda} = v - 2k + \mu - 2$, $\bar{\mu} = v - 2k + \lambda$ и собственными значениями $\bar{k}$, $\bar{r} = -(l+1)$, $\bar{l} = -(r+1)$;
- (5) выполняются условия Крейна:

$$(r+1)(k+l+2rl) \leq (k+r)(l+1)^2, \quad (l+1)(k+l+2rl) \leq (k+l)(r+1)^2;$$

- (6) верна абсолютная граница: $v \leq f(f+3)/2$, $v \leq g(g+3)/2$;
- (7) верна граница для числа лап:

$$\text{если } \mu \neq l^2, \quad \mu \neq l(l+1), \quad \text{то } 2(r+1) \leq l(l+1)(\mu+1).$$

Размеры клик и коклик в сильно регулярном графе ограничены сверху (см. Броувер и ван Линт [5]).

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и собственными значениями k, r, l . Тогда

- (1) $|L| \leq 1 - k/l$ для любой клики L из Γ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина вне L смежна точно с $\mu/(-l)$ вершинами из L (граница ХOFFMана для клик);
- (2) $|C| \leq v(-l)/(k-l)$ для любой коклик C из Γ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина вне C смежна точно с $-l$ вершинами из C (граница ХOFFMана для коклик);
- (3) размер любой коклик C из Γ не превосходит $g = \frac{k(r+1)(k-r)}{(k+rl)(r-l)}$ (граница Цветковича для коклик), причем из равенств $|C| = g = v(-l)/(k-l)$ следует сильная регулярность графа, индуцированного $\Gamma - C$.

Если граф Γ зафиксирован, то для вершины $a \in \Gamma$ через $[a]$ обозначим окрестность a , через $a^\perp$ — подграф, индуцированный $\{a\} \cup [a]$, а через $[a]'$ — антиокрестность a , т.е. подграф, индуцированный $\Gamma - a^\perp$. Для подмножества вершин X графа Γ положим $X^\perp = \cap \{x^\perp \mid x \in X\}$. Подграф $[a] \cap [b]$ назовем μ -подграфом (λ -подграфом), если вершины a, b находятся на расстоянии 2 (смежны). Граф Γ называется редуцированным, если для любых вершин a, b из равенства $a^\perp = b^\perp$ следует $a = b$.

§ 1. Частичные геометрии

1.1. Определения. Сильно α -однородное частичное пространство прямых порядка (s, t) называется *частичной геометрией* и обозначается $pG_\alpha(s, t)$. Двойственная геометрия к $pG_\alpha(s, t)$ является частичной геометрией $pG_\alpha(t, s)$.

Частичные геометрии могут быть размещены в следующие четыре класса, имеющие небольшие пересечения.

(а) Частичные геометрии с $\alpha = 1$, т.е. обобщенные четырехугольники $GQ(s, t)$ (информацию о GQ можно найти в монографии Пэйна и Таса [100]).

(б) Частичные геометрии с $\alpha = s + 1$ или, двойственно, с $\alpha = t + 1$, т.е. $2-(v, s + 1, 1)$ -схемы или двойственные 2-схемы.

(в) Частичные геометрии с $\alpha = t$ или, двойственно, с $\alpha = s$, т.е. сети или двойственные сети. Положив для удобства $n = s + 1$, $m = t + 1$, мы скажем, что $pG_t(s, t)$ является сетью типа (n, m) .

(г) Истинные частичные геометрии с $1 < \alpha < \min\{s, t\}$.

1.2. Точечный граф частичной геометрии. Точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ является сильно регулярным с параметрами $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Отметим, что $pG_\alpha(s, t)$ имеет $b = (t + 1)(1 + st/\alpha)$ прямых.

1.2.1. Псевдогеометрический граф. Сильно регулярный граф, имеющий указанные выше параметры, называется *псевдогеометрическим для $pG_\alpha(s, t)$* . В таких графах достигается граница Хоффмана для клик, и каждая вершина вне $(s + 1)$ -клики L смежна с α вершинами из L . Если граф Γ является точечным графом некоторой частичной геометрии, то он называется *геометрическим*. Одной из важных проблем является проблема существования геометрического графа в классе псевдогеометрических графов с данными параметрами.

ТЕОРЕМА 1.1 (Боуз [3]). *Псевдогеометрический для $pG_\alpha(s, t)$ граф Γ является геометрическим, если*

$$2(s + 1) > t(t + 1) + \alpha(t + 1)(t^2 + 1).$$

В действительности для графов, удовлетворяющих этому неравенству, необходимо $\alpha = t$ или $t + 1$ (см. Броувер и ван Линт [5]).

Пусть граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_\alpha(s, t)$. Тогда $r = s - \alpha$, $l = -t - 1$, из условий целочисленности следует, что $\alpha(s + t + 1 - \alpha)$ делит $st(s + 1)(t + 1)$, условие Крейна принимает вид $(s + 1 - 2\alpha)t \leq (s - 1)(s + 1 - \alpha)^2$.

1.2.2. Псевдогеометрические графы и условие Крейна. Если $\alpha = 1$ (и $s \neq 1$), то условие Крейна превращается в хорошо известное неравенство Хигмэна для обобщенных четырехугольников: $t \leq s^2$. В работе Камерона, Геталса и Зейделя [21] доказано, что псевдогеометрический граф для $GQ(s, s^2)$ является геометрическим. Там же сформулирована

ПРОБЛЕМА 1. *Будет ли геометрическим псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(s, t)$ с $\alpha \geq 2$, для которого достигается равенство в условии Крейна?*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (Махнев [84]). Пусть для псевдогеометрического графа геометрии $pG_\alpha(s, t)$, $\alpha \geq 2$, достигается равенство в условии Крейна, $a \in \Gamma$. Тогда

- (1) граф $\Lambda = [a]$ также является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_{\alpha-1}(s-1, x)$, где $(\alpha-1)t = x(s-1)$;
- (2) если $\alpha = 2$, то $s = 4, 5, 7$ и $t = 27, 32, 54$ соответственно;
- (3) если для графа $\Lambda = [a]$ также достигается равенство в условии Крейна, то $s = 2\alpha$.

Граф Маклафлина является единственным псевдогеометрическим графом для $pG_2(4, 27)$ (Геталс и Зейдель [52]), но вопрос о его геометричности остается открытым.

ТЕОРЕМА 1.2 (Махнев [86]). Псевдогеометрический граф для $pG_2(5, 32)$ (сильно регулярный граф с параметрами $(486, 165, 36, 66)$) не существует.

В связи с теоремой 1.2 и предложением 1.1 представляют интерес следующие две проблемы.

ПРОБЛЕМА 2. Существует ли псевдогеометрический граф для частичной геометрии $pG_2(7, 54)$?

ПРОБЛЕМА 3. Существует ли частичная геометрия $pG_2(7, 54)$?

Пусть для псевдогеометрического графа частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ и для окрестности его вершины достигается равенство в условии Крейна. Известно существование только одного графа с этим свойством (это снова граф Маклафлина). Если $\alpha = 3$, то окрестность вершины в Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(5, 32)$, и в силу теоремы 1.2 псевдогеометрический граф для $pG_3(6, 80)$ не существует. Вопрос о существовании таких графов с $\alpha \geq 4$ остается открытым.

1.2.3. Некоторые классы псевдогеометрических графов. Точечный граф $Sp(2m-1, q)$ симплектической полярности $PG(2m-1, q)$, вершинами которого являются точки из $PG(2m-1, q)$, и две точки смежны, если они лежат на вполне изотропной прямой, является псевдогеометрическим с $s = q(q^{m-1} - 1)/(q - 1)$, $t = q^{m-1}$, $\alpha = (q^{m-1} - 1)/(q - 1)$.

Граф $N^+(2m-1, 2)$, вершинами которого являются точки из $PG(2m-1, 2)$, не принадлежащие квадрике $Q^+(2m-1, 2)$, и две точки смежны, если они лежат на прямой, касательной к квадрике, является псевдогеометрическим с $s = 2^{m-1} - 1$, $t = 2^{m-1}$, $\alpha = 2^{m-2}$.

Граф $N^-(2m-1, 2)$, вершинами которого являются точки из $PG(2m-1, 2)$, не принадлежащие квадрике $Q^-(2m-1, 2)$, и две точки смежны, если они лежат на прямой, касательной к квадрике, является псевдогеометрическим с $s = 2^{m-1} + 1$, $t = 2^{m-2}$, $\alpha = 2^{m-2}$.

Точечный граф $\Gamma Q(2m, q)$ квадрики $Q(2m, q)$ является псевдогеометрическим с $s = q(q^{m-1} - 1)/(q - 1)$, $t = q^{m-1}$, $\alpha = (q^{m-1} - 1)/(q - 1)$. Если q четно, то граф $\Gamma Q(2m, q)$ изоморфен $Sp(2m-1, q)$.

Точечный граф $\Gamma Q^+(2m-1, q)$ квадрики $Q^+(2m-1, q)$ является псевдогеометрическим только при $m = 2$ или 3 с $s = q(q^{m-1} - 1)/(q - 1)$, $t = q^{m-2}$, $\alpha = (q^{m-1} - 1)/(q - 1)$. Если $m = 2$, то мы получим точечный граф обобщенного

четырёхугольника $GQ(q, 1)$, а если $m = 3$, то – точечный граф двойственной схемы для точек и прямых $PG(3, q)$.

Точечный граф $GQ^-(2m-1, q)$ квадрики $Q^-(2m-1, q)$ является псевдогеометрическим с $s = q(q^{m-2} - 1)/(q - 1)$, $t = q^{m-1}$, $\alpha = (q^{m-2} - 1)/(q - 1)$. Если $m = 3$, то мы получим точечный граф обобщенного четырёхугольника $Q^-(5, q)$.

В следующей теореме собраны некоторые факты о геометричности перечисленных графов.

ТЕОРЕМА 1.3. (1) Если $m = 2n > 4$, то $N^+(2m-1, 2)$ является геометрическим (Де Клерк, Дай и Тас [30]).

(2) Граф $N^-(5, 2)$ не является геометрическим (Де Клерк, Геверт и Тас [33]).

(3) Граф $Sp(3, q)$ является точечным графом обобщенного четырёхугольника $W(q)$, графы $Sp(5, q)$, $Sp(7, q)$ не являются геометрическими (Де Клерк, Геверт и Тас [33]).

1.3. Известные примеры истинных частичных геометрий.

1.3.1. Частичные геометрии $S(\mathcal{K})$. Это бесконечное семейство было сконструировано Тасом [113] и независимо Уоллесом [126]. Подмножество X из n точек проективной плоскости называется (n, d) -дугой, если любая прямая пересекает X не более чем по d точкам. Максимальная (n, d) -дуга $\mathcal{K}$ проективной плоскости π порядка q имеет $n = qd - q + d$, $d \leq q$, причем любая секущая пересекает $\mathcal{K}$ по d точкам. Для максимальной $(qd - q + d, d)$ -дуги $\mathcal{K}$ множество прямых $\mathcal{K}'$ плоскости π , не пересекающих $\mathcal{K}$, будет максимальной $(q(q - d + 1)/d, q/d)$ -дугой двойственной плоскости.

Для максимальной $(qd - q + d, d)$ -дуги $\mathcal{K}$ определим систему инцидентности $S(\mathcal{K}) = (P, B, I)$. Множество P состоит из точек π , не лежащих в $\mathcal{K}$, B состоит из прямых π , пересекающих $\mathcal{K}$. Инцидентность та же, что и в π . Тогда $S(\mathcal{K})$ является частичной геометрией с $s = q - d$, $t = q - q/d$, $\alpha = q - q/d - d + 1$.

В проективной плоскости $PG(2, 2^h)$ для $0 < m < h$ имеются $(2^{h+m} - 2^h + 2^m, 2^m)$ -дуги, дающие частичные геометрии с $s = 2^h - 2^m$, $t = 2^h - 2^{h-m}$, $\alpha = (2^m - 1) \times (2^{h-m} - 1)$. Геометрия $S(\mathcal{K})$ является обобщенным четырёхугольником, только если $h = 2$, и это будет единственный обобщенный четырёхугольник порядка 2.

Если $m = h - 1$, $h \geq 2$, то точечный граф $S(\mathcal{K})$ является котреугольным графом $\overline{T}(2^h + 2)$. Хотя эти графы однозначно определяются своими параметрами, это не влечет единственность геометрии. Например, Мэтон [92] доказал, что существует точно две геометрии $PG_3(4, 6)$ (с точечным графом $\overline{T}(10)$). С другой стороны, котреугольный граф $\overline{T}(2n)$ является псевдогеометрическим для $PG_{n-2}(n-1, 2n-4)$, но графы $\overline{T}(8)$ (и дополнения графов Чанга, имеющие те же параметры, что $\overline{T}(8)$) и $\overline{T}(12)$ не являются геометрическими (Де Клерк [28], Лэм и др. [74]).

1.3.2. Частичные геометрии $T_2^*(\mathcal{K})$. Пусть $\mathcal{K}$ является $(qd - q + d, d)$ -дугой проективной плоскости π порядка q , вложенной в $PG(3, q)$. Определим систему инцидентности $T_2^*(\mathcal{K}) = (P, B, I)$. Множество P состоит из точек $PG(3, q)$, не лежащих в π , B состоит из всех прямых $PG(3, q)$, пересекающих $\mathcal{K}$ по единственной точке, инцидентность та же, что и в $PG(3, q)$. Тогда $T_2^*(\mathcal{K})$ является частичной геометрией с $s = q - 1$, $t = (q + 1)(d - 1)$, $\alpha = d - 1$. Это бесконечное семейство впервые было построено Тасом [113].

В проективной плоскости $PG(2, 2^h)$ для $0 < m < h$ имеются $(2^{h+m} - 2^h + 2^m, 2^m)$ -дуги, дающие частичные геометрии с $s = 2^h - 1$, $t = (2^h + 1)(2^m - 1)$, $\alpha = (2^m - 1)$. Геометрия $T_2^*(\mathcal{K})$ является обобщенным четырехугольником, если $m = 1$. Тогда $\mathcal{K}$ — гипервал из π и $s = 2^h - 1$, $t = 2^h + 1$.

1.3.3. Частичные геометрии $PQ^+(4n - 1, q)$, $q = 2$ или 3. Пусть $Q^+ = Q^+(2m - 1, q)$ — гиперболическая квадрака в $PG(2m - 1, q)$. Множество максимальных вполне сингулярных подпространств разбивается на два класса $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$. Два подпространства попадают в один класс, если коразмерность их пересечения имеет ту же четность, что и $m - 1$.

Пусть q нечетно, $x, y \in PG(2m - 1, q) - Q^+$. Точки x, y называются эквивалентными, если существует такая несингулярная точка z , что прямые xz и yz являются касательными к Q^+ . Это отношение можно определить следующим образом. Вложим Q^+ в несингулярную гиперквадрику Q из $PG(2m, q)$ и полюс гиперплоскости $PG(2m - 1, q)$ относительно Q обозначим через p . Точки x, y эквивалентны, если прямые xp и yp являются либо обе секущими, либо обе внешними прямыми к Q . То, что это отношение будет отношением эквивалентности, доказано Тасом [115]. Это отношение имеет два класса эквивалентности E_1 и E_2 , причем для некоторого i проекция Q на $PG(2m - 1, q)$ относительно p совпадает с $Q^+ \cup E_i$.

Спредом Σ гиперболической квадраки $Q^+ = Q^+(4n - 1, 2)$, $n \geq 2$, называется семейство из $2^{2n-1} + 1$ попарно непересекающихся $(2n - 1)$ -мерных подпространств из Q^+ . Пусть Ω будет множеством всех гиперплоскостей элементов из Σ . Рассмотрим систему инцидентности $PQ^+(4n - 1, 2) = (P, B, I)$. Множество P состоит из точек $PG(4n - 1, 2)$, не лежащих на квадраке, $B = \Omega$ и xIL для $(x, L) \in (P, B)$ тогда и только тогда, когда $x \in L^\perp$, где $L^\perp$ — ортогональное к L подпространство относительно Q^+ . Тогда $PQ^+(4n - 1, 2)$ является частичной геометрией с $s = 2^{2n-1} - 1$, $t = 2^{2n-1}$, $\alpha = 2^{2n-2}$. Это бесконечное семейство впервые было построено Де Клерком, Даем и Тасом [30]. Заметим, что геометрия $PQ^+(7, 2)$ является вычетом элемента типа 2 в геометрии ранга 3 спорадической группы Томпсона F_3 (см. Бюкенхаут [10]).

Неизоморфные спреды квадраки $Q^+(4n - 1, 2)$ дают неизоморфные частичные геометрии. Если число $2n - 1$ составное, то $Q^+(4n - 1, 2)$ имеет неизоморфные спреды (см. Кантор [70]).

Для $q = 3$ аналогичная конструкция предложена Тасом [116]. Снова пусть Σ является спредом гиперболической квадраки $Q^+ = Q^+(4n - 1, 3)$, Ω будет множеством всех гиперплоскостей элементов из Σ . Рассмотрим систему инцидентности $PQ^+(4n - 1, 3) = (P, B, I)$ с $P = E_i$, $B = \Omega$ и xIL для $(x, L) \in (P, B)$ тогда и только тогда, когда $x \in L^\perp$. Тогда $PQ^+(4n - 1, 3)$ является частичной геометрией с $s = 3^{2n-1} - 1$, $t = 3^{2n-1}$, $\alpha = 2 \cdot 3^{2n-2}$.

Пока известно лишь, что $Q^+(7, 3)$ имеет спред, это дает геометрию с $s = 26$, $t = 27$, $\alpha = 18$.

ПРОБЛЕМА 4. *Существуют ли частичные геометрии типа $PQ^+(4n - 1, 3)$ для $n > 2$?*

1.3.4. Частичные геометрии $\mathcal{M}_3(n)$. Определим эрмитов граф $\mathcal{H}(q)$ для нечетного q , являющегося степенью простого числа, в терминах эрмитовой параболы из

$AG(2, q^2)$. Вершинами графа $\mathcal{H}(q)$ являются пары (x, y) , удовлетворяющие уравнению $x^{q+1} + y + y^q = 0$, вершины $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 x_2^q + y_1 + y_2^q$ является квадратом или неквадратом в $GF(q^2)$ согласно $q \equiv 3$ или 1 по модулю 4. Известно (Броувер и ван Линт [5]), что $\mathcal{H}(q)$ является псевдогеометрическим с параметрами $s = q - 1, t = (q^2 - 1)/2, \alpha = (q - 1)/2$. Далее, граф $\mathcal{H}(3)$ изоморфен точечному графу $GQ(2, 4)$. Спенс [110] доказал, что графы $\mathcal{H}(5)$ и $\mathcal{H}(7)$ не являются геометрическими.

Мэтон [93] построил новую бесконечную серию частичных геометрий $\mathcal{M}_3(n)$ с точечным графом $\mathcal{H}(3^{2n})$.

Пусть β – примитивный элемент поля $GF(q^2)$, $q = 3^{2n}$. Обозначим нулевой элемент поля через β^∞ и положим $r = (q + 1)/2, q_2 = q - 2, q_4 = (q^2 - 5)/4, x_{k,l}^{i,\delta} = \beta^{2i+\delta}(\beta^{2rk} - \beta^{2rl-r})$,

$$y_{k,j,l}^{i,\delta} = \beta^{2r(i+\delta)+r}[\beta^{2rk}(\beta^{2rk} + \beta^{2ri-r})^2 - \beta^{2ri-r}(\beta^{2rk} - \beta^{2rl-r})^2] + \beta^{2rj+r},$$

где $k, l, j = \infty, 0, 1, \dots, q_2, i = 0, 1, \dots, q_4$ и $\delta = 0, 1$.

Система инцидентности $\mathcal{M}_3(n) = (P, B, I)$ с множеством точек $P = \{(x_{k,l}^{0,0}, y_{k,j,l}^{0,0})\}$ и множеством прямых $L = \{L_{j,l}^{i,\delta}, L_{k,l}^\infty\}$, где

$$\begin{aligned} L_{j,l}^{i,\delta} &= \{(x_{k,l}^{i,\delta}, y_{k,j,l}^{i,\delta}) \mid k = \infty, 0, 1, \dots, q_2\}, \\ L_{k,l}^\infty &= \{(x_{k,l}^{0,0}, y_{k,j,l}^{0,0}) \mid j = \infty, 0, 1, \dots, q_2\}, \end{aligned}$$

$k, l, j = \infty, 0, 1, \dots, q_2, i = 0, 1, \dots, q_4$ и $\delta = 0, 1$, является частичной геометрией с параметрами $s = 3^{2n} - 1, t = (3^{4n} - 1)/2, \alpha = (3^{2n} - 1)/2$.

Группа автоморфизмов $\text{Aut } \mathcal{M}_3(n)$ является подгруппой индекса 4 в $\text{Aut } \mathcal{H}(3^{2n})$, действует транзитивно на множестве точек и имеет две орбиты на множестве прямых $S^\infty = \{L_{k,l}^\infty\}$, одну длины 3^{4n} и вторую длины $3^{4n}(3^{4n} - 1)/2$.

1.3.5. Частичные геометрии $(V, \mathcal{L})$. Частичной (λ, μ) -геометрией назовем систему инцидентности (P, B) , удовлетворяющую свойствам

- (S1) каждый блок содержит k точек из P , и каждая точка принадлежит r блокам,
- (S2) любые две точки принадлежат 0 или λ блокам,
- (S3) любые два блока пересекаются по 0 или μ точкам.

Если частичная (λ, μ) -геометрия сильно β -однородна, то выполняется свойство

- (S4) для любого антифлага (a, B) имеется точно $\alpha = \beta\lambda/\mu$ блоков из $a^\perp$, пересекающих B .

Сильно β -однородная частичная (λ, μ) -геометрия с параметрами (k, r) содержит $v = k(r - 1)(k - \mu)/(\beta\lambda) + k$ точек и $b = r(k - 1)(r - \lambda)/(\beta\lambda) + r$ блоков, причем точечный граф и блочный граф сильно регулярны с параметрами

$$(v, r(k-1)/\lambda, r(\beta-1)/\lambda+k-\beta-1, r\beta/\lambda) \quad \text{и} \quad (b, k(r-1)/\mu, k(\alpha-1)/\mu+r-\alpha-1, k\alpha/\mu).$$

Для любого $m = 2^n, n \geq 2$, существует сильно $(m + 1)$ -однородная частичная $(m, 2)$ -геометрия (P, B) с параметрами $v = m(m + 2), k = m + 2$ (Таюан Хуанг [65]). Пусть $GF(m) = \{f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = \alpha, f_3 = \alpha^2, \dots, f_{m-1} = \alpha^{m-2}\}$, где $\alpha -$

примитивный элемент поля $GF(m)$. Положим $A_{hl} = (a_{ij}^{hl})$, где $a_{ij}^{hl} = f_i + f_j f_l + f_h f_l^2$, $0 \leq h, i, j \leq m-1$, $1 \leq l \leq m-1$. Пусть M_h означает ортогональный массив $OA(m+1, m)$, полученный стандартным путем из семейства $\{A_{h1}, \dots, A_{h(m-1)}\}$, и $\overline{M}_h$ получается из M_h добавлением новой первой строки $[(f_h f_h \dots f_h)_i]$, $0 \leq i \leq m-1$. Таким образом, матрица $\overline{M}_h$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} f_h f_h \dots f_h & f_h f_h \dots f_h & \dots & f_h & f_h & \dots & f_h \\ f_0 f_0 \dots f_0 & f_1 f_1 \dots f_1 & \dots & f_{m-1} f_{m-1} \dots f_{m-1} \\ f_0 f_1 \dots f_{m-1} & f_0 f_1 \dots f_{m-1} & \dots & f_0 & f_1 & \dots & f_{m-1} \\ \hline 0\text{-я строка } A_{h1} & 1\text{-я строка } A_{h1} & \dots & (m-1)\text{-я строка } A_{h1} \\ 0\text{-я строка } A_{h2} & 1\text{-я строка } A_{h2} & \dots & (m-1)\text{-я строка } A_{h2} \\ 0\text{-я строка } A_{h(m-1)} & 1\text{-я строка } A_{h(m-1)} & \dots & (m-1)\text{-я строка } A_{h(m-1)} \end{bmatrix}.$$

Для $0 \leq h \leq m-1$ если i -й столбец матрицы $\overline{M}_h$ имеет вид $[f_{b_0}(=f_h)f_{b_1} \dots f_{b_{m+1}}]^T$, $0 \leq b_0, b_1, \dots, b_{m+1} \leq m-1$, то мы положим $B_{m^2 h+i} = \{b_l + ml \mid 0 \leq l \leq m+1\}$. Если $P = \{0, 1, \dots, m(m+2)-1\}$, $B = \{B_{m^2 h+i} \mid 0 \leq h \leq m-1, 0 \leq i \leq m^2-1\}$, то (P, B) – требуемая геометрия.

Пусть $V_i = \{\vec{x} \mid \vec{x} \text{ пробегает множество столбцов матрицы } \overline{M}_i\}$, $0 \leq i \leq m-1$, и $V = \bigcup V_i$. Для векторов $\vec{x} \in V_0$, $\vec{y} \in V_1$ положим $L(\vec{x}, \vec{y}) = \{\vec{x} + f_i(\vec{x} + \vec{y}) \mid 0 \leq i \leq m-1\}$. Ясно, что $L(\vec{x}, \vec{y})$ состоит из m векторов, включая $\vec{x}, \vec{y}$. Кроме того, положим

$$\mathcal{L} = \{L(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} \in V_0, \vec{y} \in V_1, d_H(\vec{x}, \vec{y}) = m+2\},$$

где d_H – расстояние Хемминга.

Каждой сильно $(m+1)$ -однородной частичной $(m, 2)$ -геометрии (P, B) с параметрами $v = m(m+2)$, $k = m+2$ соответствует частичная геометрия $(V, \mathcal{L})$ с $s = m-1$, $t = m(m-1)/2 - 1$, $\alpha = (m-2)/2$ с точечным графом, изоморфным дополнению блочного графа для (P, B) (Хуанг [65]).

1.3.6. Спорадическая частичная геометрия ван Линта–Шрайвера.

Пусть $P = GF(81)$, β – примитивный элемент из P . Положим $\gamma = \beta^{16}$, $B = \{\{b, 1+b, \gamma+b, \gamma^2+b, \gamma^3+b, \gamma^4+b\} \mid b \in P\}$. Тогда $\mathbf{S} = (P, B, I)$ с симметризованным включением I будет частичной геометрией с $s = t = 5$, $\alpha = 2$.

Известно, что точечный граф этой геометрии является членом бесконечного семейства графов, так называемого циклотомического типа (см. Калдебранк и Кантор [17]). Однако имеется предположение о том, что только один из этих графов является геометрическим.

1.3.7. Спорадическая частичная геометрия Хэмерса.

Хэмерс [53] построил другую спорадическую частичную геометрию. Ее параметры равны $s = 4$, $t = 17$, $\alpha = 2$. Хорошо известны существование и единственность сильно регулярного графа Λ с параметрами $(50, 7, 0, 1)$. Этот граф впервые был построен Хоффманом и Синглтоном [64]. Рассмотрим граф Γ , вершинами которого являются ребра графа Λ , и два таких ребра смежны, если они не инцидентны общей вершине и в Λ соединены некоторым ребром. Тогда Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(4, 17)$. Далее,

Хэмерс нашел подмножество из 105 специальных графов Петерсена из Λ такое, что каждый пятиугольник из Λ содержится в единственном специальном графе Петерсена. Таким образом, система инцидентности из 175 вершин графа Γ и 630 так называемых 1-факторов из специальных графов Петерсена образуют $pG_2(4, 17)$.

Геометрия однозначно восстанавливается по вышеуказанному точечному графу. Более того, точечный граф двойственной геометрии $pG_2(17, 4)$ содержит точно 175 клик размера 18, поэтому этот граф однозначно определяет $pG_2(4, 17)$ (Сойчер, частное сообщение). Хэмерс [54] доказал, что эта частичная геометрия имеет одноточечное расширение до геометрии ранга 3 для группы Матье M_{22} .

1.4. Некоторые характеризационные теоремы.

1.4.1. Псевдогеометрические графы для $pG_2(4, t)$. Сильно регулярный граф, имеющий параметры $(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2)$, является псевдогеометрическим для $pG_2(4, t)$. Из условия целочисленности следует, что $t = 1, 2, 3, 7, 9, 12, 17, 27, 57$. По условию Крейна $t \leq 27$. Для $t = 1, 2, 17$ известно существование частичных геометрий, а для $t = 27$ — существование и единственность графа (граф Маклафлина). Кроме того, для $t = 3$ и 12 известно существование графа (частное графа Джонсона $\bar{J}(8, 4)$ и эрмитов граф $\mathcal{H}(5)$). Для $t = 7$ или 9 не известно существование ни указанных геометрий, ни сильно регулярных графов с данными параметрами. Автором [78] классифицированы псевдогеометрические графы для $pG_2(4, t)$ при условии, что все μ -подграфы регулярны и не содержат треугольников. Оказалось, что последнее условие излишне.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 (Махнев [87]). Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(10t + 5, 4t + 4, t + 3, 2t + 2)$. Тогда μ -подграфы из Γ не содержат треугольников.

Нецентрированной триадой называется такая 3-кликка, что пересечение окрестностей ее вершин пусто. Важность этого понятия объясняется тем, что если псевдогеометрический граф Γ для частичной геометрии $pG_2(4, t)$ содержит максимальную 4-кликку Δ , то $K_0(\Delta)$ является нецентрированной триадой.

ТЕОРЕМА 1.4 (Махнев [78], [87]). Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_2(4, t)$. Тогда

- (1) если Γ имеет регулярные μ -подграфы, то он является треугольным графом $T(6)$, частным графа Джонсона $\bar{J}(8, 4)$ или графом Маклафлина;
- (2) если Γ содержит нецентрированную триаду, то он является треугольным графом $T(6)$ или частным графа Джонсона $\bar{J}(8, 4)$.

Как следствие получаем, что в псевдогеометрическом графе для геометрии $pG_2(4, t)$ любой λ -подграф является объединением изолированных вершин и треугольников.

1.4.2. Графы для геометрий с $\alpha = s - 1$. Если S — частичная геометрия с $\alpha = s - 1$, то дополнение точечного графа имеет собственное значение -2 . Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем [106]. Класс Зейделевых графов включает полные многодольные графы $K_n \times 2$ с n долями порядка 2, решетчатые и треугольные графы, а также графы Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша и Шлефли.

ТЕОРЕМА 1.5 (Де Клерк [28]). Пусть Γ – псевдогеометрический граф для $PG_{s-1}(s, t)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений.

- (1) $s = 2$ и $t = 1, 2$ или 4 , Γ является геометрическим и соответствующие обобщенные четырехугольники единственны.
- (2) $s = 3$ и $t = 1, 2$ или 4 .
 - (а) если $t = 1$, то Γ является геометрическим и соответствующая частичная геометрия является единственной двойственной 2-схемой.
 - (б) если $t = 2$, то Γ является геометрическим и существуют точно две сети типа $(4, 3)$.
 - (с) если $t = 4$, то Γ не является геометрическим.
- (3) $s > 3$, $t = s - 1$ и Γ является геометрическим тогда и только тогда, когда существует аффинная плоскость порядка $s + 1$. Соответствующая сеть получается удалением двух параллельных классов из этой плоскости.
- (4) $s > 3$, $t = 2s - 2$ и Γ является геометрическим тогда и только тогда, когда проективная плоскость порядка $2s$ содержит гипервал $\mathcal{O}$. Соответствующая геометрия является двойственной к $\mathbf{S}(\mathcal{O})$.

1.4.3. Частичные геометрии и аксиома Паша. Сначала сформулируем аксиому Паша ($\mathcal{P}$), иногда называемую аксиомой Веблена–Юнга.

Если L_1, L_2 – различные прямые, пересекающиеся в точке x , $x \notin M_1 \cup M_2$, и $L_i \sim M_j$ для всех $i, j \in \{1, 2\}$, то $M_1 \sim M_2$.

Двойственная к ней аксиома часто называется *диагональной аксиомой* ($\mathcal{D}$). Любой обобщенный четырехугольник тривиально удовлетворяет ($\mathcal{P}$) и ($\mathcal{D}$). Далее, $2-(v, s + 1, 1)$ -схема удовлетворяет ($\mathcal{D}$). Любая $2-(v, s + 1, 1)$ -схема, удовлетворяющая ($\mathcal{P}$), является проективным пространством. Единственная известная частичная геометрия с $\alpha \notin \{1, s + 1, t + 1\}$, удовлетворяющая аксиоме Паша, – это двойственная сеть H_q^{n+1} . Она строится следующим образом. Пусть $H = PG(n - 1, q)$ является подпространством из $\Sigma = PG(n + 1, q)$. Тогда H_q^{n+1} – это система инцидентности с множеством точек $\Sigma - H$, множеством прямых из Σ , не пересекающих H , и инцидентностью из Σ . Параметры этой двойственной сети $s = \alpha = q$, $t = q^n - 1$.

ТЕОРЕМА 1.6 (Тас и Де Клерк [119]). Пусть $\mathbf{S}$ – двойственная сеть $PG_s(s, t)$ ($t + 1 > s$), удовлетворяющая аксиоме Паша. Тогда $\mathbf{S}$ изоморфна H_q^{n+1} , в частности, $s = q$ и $t + 1 = q^n$.

Заметим, что H_q^{n+1} можно представить как дополнение сингулярной симплектической геометрии в $PG(n + 1, q)$ с радикалом H . Далее, частичные пространства прямых, удовлетворяющие ($\mathcal{P}$) и ($\mathcal{D}$), описаны Спрагу [111].

1.4.4. Вложения частичных геометрий в проективные и аффинные пространства. Имеется полная классификация частичных геометрий, вложимых в проективное пространство.

ТЕОРЕМА 1.7 (Де Клерк, Тас [36]). Пусть $\mathbf{S} = PG_\alpha(s, t)$ вкладывается в $PG(n, s)$, но не в $PG(m, s)$ для $m < n$. Тогда выполняется одно из утверждений.

- (1) $\alpha = s + 1$ и $\mathbf{S}$ является схемой точек и прямых $PG(n, s)$.

- (2) $\alpha = 1$ и $\mathbf{S}$ – классический обобщенный четырехугольник (см. Бюкенхаут и Лефевр [13]).
- (3) $\alpha = t + 1$, $n = 2$ и $\mathbf{S}$ является двойственной схемой к $PG(2, s)$.
- (4) $\alpha = s$ и $\mathbf{S} = H_q^{n+1}$.

Имеется также полная классификация частичных геометрий, вложимых в аффинное пространство (Тас [114]). В случае обобщенных четырехугольников возникают интересные спорадические вложения (Пэйн и Тас [100]). Мы ограничимся формулировкой теоремы для истинных частичных геометрий.

ТЕОРЕМА 1.8 (Тас [114]). *Если $\mathbf{S}$ – истинная частичная геометрия, вложимая в аффинное пространство $AG(n, s + 1)$, но не в $AG(m, s + 1)$ для $m < n$, то $n = 3$ и $\mathbf{S} = T_2^*(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ является максимальной дугой в бесконечно удаленной плоскости.*

Для теорем, характеризующих $\mathbf{S}(\mathcal{K})$ и $T_2^*(\mathcal{K})$, мы отсылаем к Де Клерку, Де Сету и Геверту [31], Де Клерку, Геверту и Тасу [33] и Геверту [51].

1.4.5. Построение новых частичных геометрий с помощью заменяемых спредов. Следующие результаты содержатся в статье Де Клерка [29]. Пусть Φ – спред $pG_\alpha(s, t)$. Для прямой $L \notin \Phi$ через Φ_L обозначим множество из $s + 1$ прямых в Φ , пересекающих L . Прямую L назовем регулярной относительно Φ , если найдется множество из $s + 1$ прямых $\mathcal{L}_\Phi = \{L_0 = L, L_1, \dots, L_s\}$, расщепляющее точечное множество $\mathcal{P}(\Phi_L)$, а любая прямая из $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_\Phi \cup \Phi)$ пересекает $\mathcal{P}(\Phi_L)$ не более чем по s точкам.

Если L – регулярная прямая относительно спреда Φ частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$, то $t \geq s + 1$. Если $t = s + 1$, то каждая прямая из $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_\Phi \cup \Phi)$ пересекает $\mathcal{P}(\Phi_L)$ по α точкам. Обратно, если каждая прямая из $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_\Phi \cup \Phi)$ пересекает $\mathcal{P}(\Phi_L)$ по α точкам, то $t = s + 1$.

Допустим, что Φ – такой спред, что каждая прямая регулярна относительно Φ . Тогда $\mathcal{L} = \Phi$ расщепляется $s(s + 1)/\alpha + 1$ множествами $\mathcal{L}_i$, $i = 0, \dots, s(s + 1)/\alpha$, причем каждое из них состоит из $s + 1$ попарно не пересекающихся прямых. В этом случае спред Φ назовем заменяемым.

Если Φ – заменяемый спред, то $D(\Phi) = (\Phi, \Phi_L)$ является $2\text{--}(s(s + 1)/\alpha, s + 1, \alpha)$ -схемой.

Пусть $\mathcal{S}$ является частичной геометрией $pG_\alpha(s, t)$ с заменяемым спредом Φ . Определим новую геометрию $\mathcal{S}_\Phi = (\mathcal{P}_\Phi, \mathcal{L}_\Phi)$ с $\mathcal{P}_\Phi = \mathcal{S} \cup \{\mathcal{L}_i \mid i = 0, \dots, s(s + 1)/\alpha\}$, $\mathcal{L}_\Phi = \mathcal{L} - \Phi$. Тогда $\mathcal{S}_\Phi$ является $pG_\alpha(s + 1, s)$.

Мэтон и Стрит с помощью компьютера установили, что $PQ^+(7, 2)$ содержит точно три заменяемые спреда, дающие (после дуализации) три неизоморфные частичные геометрии $pG_4(7, 8)$. Одна из них снова содержит заменяемый спред. В итоге Мэтон и Стрит с помощью этой техники (названной ими переключением (switching)) нашли семь новых частичных геометрий $pG_4(7, 8)$, не изоморфных $PQ^+(7, 2)$.

Де Клерк строит спреды типа (i) в частичных геометриях $PQ^+(4n - 1, q)$ для $i = 1, 2, 3$ (последний тип лишь при четном n). Если $q = 2$ или 3 , то спред типа (1) является заменяемым, а спреды типов (2) и (3) заменяемы только при $n = 2$.

СЛЕДСТВИЕ (Де Клерк [29]). *Частичная геометрия $PQ^+(7, q)$, $q = 2, 3$, имеет точно три спреда, каждый из которых заменяем.*

1.5. Получастичные геометрии.

1.5.1. Определения. *Получастичной геометрией $spG_\alpha(s, t, \mu)$ называется $(0, \alpha)$ -геометрия порядка (s, t) , в которой любые две неколлинеарные точки коллинеарны с μ общими точками.*

Точечный граф $spG_\alpha(s, t, \mu)$ является сильно регулярным с параметрами $v = 1 + (t+1)s(\mu + t(s - \alpha + 1))/\mu$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$.

Получастичная геометрия с $\alpha = 1$ называется *частичным четырехугольником*. Такие геометрии рассматривались Камероном [18]. Получастичные геометрии являются обобщением частичных геометрий и частичных четырехугольников. Заметим, что получастичная геометрия является частичной, если $\mu = \alpha(t+1)$. Получастичную геометрию с $\mu < \alpha(t+1)$ назовем *истинной*.

Двойственная к истинной получастичной геометрии снова будет получастичной геометрией, только если $s = t$ (Дебре и Тас [39]). В следующей теореме собраны условия на параметры получастичной геометрии.

ТЕОРЕМА 1.9 (Де Клерк и Ван Мальдегем [34]). *Пусть $spG_\alpha(s, t, \mu)$ является истинной получастичной геометрией. Тогда*

- (1) $t \geq s$ и $b \geq v$;
- (2) либо $D = (t(\alpha - 1) + s - 1 - \mu)^2 + 4(s(t+1) - \mu)$ равно 5 (и $\mathbf{S}$ — пятиугольник), либо D является квадратом и

$$\frac{2s(t+1) + (v-1)(t(\alpha-1) + s - 1 - \mu + \sqrt{D})}{2\sqrt{D}}$$

— целое число;

- (3) α делит μ и $\alpha^2 \leq \mu \leq \alpha(t+1)$;
- (4) μ делит $(t+1)st(s+1-\alpha)$;
- (5) α делит $st(t+1)$ и $ts(s+1)$;
- (6) α^2 делит μst и $t(\alpha(t+1) - \mu)$;
- (7) $v(t+1)s$ четно;
- (8) 3 делит $v(t+1)s(s-1)$ и $v(t+1)st(\alpha-1)$;
- (9) 8 делит $v(t+1)s(s-1)(s-2)$ и $v(t+1)s(t(\alpha-1)((t-1)(\alpha-1) - (\alpha-2)) + t(s+1-\alpha)(\mu-2\alpha+1))$.

1.5.2. Примеры истинных получастичных геометрий.

Тонкие частичные четырехугольники. Сильно регулярный граф Γ с $\lambda = 0$ является частичным четырехугольником с $s = 1$, $t = k - 1$, в частности, тонкой геометрией. Единственные известные примеры таких графов — это пятиугольник, граф Петерсена с параметрами $(10, 3, 0, 1)$, граф Клебша с параметрами $(16, 5, 0, 2)$, граф Хоффмана–Синглтона с параметрами $(50, 7, 0, 1)$ и семейство графов Хигмена–Симса: граф Гевиртца с параметрами $(56, 10, 0, 2)$, граф Хигмена–Симса с параметрами $(100, 22, 0, 6)$ и антиокрестность вершины в этом графе с параметрами $(77, 16, 0, 4)$. Любой из этих графов однозначно определяется своими параметрами.

Получастичные геометрии $\overline{M(k)}$, $k \in \{2, 3, 7, 57\}$. Графом Мура называется граф валентности k обхвата 5 с числом вершин $v = k^2 + 1$. Такой граф $M(k)$ является сильно регулярным с $\lambda = 0$, $\mu = 1$ и $k \in \{2, 3, 7, 57\}$. Примеры графов с $k = 2, 3, 7$ приведены в предыдущем абзаце, все они являются графами ранга 3. Существование $M(57)$ неизвестно (Ашбахер [1] доказал, что этот граф не является графом ранга 3, а Хигмен установил, что $M(57)$ не является вершинно транзитивным, см. Камерон [19]). Махнев и Падучих (Махнев [88]) выяснили строение группы автоморфизмов G графа Ашбахера $M(57)$, при условии, что G содержит инволюцию. Для подмножества X из G через $\text{Fix}(X)$ обозначим подграф, индуцированный множеством вершин графа, неподвижных относительно любого автоморфизма из X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Допустим, что группа автоморфизмов G графа Ашбахера $M(57)$ содержит инволюцию t . Тогда выполняются следующие утверждения:*

- (1) $\text{Fix}(t)$ является звездой, содержащей 56 вершин;
- (2) $G = Y \langle t \rangle \times X$ для некоторых подгрупп X , Y нечетного порядка, Y инвертируется t и либо $|Y|$ делит 5 или 57, либо $|Y|$ делит 21 (в случае $|Y| = 21$ имеем $|\text{Fix}(y)| = 37$ для элемента y порядка 7 из Y);
- (3) если $X \neq 1$, то $\text{Fix}(X)$ – либо звезда, $Y = 1$, $|X| = 7$; либо пятиугольник, $|Y|$ делит 5, $|X|$ делит 55; либо граф Петерсена, $|Y|$ делит 3, $|X|$ делит 27; либо граф ХOFFMана–Синглтона, $|Y|$ делит 5 или 7, $|X|$ делит 25.

С каждым графом Мура $\Gamma = M(k)$ соотносится другая частичная геометрия $\overline{M(k)}$, точками которой являются вершины графа Γ , прямыми – окрестности вершин в Γ , инцидентность естественная. Эта геометрия имеет параметры $s = t = \alpha = k - 1$, $\mu = (k - 1)^2$ (Дебре и Тас [40]).

Геометрии $U_{2,3}(n)$. Пусть U является n -элементным множеством, P – множество неупорядоченных пар из U , B – множество неупорядоченных троек из U , отношение инцидентности – включение. Тогда $U_{2,3}(n) = (P, B, I)$ является частичной геометрией с параметрами $s = \alpha = 2$, $t = n - 3$, $\mu = 4$ (Дебре и Тас [40]). Точечный граф этой геометрии – треугольный граф $T(n)$.

Получастичные геометрии $LP(n, q)$. Пусть P – множество прямых из $PG(n, q)$ ($n \geq 4$), B – множество плоскостей из $PG(n, q)$, I – отношение включения. Тогда (P, B, I) является частичной геометрией с параметрами $s = q(q + 1)$, $t = (q^{n-1} - 1)/(q - 1) - 1$, $\alpha = q + 1$, $\mu = (q + 1)^2$ (Дебре и Тас [40]). Заметим, что при $n = 3$ получается двойственная схема прямых и плоскостей из $PG(3, q)$.

Геометрии $\overline{W(2n + 1, q)}$. Пусть σ – симплектическая полярность $PG(2n + 1, q)$ ($n \geq 1$), P – множество точек $PG(2n + 1, q)$ ($n \geq 1$), B – множество не вполне изотропных (гиперболических) прямых $PG(2n + 1, q)$, I – отношение включения. Тогда (P, B, I) является частичной геометрией с параметрами $s = q$, $t = q^{2n} - 1$, $\alpha = q$, $\mu = q^{2n}(q - 1)$ (Дебре и Тас [40]).

Получастичные геометрии $NQ^\pm(2n - 1, 2)$. Пусть Q^ε является квадратиком в $PG(2n - 1, 2)$, $\varepsilon = \pm$, P – множество точек квадрики, B – множество прямых $PG(2n - 1, 2)$, не содержащихся в Q^ε , I – отношение включения.

Тогда $NQ^\varepsilon(2n-1, 2) = (P, B, I)$ является получастичной геометрией с параметрами $s = \alpha = 2$, $t = 2^{2n-3} - \varepsilon 2^{n-2} - 1$, $\mu = 2^{2n-3} - \varepsilon 2^{n-1}$ (Вильбринк, не опубликовано).

Геометрии $H_q^{(n+1)*}$. Пусть P – множество прямых из $\Sigma = PG(n+1, q)$ ($n \geq 4$), не пересекающих данное проективное подпространство $H = PG(n-1, q)$, B – множество плоскостей из Σ , пересекающих H по единственной точке, I – отношение включения. Тогда (P, B, I) является получастичной геометрией с параметрами $s = q^2 - 1$, $t = (q^{n-1} - 1)/(q - 1) - 1$, $\alpha = q$, $\mu = q(q + 1)$.

Известно, что по любой получастичной геометрии $\mathbf{S}$, удовлетворяющей аксиоме $(\mathcal{D})$, можно построить новую получастичную геометрию $\overline{\mathbf{S}}$, также удовлетворяющую аксиоме $(\mathcal{D})$ (Де Клерк и Тас [36] и Дебре [38]). В самом деле, пусть x, y – две коллинеарные точки, $D_{x,y}^1$ – множество всех коллинеарных с x, y точек, не лежащих на прямой xy , $D_{x,y}^2$ – множество всех точек прямой xy , коллинеарных с точкой (и, значит, со всеми точками) $D_{x,y}^1$. Тогда $D_{x,y} = D_{x,y}^1 \cup D_{x,y}^2$ является максимальным множеством попарно коллинеарных точек и называется диагональной кликой. Система инцидентности $\overline{\mathbf{S}}$ с тем же точечным множеством, что и $\mathbf{S}$, и с диагональными кликами в качестве прямых является получастичной геометрией с параметрами $\overline{s} = (t + 1)(\alpha - 1)$, $\overline{t} = s/(\alpha - 1) - 1$, $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\mu} = \mu$. Заметим, что $\overline{\mathbf{S}}$ имеет тот же точечный граф, что и $\mathbf{S}$, и что $\overline{\overline{\mathbf{S}}} = \mathbf{S}$.

Указанным способом можно построить $H_q^{(n+1)*}$ из геометрии, двойственной к $H_q^{(n+1)}$.

1.5.3. Линейные представления получастичных геометрий. Если $T_n^*(\mathcal{K})$ – линейное представление получастичной геометрии, то $\mathcal{K}$ является таким множеством из $PG(n, q)$, что любая прямая будет внешней, касательной или $(\alpha + 1)$ -секущей, причем каждая точка из $PG(n, q) - \mathcal{K}$ лежит на $\mu/(\alpha(\alpha + 1))$ секущих. Известны следующие примеры. Подмножество X из k точек проективного пространства $PG(n, q)$ называется k -чашкой, если любая прямая из $PG(n, q)$ пересекает X не более чем по двум точкам.

Линейные представления частичных четырехугольников. В этом случае $\mathcal{K}$ является $(t + 1)$ -чашкой из $PG(n, q)$ со свойством, что каждая точка из $PG(n, q) - \mathcal{K}$ лежит на $t + 1 - \mu$ касательных. Следующие утверждения дают классификацию линейных представлений истинных частичных четырехугольников. Утверждения 2–4 доказаны Калдебранком [16].

1. Частичный четырехугольник $T_3^*(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – овоид из $PG(3, q)$, имеет параметры $s = q - 1$, $t = q^2$, $\mu = q(q - 1)$ (впервые был построен Камероном [18]).

2. Если $q = 2$, то $\mathcal{O}$ – эллиптическая квадрика из $PG(3, 2)$, частичный четырехугольник $T_3^*(\mathcal{O})$ имеет параметры $s = 1$, $t = 4$, $\mu = 2$.

3. Пусть $q = 3$ и $\mathcal{K}$ – не овоид. Тогда $\mathcal{K}$ либо является 11-чашкой из $PG(4, 3)$ (см. Кокстер [25] или Пеллегрини [101]) и частичный четырехугольник $T_4^*(\mathcal{K})$ имеет параметры $s = 2$, $t = 10$, $\mu = 2$, либо $\mathcal{K}$ – единственная 56-чашка из $PG(5, 3)$ (см. Сегре [105]) и частичный четырехугольник $T_5^*(\mathcal{K})$ имеет параметры $s = 2$, $t = 55$, $\mu = 20$.

4. Пусть $q = 4$ и $\mathcal{K}$ – не овоид. Тогда $\mathcal{K}$ либо является 78-чашкой из $PG(5, 4)$ такой, что каждая внешняя точка лежит на 7 касательных (Хилл [60]), и частичный

четырёхугольник $T_5^*(\mathcal{K})$ имеет параметры $s = 3, t = 77, \mu = 14$, либо $\mathcal{K}$ — 430-чашка из $PG(6, 4)$ (существование такой чашки неизвестно) и частичный четырёхугольник $T_6^*(\mathcal{K})$ имеет параметры $s = 3, t = 429, \mu = 110$.

5. Если $q \geq 5$, то Панакис и Вольфскил [125] доказали, что частичный четырёхугольник совпадает с $T_3^*(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ — овоид.

Существование такой чашки $\mathcal{K}$ в $PG(n, q)$, что любая внешняя точка лежит на одном и том же числе касательных, обеспечивает построение линейного $[\mathcal{K}], n + 1]$ кода над $GF(q)$ с точно двумя ненулевыми весами (Калдебранк и Кантор [17]).

Линейные представления получастичных геометрий с $\alpha \geq 2$. Известны следующие примеры.

1. Множество $\mathcal{K}$ является унитарно $\mathcal{U}$ проективной плоскости $\Pi_\infty = PG(2, q^2)$, и $T_2^*(\mathcal{U})$ имеет параметры $s = q^2 - 1, t = q^3, \alpha = q$ и $\mu = q^2(q^2 - 1)$.

2. Множество $\mathcal{K}$ является бэровским подпространством $\mathcal{B}$ проективного пространства $\Pi_\infty = PG(n, q^2)$, и $T_n^*(\mathcal{B})$ имеет параметры $s = q^2 - 1, t = (q^n - 1)/(q - 1) - 1, \alpha = q$ и $\mu = q(q + 1)$ (эта геометрия изоморфна $H_q^{(n+2)*}$).

1.5.4. Получастичные геометрии и обобщенные четырёхугольники.

1. Для любой точки p обобщенного четырёхугольника $\mathbf{S} = (P, B, I)$ система инцидентности $\mathbf{S}^p = (P^p, B^p, I^p)$ с $P^p = P - p^\perp, B^p = B - B_p$ является $(0, 1)$ -геометрией порядка $(s - 1, t)$, удовлетворяющей следующему свойству.

(*) Если L, M — две непересекающиеся прямые из $\mathbf{S}^p$, то имеется точно 0, $s - 1$ или s прямых из $\mathbf{S}^p$, пересекающих L и M .

Заметим, что это свойство тривиально выполняется, если $s = 2$. Точечный граф $\Gamma(\mathbf{S}^p)$ будет сильно регулярным, если для любых двух неколлинеарных точек $x, y \in P^p$ подграф $\{p, x, y\}^\perp$ содержит точно $t + 1 - \mu$ вершин. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{S}$ порядка (s, s^2) , причем в этом случае $|\{p, x, y\}^\perp| = s + 1$ для любой тройки попарно неколлинеарных точек. Таким образом, частичный четырёхугольник $\mathbf{S}^p$ имеет параметры $(s - 1, s^2, s(s - 1))$.

Иванов и Шпекторов [68] доказали, что сильно регулярный граф с параметрами $(q^4, (q^2 + 1)(q - 1), q - 2, q(q - 1))$, в котором каждое ребро содержится в клике порядка q , является точечным графом частичного четырёхугольника типа $\mathbf{S}^p$ и однозначно расширяется до обобщенного четырёхугольника $\mathbf{S}$. Этот результат влечет, в частности, единственность сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$.

Напомним, что линейное представление частичного четырёхугольника с параметрами $(s - 1, s^2, s(s - 1))$ лежит в $AG(4, s)$, поэтому оно совпадает с $T_3^*(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ — овоид из Π_∞ .

ТЕОРЕМА 1.10 (Де Клерк и Ван Мальдегем [34]). Пусть $T_n^*(\mathcal{K})$ ($n \geq 3$) является линейным представлением $(0, 1)$ -геометрии порядка $(q - 1, t)$, $q > 2$, удовлетворяющим (*). Если $\mathcal{K}$ порождает гиперплоскость Π_∞ , то $T_n^*(\mathcal{K})$ является частичным четырёхугольником $T_3^*(\mathcal{O})$.

Очевидно, что $(0, 1)$ -геометрия порядка $(q - 1, t)$ типа $T_1^*(\mathcal{K})$ является частичным четырёхугольником порядка $(q - 1, 1)$. Далее, если $\mathbf{S}$ является $(0, 1)$ -геометрией порядка $(q - 1, t)$ типа $T_2^*(\mathcal{K})$, то $\mathcal{K}$ является дугой в Π_∞ и $T_2^*(\mathcal{K})$ удовлетворяет условию (*) тогда и только тогда, когда $|\mathcal{K}| = q + 1$ или $q + 2$.

2. Пусть $\bar{\mathbf{S}}$ – обобщенный четырехугольник, вложимый в проективное пространство $PG(n, q)$ (отсюда $\bar{\mathbf{S}}$ – классический). Выберем точку p , не лежащую в гиперплоскости Π из $PG(n, q)$. Пусть P_1 – проекция точечного множества $\bar{\mathbf{S}}$ на Π относительно p , и P_2 – множество точек из Π , лежащих на касательных к $\bar{\mathbf{S}}$, проходящих через p . Пусть $\mathbf{S}$ будет геометрией с точечным множеством $P = P_1 - P_2$, множеством прямых из Π , пересекающих P_2 по крайней мере по двум точкам, и инцидентностью как в проективном пространстве. Если исходный обобщенный четырехугольник является $Q^-(5, q)$ или $H_4(q^2)$, то получаются получаистичные геометрии. Если $p \in \bar{\mathbf{S}}$, то возникают $T_3^*(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – эллиптическая квадрика в $PG(3, q)$, в ортогональном случае; и $T_2^*(\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ является эрмитовой унитарью в $PG(2, q^2)$, – в унитарном. Если же $p \notin \bar{\mathbf{S}}$, то получаются новые геометрии с параметрами $s = q - 1, t = q^2, \alpha = 2, \mu = 2q(q - 1)$ в ортогональном случае, $s = q^2 - 1, t = q^3, \alpha = q + 1, \mu = q(q + 1)(q^2 - 1)$ – в унитарном (Тас, частное сообщение).

3. Имеется еще одна конструкция для получения частичных четырехугольников из обобщенных четырехугольников.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 (Махнев). Пусть Γ – псевдогеометрический граф для частичной геометрии $PG_\alpha(s, t)$, содержащий коклик $\mathcal{O}$, достигающую границу Хоффмана и границу Цветковича для коклик. Тогда $\alpha = 1, t = s^2 - s$ и $\Sigma = \Gamma - \mathcal{O}$ является сильно регулярным графом с параметрами $(s^2t + s, (s - 1)(t + 1), s - 2, (s - 1)^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $|\mathcal{O}| = 1 + st/\alpha = \frac{s(s - \alpha + 1)(st + \alpha)}{\alpha(s + t + 1 - \alpha)}$, поэтому $t = (s - 1)(s + 1 - \alpha)$. По теореме 0.2 граф Σ сильно регулярен. Если L является $(s + 1)$ -кликкой из Γ , то L пересекает овоид $\mathcal{O}$ в единственной точке x . Тогда любая точка из $\mathcal{O} - \{x\}$ смежна с α вершинами из L , поэтому любая пара вершин из $L - \mathcal{O}$ смежна с $1 + (\alpha - 1)(s + 1 - \alpha)$ точками из $\mathcal{O}$. Так как граф Σ сильно регулярен, то любое ребро из Σ смежно с $1 + (\alpha - 1)(s + 1 - \alpha)$ точками из $\mathcal{O}$. Отсюда получаются выражения для параметров $v = s(1 + st/\alpha), k = (s - 1)(t + 1), \lambda = (s - 2)(1 + (\alpha - 1)(s + 1 - \alpha))$. Из прямоугольного соотношения $k(k - \lambda - 1) = (v - k - 1)\mu$ получим выражение $\mu = s^2 - \alpha s - s + 2\alpha - 1$. Поэтому для любых несмежных вершин a, b из Σ подграф $[a] \cap [b]$ содержит $\alpha(t + 1) - \mu = s + (s - 1)(\alpha - 1)(s + 1 - \alpha) = s + (\alpha - 1)t$ вершин из $\mathcal{O}$.

Допустим, что $\alpha > 1$. Так как каждая вершина вне $\mathcal{O}$ смежна с $t + 1$ точками из $\mathcal{O}$, то $s + (\alpha - 1)t \leq t + 1$, поэтому $\alpha = 2, s = 1$ и $t = 0$, противоречие. Отсюда $\alpha = 1, \Gamma$ – псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(s, s^2 - s)$, граф Σ имеет параметры $(s^2t + s, (s - 1)(t + 1), s - 2, (s - 1)^2)$, собственные значения графа Σ равны $(s - 1)(t + 1), s - 1, -(s^2 - 2s + 2)$ и имеют кратности $1, (s - 1)(st + 1), st$ соответственно. Предложение доказано.

Таким образом, если $\mathcal{O}$ – овоид обобщенного четырехугольника $\mathbf{S} = (P, B, I)$ порядка $(s, s^2 - s)$, то геометрия $\mathbf{S}_{\mathcal{O}}$ с множеством точек $P - \mathcal{O}$ и множеством прямых $\{L - \mathcal{O} \mid L \in B\}$ является частичным четырехугольником с параметрами $(s - 1, s^2 - s, (s - 1)^2)$.

При $s = 2$ мы получим таким путем граф Петерсена из $GQ(2, 2)$. Если $s = 3$, то соответствующие сильно регулярные графы с параметрами $(76, 21, 2, 7)$ и $(57, 14, 1, 4)$ не существуют (Хэмерс [55] и независимо Махнев [84], анонсировано в [75]; Вилбьринк

и Броувер [127]). Для $s \geq 4$ вопрос о существовании как $GQ(s, s^2 - s)$, так и $PQ(s - 1, s^2 - s, (s - 1)^2)$ остается открытым. Однако имеет место

ТЕОРЕМА 1.11 (Махнев, не опубликовано). *Пусть псевдогеометрический граф для обобщенного четырехугольника $GQ(4, 12)$ содержит 49-кликку. Тогда Γ является точечным графом обобщенного четырехугольника.*

4. Построение получастичных геометрий с помощью подчетырёхугольников из обобщенных четырехугольников. Розеткой с базисной точкой x в обобщенном четырехугольнике $\mathcal{S}$ порядка (s, t) называется семейство овоидов $\mathcal{R}$, попарно пересекающихся в точке x , такое, что $\{O - \{x\} \mid O \in \mathcal{R}\}$ образует расщепление $P - x^\perp$.

Следующие результаты получены Брауном [6]. Пусть обобщенный четырехугольник $\mathcal{S} = (P, B)$ порядка (r, r^2) содержит подчетырёхугольник $\mathcal{S}' = (P', B')$ порядка (r, r) и $a \in P - P'$. Тогда множество точек из P' , коллинеарных a , образует овоид $\mathcal{S}'$, называемый овоидом O_a , стянутым точкой a , или просто стянутым. Далее, каждая прямая из B либо принадлежит B' , либо является касательной к P' . Для данной касательной прямой l множество овоидов, стянутых точками из $l - P'$, образует розетку $\mathcal{S}'$, называемую розеткой, стянутой прямой l , или просто стянутой.

Оказывается, что каждый стянутый овоид стянут не более чем двумя точками. Если овоид O стянут двумя точками x, x' , то определяется размер пересечения O со стянутыми оводами: $|O \cap O_y|$ равен 1, если y коллинеарна x или x' , равен $r + 1$ в противном случае.

Овоид, стянутый двумя точками, назовем дважды стянутым. Если каждый стянутый овоид из $\mathcal{S}'$ дважды стянут, то $\text{Aut}(\mathcal{S})$ содержит инволюцию, фиксирующую $\mathcal{S}'$ поточечно, и обратно. Далее, в этом случае для любого флага (x, O_a) имеется единственная розетка, содержащая O_a , с базисной точкой x .

ТЕОРЕМА 1.12 (Браун [6]). *Пусть обобщенный четырехугольник $\mathcal{S}$ порядка (r, r^2) содержит подчетырёхугольник $\mathcal{S}'$ порядка (r, r) такой, что каждый стянутый овоид из $\mathcal{S}'$ дважды стянут. Тогда система инцидентности $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$, точками которой являются стянутые овиды из $\mathcal{S}'$, а прямыми – стянутые розетки, является получастичной геометрией с параметрами $s = r - 1$, $t = r^2$, $\alpha = 2$, $\mu = 2r(r - 1)$.*

Пусть обобщенные четырехугольники $\mathcal{S}$ и $\mathcal{W}$ порядка (r, r^2) содержат подчетырёхугольники $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{W}'$ порядка (r, r) такие, что каждый стянутый овоид из $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{W}'$ дважды стянут. Геометрии $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ и $\mathcal{I}_{\mathcal{W}}$ изоморфны тогда и только тогда, когда обобщенный четырехугольник $\mathcal{S}'$ изоморфен $\mathcal{W}'$.

В заключительном разделе доказано, что частичная геометрия, построенная по подчетырёхугольнику порядка q из обобщенного четырехугольника порядка (q, q^2) , двойственного к обобщенному четырехугольнику Кантора, не изоморфна известным ранее геометриям.

1.5.5. Получастичные геометрии и SPG полуквадрики. Тасом [116] предложен новый метод для построения получастичных геометрий. SPG полуквадрикой называется множество R из m -мерных подпространств $PG^1(m, q), \dots, PG^r(m, q)$ ($r > 1$) проективного пространства $PG(n, q)$, удовлетворяющее условиям:

- (1) пересечение двух различных подпространств $PG^i(m, q) \cap PG^j(m, q)$ пусто;

- (2) если подпространство $PG(m+1, q)$ содержит $PG^i(m, q)$, то оно имеет общую точку с 0 или α элементами из $R - \{PG^i(m, q)\}$, подпространство $PG(m+1, q)$, содержащее $PG^i(m, q)$ и не пересекающее элементы из $R - \{PG^i(m, q)\}$, называется касательным к R в точке $PG^i(m, q)$;
- (3) если точка x из $PG(n, q)$ не содержится ни в одном элементе из R , то она содержится в θ касательных к R подпространствах, $\theta \geq 0$.

Рассмотрев $(m+1)$ -мерные подпространства, содержащие $PG^i(m, q)$, получим, что $\alpha(q-1)$ делит $(r-1)(q^{m+1}-1)$, а число касательных к R подпространств в точке $PG^i(m, q)$ равно

$$\frac{q^{n-m}-1}{q-1} - \frac{(r-1)(q^{m+1}-1)}{\alpha(q-1)}.$$

Сосчитав число флагов (M, x) , где M — касательное к R подпространство, а точка x из M не содержится ни в одном элементе из R , получим

$$\theta = \frac{rq^{m+1}(\alpha(q^{n-m}-1) - (r-1)(q^{m+1}-1))}{\alpha((q^{n+1}-1) - r(q^{m+1}-1))}.$$

Заметим, что $n \geq 2m+1$. В случае равенства касательных подпространств нет и $\alpha = r-1$. Если $n = 2m+2$, то любые два подпространства, касающиеся R в различных точках, пересекаются.

Для данной SPG полуквадрики R можно построить получающую геометрию $\mathbf{S}(R)$ следующим образом. Вложим $PG(n, q)$ в $PG(n+1, q)$, и пусть множество точек равно $PG(n+1, q) - PG(n, q)$, множество прямых состоит из $(m+1)$ -мерных подпространств, содержащих элемент из R , но не лежащих в $PG(n, q)$. Тогда $\mathbf{S}(R)$ является получающей геометрией с параметрами $s = q^{m+1}-1$, $t = r-1$, $\alpha = \alpha$, $\mu = (r-\theta)\alpha$.

Эта геометрия будет частичной, только если $\theta = 0$. В этом случае $\mathbf{S}(R)$ будет сетью порядка $s+1 = q^{m+1}$ и степени $t+1 = r$.

Полярные пространства и SPG полуквадрики. Спред R невырожденной эллиптической квадрики $Q^-(2m+3, q)$ ($m \geq 0$) содержит $q^{m+2}+1$ элементов (размерности m) и является SPG полуквадрикой. Соответствующая получающая геометрия имеет параметры $s = q^{m+1}-1$, $t = q^{m+2}$, $\alpha = q^m$, $\mu = q^{m+1}(q^{m+1}-1)$. При $m = 0$ получается частичный четырехугольник $T_3^*(\emptyset)$. Если $m = 1$ и спред R для $Q^-(5, q)$ регулярен, то получается получающая геометрия $T_2^*(\mathcal{U})$. Если же спред не регулярен, то получается получающая геометрия, не изоморфная $T_2^*(\mathcal{U})$. Пусть $m > 1$. Если q четно, то квадрика $Q^-(2m+3, q)$ имеет спред. Если же q нечетно, то существование спреда $Q^-(2m+3, q)$ неизвестно.

Если невырожденная квадрика $Q(2m+2, q)$ ($m \geq 0$) имеет спред, то он не является SPG полуквадрикой.

Если R — спред невырожденной гиперболической квадрики $Q^+(2m+1, q)$ ($m \geq 1$), то необходимо R является SPG полуквадрикой, но соответствующая получающая геометрия является сетью.

Если невырожденное эрмитово многообразие $H(n, q^2)$ в $PG(n, q^2)$ имеет спред R , то n четно. В этом случае R содержит $q^{n+1}+1$ элементов (размерности $m = n/2-1$) и является SPG полуквадрикой. Соответствующая получающая геометрия имеет

параметры $s = q^n - 1$, $t = q^{n+1}$, $\alpha = q^{n-1}$, $\mu = q^n(q^n - 1)$. Однако если $n = 2$, то эта геометрия совпадает с $T_2^*(\mathcal{U})$. Если же $n > 2$, то существование спреда не известно.

**1.5.6. Характеризационные теоремы для получастичных геометрий.
Характеризации по параметрам.**

ТЕОРЕМА 1.13 (Дебре и Тас [40]). *Если $\mathbf{S}$ – истинная получастичная геометрия с $\alpha = t$, то $\mathbf{S} = \overline{M(t+1)}$ и $s = t$, $\mu = \alpha^2$ и $t \in \{1, 2, 6, 56\}$.*

ТЕОРЕМА 1.14 (Дебре [38], Вильбринк и Броувер [128]). *Пусть $\mathbf{S}$ – истинная получастичная геометрия с $\mu = \alpha^2$.*

- (1) *Если $\alpha = 2$, то $\mathbf{S} \simeq U_{2,3}(n)$.*
- (2) *Если $2 < \alpha = s$, то $\alpha = t$ и $\mathbf{S} \simeq \overline{M(t+1)}$.*
- (3) *Если $2 < \alpha < s$, то $\mathbf{S} \simeq LP(n, q)$.*

ТЕОРЕМА 1.15 (Дебре [38]). *Если $\mathbf{S}$ – истинная получастичная геометрия с $\mu = \alpha(\alpha + 1)$, удовлетворяющая аксиоме $(\mathcal{D})$, то $\mathbf{S} \simeq H_q^{(n+1)*}$.*

Вложения в проективные и аффинные пространства.

ТЕОРЕМА 1.16. *Если $\mathbf{S}$ – истинная получастичная геометрия с параметрами s, t, α, μ , вложенная в $PG(n, s)$ ($s > 2$), но не вложимая в $PG(m, s)$ для $m < n$, то n нечетно и $\mathbf{S} \simeq \overline{W(n, s)}$.*

Эта теорема получена Дебре и Тасом [41] для $n = 3$ и Тасом и др. [118] для $n > 3$. Если $\mathbf{S}$ – получастичная геометрия с $s = \alpha = 2$, то $\mathbf{S}$ является котреугольным пространством, и все такие пространства классифицированы (см. теорему 1.19).

ТЕОРЕМА 1.17. *Если $\mathbf{S}^D$ – двойственная получастичная геометрия с $\alpha > 1$, вложенная в $PG(n, s)$ ($n \geq 3$), но не вложимая в $PG(m, s)$ для $m < n$, то $n = 3$ и $\mathbf{S}^D$ совпадает либо со схемой точек и прямых $PG(3, q)$, либо с H_s^3 , либо с $NQ^-(3, 2)$.*

Пусть $\mathcal{H}$ – невырожденное эрмитово многообразие из $PG(3, q^2)$. Система инцидентности с точечным множеством $\mathcal{H}$ и множеством прямых, не пересекающих фиксированную прямую L , является двойственным частичным четырехугольником, вложенным в $PG(3, q^2)$. Неизвестно, имеются ли другие двойственные истинные частичные четырехугольники, вложимые в проективное пространство.

Вложение истинных получастичных геометрий в аффинное пространство полностью исследовано только для $n \leq 3$.

ТЕОРЕМА 1.18 (Дебре и Тас [39]). *Истинная получастичная геометрия $\mathbf{S}$ не вкладывается в аффинную плоскость $AG(2, s+1)$. Если $\mathbf{S}$ вкладывается в $AG(3, s+1)$, то либо $\mathbf{S}$ – пятиугольник, вложенный в $AG(3, 2)$, либо представление линейно и $\mathbf{S} = T_2^*(\mathcal{U})$ или $T_2^*(\mathcal{B})$.*

Кополярные пространства. *Кополярным пространством* (Холл [56]) называется такое частичное пространство прямых, что для каждого антифлага (x, L) параметр $\alpha(x, L)$ равен 0 или $|L| - 1$. Кополярное пространство называется *неразложимым*, если оно не является объединением двух или более кополярных пространств

на непересекающихся точечных подмножествах. *Редуцированным* кополярным пространством назовем неразложимое кополярное пространство с редуцированным точечным графом. Заметим, что получающаяся геометрия с параметрами $s, t, \alpha = s$ является кополярным пространством порядка (s, t) . В частности, двойственные сети являются кополярными пространствами. Далее мы будем допускать, что существует хотя бы один антифлаг (x, L) с $\alpha(x, L) = 0$. Холл [56] классифицировал конечные редуцированные кополярные пространства порядка (s, t) с $s \geq 2$. Оказалось, что они являются истинными получающимися геометриями.

ТЕОРЕМА 1.19 (Холл [56]). Пусть S – конечное редуцированное кополярное пространство порядка (s, t) с $s \geq 2$. Тогда S изоморфно одной из следующих получающихся геометрий:

- (1) $\overline{M(k)}, k \in \{2, 3, 7, 57\}$;
- (2) $\overline{U_{2,3}(n)}$;
- (3) $\overline{W(2n+1, q)}$;
- (4) $NQ^\pm(2n-1, 2)$.

Кополлярные пространства порядка $(2, t)$ (*котреугольные пространства*) были классифицированы Шультом [109], ранняя версия этого результата получена Зейделем [107].

§ 2. Диаграммные геометрии

2.1. Определения.

2.1.1. Геометрии над множествами. Следующие определения предложил Титс [122]. Пусть I – конечное множество. *Предгеометрия над I* – это тройка $\Gamma = (X, *, t)$, где X – множество объектов, t – типовая функция, отображающая X в I (сопоставляющая объекту из X его тип), и $*$ – рефлексивное симметричное отношение инцидентности на X^2 , причем объекты a, b одного типа инцидентны, только если $a = b$. Другими словами, $(X, *)$ – многодольный граф с долями $t^{-1}(i), i \in I$. *Флаг предгеометрии* – это набор попарно инцидентных элементов. Если T – флаг, то ограничение t на T – инъективное отображение T в I и $t(T)$ называется *типом флага T* , $I - t(T)$ называется *котином флага T* . Ранг и коранг флага T – это $|T|$ и $|I - t(T)|$ соответственно. *Камерой* называется флаг типа I . Две камеры называются *i -смежными*, $i \in I$, если их элементы типов, отличных от i , совпадают. Предгеометрия Γ называется *геометрией (I -геометрией)*, если t сюръективно, а каждый максимальный (по включению) флаг является камерой. Геометрия называется *прочной (firm)* (соответственно *толстой, тонкой*), если каждый флаг коранга 1 содержится по крайней мере в двух (по крайней мере в трех, точно в двух) камерах.

Вычет Γ_F флага F предгеометрии Γ – это множество объектов $X_F = \{u \in X - F \mid u * f \text{ для всех } f \in F\}$, рассмотренное как предгеометрия над $I - t(F)$. Каждый вычет геометрии сам является геометрией. Свойство предгеометрии Γ называется *наследственным*, если оно выполняется во всех ее вычетах. Свойство предгеометрии Γ называется *локальным*, если оно выполняется во всех ее вычетах ранга 2.

Предгеометрия $\Gamma = (X, *, t)$ *связна*, если граф $(X, *)$ не пуст и связан. Предгеометрия Γ *вычетно связна*, если для любого подмножества $J \subseteq I$ мощности по крайней мере 2 и каждого флага F типа $I - J$ граф $(X_F, *_F)$ связан.

2.1.2. Морфизмы, накрытия и частные. Пусть $\Gamma = (X, t, *)$ – предгеометрия над I , $\Gamma' = (X', t', *)$ – предгеометрия над I' . Морфизм из Γ в Γ' – это отображение $\alpha: X \rightarrow X'$ такое, что $x * y$ влечет $\alpha(x) *' \alpha(y)$, и $t(x) = t(y)$ тогда и только тогда, когда $t'(\alpha(x)) = t'(\alpha(y))$. Образ флага под действием морфизма является флагом. Если $I = I'$, то морфизм α из Γ в Γ' с условием $t(x) = t(\alpha(x))$ называется *гомоморфизмом*. Биактивный морфизм α такой, что α^{-1} – морфизм, называется *корреляцией*. Если α – гомоморфизм и корреляция, то α называется *изоморфизмом*.

Группа G автоморфизмов геометрии Γ называется *флаг-транзитивной*, если она транзитивна на флагах типа J для любого $J \subseteq I$. Геометрия Γ называется *расширением* геометрии Γ' , если она содержит флаг, чей вычет изоморфен Γ' .

Предгеометрия $\bar{\Gamma}$ называется *накрытием* предгеометрии Γ , если существует эпиморфизм α такой, что для любого элемента x геометрии $\bar{\Gamma}$ ограничение α на вычет $\bar{\Gamma}_x$ является изоморфизмом на Γ_x . Геометрия Γ *просто связна* (вычетно просто связна), если каждое связанное накрытие $\bar{\Gamma}$ изоморфно Γ (любой вычет флага, имеющий ранг не меньше 3, просто связан).

Геометрия $\bar{\Gamma}$ называется *m -накрытием* геометрии Γ , если существует эпиморфизм α такой, что ограничение α на любой вычет ранга m геометрии $\bar{\Gamma}$ является изоморфизмом. В этом случае геометрия Γ называется *m -частным* геометрии $\bar{\Gamma}$.

Универсальным m -накрытием геометрии Γ называется такое m -накрытие $\tilde{\Gamma}$ с эпиморфизмом $\tilde{\alpha}$, что для любого m -накрытия $\bar{\Gamma}$ с эпиморфизмом $\bar{\alpha}$ геометрия $\tilde{\Gamma}$ является m -накрытием $\bar{\Gamma}$ с эпиморфизмом β таким, что $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}\beta$.

Каждая геометрия ранга n имеет универсальное $(n - 1)$ -накрытие.

Пусть A – группа автоморфизмов предгеометрии $\Gamma = (X, *, t)$ над I . Определим *частное* Γ/A как предгеометрию $(X/A, */A, t/A)$ над I , где X/A – множество орбит A на X , две такие орбиты Ax , Ay инцидентны (относительно $*/A$), если $x * y$ в Γ , и t/A отображает каждую орбиту на тип ее элемента. Отображение $\pi: x \mapsto Ax$ является эпиморфизмом Γ на Γ/A , называемым *канонической проекцией*. Следующие свойства важны для теории, развитой Титсом [124].

- (Q1) Для каждого флага F и его стабилизатора A_F в A каноническая проекция π индуцирует изоморфизм $(\Gamma/F)/A_F$ на $(\Gamma/A)/\pi(F)$.
- (Q2') Элементы из орбиты A на X , инцидентные данному флагу F , образуют орбиту под действием стабилизатора A_F .
- (Q2'') Если x, y – инцидентные элементы из Γ и флаг F инцидентен некоторому элементу из Ax и некоторому элементу из Ay , то существует $a \in A$ такой, что F инцидентен ax и ay .
- (Q3) В графе $(X, *)$ расстояние между двумя различными элементами, принадлежащими общей орбите под действием A , не меньше 4.

Если I конечно, то (Q1) эквивалентно объединению (Q2') и (Q2''). Далее, условие (Q3) влечет (Q2') и (Q2'').

Если α – морфизм Γ в геометрию Γ' , то $\alpha(\Gamma)$ может не быть геометрией над множеством типов элементов в $\alpha(\Gamma)$. Мы избегаем этой ситуации следующим образом. Морфизм α называется *поднимаемым*, если для любого флага F геометрии Γ и любого флага Y геометрии Γ' , содержащего $\alpha(F)$, найдется флаг F' в Γ , содержащий F , с $\alpha(F') = Y$ (флаги поднимаемы). В этом случае $\alpha(\Gamma) = (\alpha(X), \alpha(*), \alpha(t))$ – геометрия над $\alpha(I)$, в которой для $x, y \in X$, $i \in I$ из $t(x) = i$ следует $\alpha(i) = t'(\alpha(x))$, а из

$x * y$ следует $\alpha(x)\alpha(*)\alpha(y)$ и т. д. Мы назовем геометрию $\alpha(\Gamma)$ *образом геометрии* Γ . Если F – флаг Γ , то ограничение α на вычет Γ_F поднимается на $\alpha(\Gamma)_{\alpha(F)}$.

Вложением I -геометрии Γ в I' -геометрию Γ' называется корреляция Γ на подгеометрию из Γ' .

Пусть α – корреляция I -геометрии Γ на Γ . Тогда α индуцирует подстановку α_I на I . Очевидно, что α_I – тождественная подстановка тогда и только тогда, когда α – автоморфизм. Если α_I порядка 2, то α называется *двойственностью*, двойственность порядка 2 называется *полярностью*. Если α и α_I порядка 3, то α называется *тройственностью* (triality). Пусть A – группа, порожденная α . Подгеометрия из Γ/A , индуцированная орбитами группы A , являющимися флагами из Γ , называется *геометрией абсолютных элементов* α .

Примеры. (1) Геометрии абсолютных элементов полярности конечномерного линейного пространства дают нам все квадрики (в характеристике $\neq 2$), симплектические и унитарные пространства. Каждый абсолютный элемент является здесь вполне сингулярным подпространством, и обратно.

(2) Геометрии абсолютных элементов полярностей и тройственностей конечных классических билдингов сами являются билдингами, на которых действуют централизаторы корреляций. Все скрученные группы Шевалле получаются таким образом.

2.1.3. Геометрии смежных классов. Пусть $\Gamma = (X, t, *)$ – геометрия над I , G – группа автоморфизмов Γ , действующая транзитивно на множестве камер (G флаг-транзитивна). Стабилизатор G_F флага F называется *параболической подгруппой*, стабилизатор камеры называется *борелевской подгруппой*.

Фиксируем камеру $C = \{x_i \mid t(x) = i\}$ и положим $P_i = G_{x_i}$. Для любого элемента y_i типа i найдется $g \in G$ такой, что $g(x_i) = y_i$, и мы можем идентифицировать y_i со смежным классом gP_i . Если y_i идентифицирован с gP_i и z_j с hP_j , то $y_i * z_j$ тогда и только тогда, когда пересечение $gP_i \cap hP_j$ не пусто. Далее, элемент $a \in G$ переводит gP_i в agP_i . Отсюда геометрия Γ однозначно восстанавливается по группе G и набору $\{P_i \mid i \in I\}$ ее подгрупп.

Обратно, для группы G и набора $\{G_i \mid i \in I\}$ ее подгрупп можно определить предгеометрию $\Gamma = \Gamma(G, (G_i)_{i \in I})$ над I . Элементы типа i – это левые смежные классы gG_i . Элементы разных типов gG_i, hG_j инцидентны тогда и только тогда, когда пересечение $gG_i \cap hG_j$ не пусто. Далее, группа G , действующая левыми сдвигами, вкладывается в группу автоморфизмов Γ . На множестве флагов ранга 2 данного типа G действует транзитивно.

- (1) Действие G флаг-транзитивно тогда и только тогда, когда любое семейство смежных классов $(x_i G_i)_{i \in I}$, имеющее непустые попарные пересечения, имеет некоторый общий элемент.

Если $I = \{1, 2, 3\}$, то (1) эквивалентно любому из утверждений

- (2) $(G_1 G_2) \cap (G_1 G_3) = G_1 (G_2 \cap G_3)$;
(3) $(G_1 \cap G_2)(G_1 \cap G_3) = G_1 \cap (G_2 G_3)$ (Титс [124]).

В общем случае $I = \{1, \dots, n\}$ для непустого подмножества J из I через $t(J)$ обозначим наименьший элемент из J . Сейчас (1) эквивалентно утверждению

(4) для любого $J \subseteq I$ с $|J| \geq 3$ верно равенство

$$\bigcap_{j \in J-m(J)} G_{m(J)} G_j = G_{m(J)} \bigcap_{j \in J-m(J)} G_j$$

(Бюкенхаут и Герман, не опубликовано).

Предгеометрия Γ связна, если подгруппы $(G_i)_{i \in I}$ порождают G . В случае флага-транзитивности геометрия Γ является прочной тогда и только тогда, когда для любого $i \in I$

$$\bigcap_{j \in J-i} G_j \not\subseteq G_i.$$

Пусть J – множество индексов и $(I_j)_{j \in J}$ – семейство множеств. Для каждого $j \in J$ пусть $\Gamma_j = (X_j, *_j, t_j)$ является I_j -геометрией. Допустим, что множества X_j , $j \in J$, попарно не пересекаются, так же как и I_j , $j \in J$. *Прямой суммой геометрий* Γ_j называется I -геометрия $\Gamma = (X, *, t)$, где $I = \bigcup I_j$, $X = \bigcup X_j$, ограничение $*$ (t) на X_j совпадает с $*_j$ (t_j) и $x * y$ для x и y , принадлежащих различным X_j , X_k .

2.2. Диаграммы. Геометрии ранга 2 являются строительными блоками для геометрий больших рангов. Если Γ – геометрия над I , то мы можем сопоставить ей семейство вычетов Γ_{ij} ранга 2, построенных по флагам типа $I - \{i, j\}$. Обратно, можно пытаться описать геометрии, для которых вычеты ранга 2 принадлежат некоторому классу геометрий ранга 2. Эта идея была развита в контексте билдингов Титсом [120], [121], а в общем случае Бюкенхаутом [7].

Геометрия над $I = \{0, 1\}$ называется *обобщенным 2-угольником*, если каждый элемент типа 0 инцидентен любому элементу типа 1.

Пусть Γ – геометрия над I . Различные элементы $i, j \in I$ назовем *смежными*, если хотя бы один вычет типа $\{i, j\}$ не является обобщенным 2-угольником.

Базисной диаграммой $BD(\Gamma)$ называется граф с множеством вершин I и множеством ребер, состоящим из неупорядоченных пар смежных вершин (Бюкенхаут [8]). Геометрия Γ над I называется *чистой* (Пазини [98]), если для любых смежных $i, j \in I$ ни один вычет типа $\{i, j\}$ не является обобщенным 2-угольником. В этом случае для любого флага F вычет Γ_F является чистой геометрией, и базисная диаграмма $BD(\Gamma_F)$ является индуцированным подграфом из $BD(\Gamma)$, чьи вершины – это типы элементов из Γ_F .

Следующая теорема о разложении геометрий с несвязными базисными диаграммами в прямую сумму геометрий, отвечающих связным компонентам, имеет фундаментальное значение для теории диаграмм.

ТЕОРЕМА 2.1 (Бюкенхаут [7]). *Пусть Γ является вычетно-связной I -геометрией конечного ранга. Если элементы $i, j \in I$ лежат в разных компонентах связности базисной диаграммы $BD(\Gamma)$, то каждый элемент типа i инцидентен любому элементу типа j .*

Пусть I – множество. *Диаграмма на I* – это пара (I, f) , где f – функция, сопоставляющая любой паре (i, j) элементов из I класс $f(i, j)$ геометрий ранга 2 над $\{i, j\}$. Здесь $f(j, i)$ состоит из геометрий, двойственных геометриям из $f(i, j)$.

2.3. Некоторые диаграммные геометрии ранга 2. I -геометрия Γ принадлежит диаграмме (I, f) , если для любых $i, j \in I$ и каждого флага F типа $I - \{i, j\}$ вычет Γ_F принадлежит $f(i, j)$.

Пусть Γ является прочной вычетно-связной геометрией над $I = \{0, 1\}$. Вместо d_p и d_l (см. введение) мы будем использовать обозначения d_0 и d_1 и назовем эти параметры 0- и 1-диаметром соответственно. Для натуральных чисел (или бесконечных) g, d_0, d_1 с $2 \leq g \leq \min\{d_0, d_1\}$ мы назовем (g, d_0, d_1) -угольником прочную вычетно-связную $\{0, 1\}$ -геометрию угольности g с 0- и 1-диаметрами d_0 и d_1 (Бюкенхут [9]). Картинка на рис. 1 представляет класс всех (g, d_0, d_1) -угольников.

Рис. 1. (g, d_0, d_1) -угольник

Важный частный случай возникает, когда $g = d_0 = d_1$. В этом случае геометрия называется обобщенным g -угольником (Титс [122]) и класс таких геометрий представлен на рис. 2.

Рис. 2. Обобщенный g -угольник

Если g равно 3, 4 или 6, то мы будем использовать соответствующие картинки с рис. 3.

Рис. 3. Обобщенные g -угольники для $g = 3, 4$ и 6

Диаграмма (I, f) называется специальной, если для любых двух элементов $i, j \in I$ найдутся $g_{ij}, d_{ij}, d_{ji} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ такие, что $f(i, j)$ является (g_{ij}, d_{ij}, d_{ji}) -угольником. Заметим, что $g_{ij} = g_{ji}$. Специальная диаграмма (I, f) называется диаграммой Кокстера, если для любых двух элементов $i, j \in I$ верны равенства $g_{ij} = d_{ij} = d_{ji}$.

Рис. 4. Пространства прямых, аффинные плоскости и циклы

Мы используем следующие соглашения. Первая картинка на рис. 4 соответствует классу всех пространств прямых, т.е. прочных, связных $\{0, 1\}$ -геометрий угольности 3, в которых любые два 0-элемента инцидентны единственному 1-элементу. Вторая картинка означает класс аффинных плоскостей, т.е. таких пространств прямых, что для любого 1-элемента x и 0-элемента y , находящегося на расстоянии 3 от x , найдется

единственный инцидентный y элемент z , находящийся на расстоянии 4 от x . Наконец, третья картинка на рис. 4 означает класс циклов (полных графов), т.е. таких пространств прямых, что любой 1-элемент инцидентен точно двум 0-элементам.

Граф Петерсена (вершины и ребра являются 0-элементами и 1-элементами соответственно) соответствует картинке с рис. 5.

Рис. 5. Граф Петерсена

При описании конечной геометрии Γ , отвечающей диаграмме (I, f) , может быть полезной дополнительная информация на картинке. В частности, если для данного $i \in I$ и для любого флага F кotypа i вычет Γ_F имеет точно $q_i + 1$ элементов независимо от F , то мы скажем, что i -порядок Γ равен q_i . На картинке под вершиной с номером i мы поставим параметр q_i . Например, рис. 6 означает цикл на $n + 2$ точках.

Рис. 6. Цикл на $n + 2$ точках

Число, стоящее под порядком, будет означать число элементов соответствующего типа. Например, на рис. 7 помещены диаграммы, содержащие соответственно тройное накрытие обобщенного четырехугольника $GQ(2, 2)$, имеющего 45 точек, 45 прямых и группу автоморфизмов $3.\text{Sym}(6)$; $(6, 5, 6)$ -угольник, допускающий действие группы Матье M_{12} ; и $(8, 6, 8)$ -угольник, имеющий 315 точек, 525 прямых и допускающий действие группы J_2 .

Рис. 7. Диаграммы (g, d_0, d_1) -угольников, допускающих действие $3.\text{Sym}(6)$, M_{12} и J_2

Тройное накрытие $GQ(2, 2)$ мы будем изображать более простой картинкой (см. рис. 8).

Рис. 8. Тройное накрытие $GQ(2, 2)$

2.4. Общие результаты о диаграммных геометриях. Диаграмма, являющаяся цепью, называется *линейной*. В работах Данцера, Шульте [27] и Шульте [104] изучались комплексы инцидентности размерности d . Такой комплекс является прочной вычетно-связной I -геометрией ранга d , имеющей i -порядок для всех $i \in I$ и линейную базисную диаграмму. Комплекс называется регулярным, если он имеет флаг-транзитивную группу автоморфизмов.

ПРОБЛЕМА 5. Для любого ли регулярного комплекса Γ инцидентности ранга d существует регулярный комплекс инцидентности ранга $d+1$, в котором вычет некоторого элемента изоморфен Γ ?

Прочная вычетно-связная I -геометрия ранга n ($n \geq 3$) с линейной диаграммой, имеющая в качестве вычетов ранга 2 пространства прямых, является пространством размерности n (см. Деландшир [42]). Случай, когда правый концевой вычет является частичным пространством прямых, рассмотрен Дезой и Лорентом [48].

О результатах, связанных с билдингами, см. Шарлау [103]. Обобщения билдингов, связанные с понятием предапартамента, рассмотрены Бюкенхаутом [11].

2.5. Флаг-транзитивные диаграммные геометрии ранга 2. В пионерской работе Бюкенхаута [7] найдены флаг-транзитивные представления для 17 спорадических групп, действующих на геометриях, имеющие линейные диаграммы, в которых вычеты ранга 2 являются обобщенными многоугольниками или циклами.

Для диаграммы $\Delta = (A, f)$ чертой Кокстера назовем пару вершин $\{i, j\}$ такую, что $g_{ij} = d_{ij} = d_{ji}$. Сингулярной чертой назовем пару вершин $\{i, j\}$, не являющуюся чертой Кокстера. Диаграмму $\Delta = (A, f)$ назовем *диаграммой Кокстера*, если каждая ее черта является чертой Кокстера.

В этом разделе мы будем предполагать, что геометрия Γ принадлежит диаграмме Δ и G – флаг-транзитивная группа автоморфизмов Γ . Через s_i обозначим i -порядок, а через N_i – число элементов типа i геометрии Γ .

2.5.1. Геометрии ранга 2 с малым дефектом. Пусть $I = \{0, 1\}$. Определим i -дефект δ_i как разность $d_i - g$. Тогда $\delta = (\delta_0, \delta_1)$ называется *дефектом* Δ . Особый интерес представляют диаграммы с небольшим дефектом (например, $\delta_i \leq 1$ для $i = 0, 1$).

Если $\delta = (0, 0)$ (диаграмма Кокстера), то по теореме Фейта–Хигмена [50] $g = 3, 4, 6$ или 8 .

Если $\delta = (0, 1)$, то по теореме 30 из [35] $g = 3$ или 5 . Для $g = 3$ мы получим частичную геометрию $pG_{s_0+1}(s_0, s_1)$. В случае $g = 5$ Γ является графом Мура и $s_1 = 2, 6$ или 56 .

ПРОБЛЕМА 6. Можно ли получить обобщенную теорему Фейта–Хигмена для $\delta = (1, 1)$ или даже для любого δ ?

Следующие свойства могут быть использованы как дополнительные аксиомы.

- (LL) Любые две точки (прямые) инцидентны не более чем с одной прямой (точкой).
- (MF) Нет двух различных точек (прямых), имеющих одинаковые вычеты.

Заметим, что (LL) влечет (MF). Если $s_0 = 1$ или $s_1 = 1$, то эти свойства эквивалентны.

Пару (Γ, G) назовем *точечно геодезически транзитивной*, если G действует транзитивно на максимальных геодезических путях в графе инцидентности, начальные и конечные вершины которых являются точками. Аналогично определяется *линейно геодезически транзитивная пара*.

Пусть $d_p \leq d_l$. Тогда *точечно геодезически транзитивная пара* называется *слабо геодезически транзитивной*, а *линейно геодезически транзитивная пара* – *геодезически транзитивной*.

ТЕОРЕМА 2.2 (Бюкенхаут, Ван Мальдегем [14]). Пусть (Γ, G) является геодезически транзитивной (g, d_p, d_l) -парой, $2 \leq g \leq d_p \leq d_l \leq g+1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений.

- (1) Γ является обобщенным многоугольником, отвечающим группе Шевалле $X_n(q)$, $X_n(q) \leq G \leq \text{Aut } X_n(q)$ и $X_n(q) = PSL(3, q)$, $PSp(4, q)$, $P\Omega(5, q)$, $P\Omega^-(6, q)$, $PSU(4, q)$, $P\Omega^+(4, q)$ (с обобщенным четырехугольником $GQ(q, 1)$), $PSU(5, q)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2F_4(q)$.
- (2) Γ является геометрией вершин и ребер графа Петерсена или графа Хоффмана–Синглтона (т.е. $(5, 5, 6)$ -угольником порядка $(1, 2)$ или $(1, 6)$), $G = \text{Sym}(5)$ или $U_3(5) \leq G \leq \text{Aut } U_3(5)$ соответственно.
- (3) Γ является $(3, 4, 4)$ -многоугольником и выполняется одно из утверждений:
 - (а) Γ – сеть типа (q, q) , полученная из $PG_2(q)$ удалением флага (x, l) и всех элементов, инцидентных x или l , G содержит стабилизатор в $PGL(3, q)$ флага (x, l) ;
 - (б) Γ является сетью $(H_q^{n+1})^D$ порядка q^n и степени $q+1$, G содержит подгруппу, изоморфную полупрямому произведению элементарной группы порядка q^{2n} и группы $(SL_2(q) \times SL_n(q))/Z(SL_2(q) \times SL_n(q))$, если $n > 2$, $(SL_2(q) \times GL_2(q))/Z(SL_2(q) \times GL_2(q))$, если $n = 2$, $SL_2(2) \times \text{Alt}(7)$, если $(n, q) = (4, 2)$;
 - (в) Γ двойственна геометрии из пункта (3б);
 - (г) Γ является сетью типа $(16, 9)$, чьи точки являются точками аффинного пространства $AG(8, 2)$, а прямые – четырехмерными аффинными подпространствами, 3-мерные подпространства которых на ∞ составляют 2-транзитивный спред гиперболической квадратики из $PG(7, 2)$, G содержит полную группу трансляций $AG(8, 2)$, и ее ядро на ∞ изоморфно A_9 ;
 - (е) Γ двойственна геометрии из пункта (3д).
- (4) Γ является $(3, 3, 4)$ -угольником и выполняется одно из утверждений:
 - (а) Γ является пространством прямых, состоящим из точек и прямых $PG(d, q)$, $q \geq 3$, и $L_{d+1}(q) \leq G \leq PGL_{d+1}(q)$;
 - (б) Γ является дезарговой аффинной плоскостью $AG(2, q)$, G содержит все трансляции, и ее ядро на ∞ содержит $L_2(q)$;
 - (в) G действует 4-транзитивно на точках из Γ , и прямые можно отождествить с парами точек.
- (5) Γ является $(2, 3, 3)$ -угольником, т.е. симметричной 2-схемой с $\lambda > 1$, и выполняется одно из утверждений:

- (а) точки геометрии Γ являются точками проективного пространства $PG(d, q)$, $d \geq 3$, блоки являются гиперплоскостями или их дополнениями, $L_{d+1}(q) \leq G \leq P\Gamma L_{d+1}(q) : 2$ или $G = A_7, S_7$ ($(d, q) = (3, 2)$);
- (б) Γ является единственной схемой Пэли на 11 точках, и $L_2(11) \leq G \leq PGL_2(11)$;
- (в) Γ изоморфна схеме Кантора $S^\pm(n)$, и G содержит $2^{2n} : Sp_{2n}(2)$ (см. Кантор [69]);
- (г) Γ является схемой точек и их дополнений в некотором множестве P , и G действует 3-транзитивно на P .
- (6) Γ является обобщенным четырехугольником порядка $(1, t)$ или $(s, 1)$, и найдется почти простая группа T_0 с простым цоклем T такая, что $T \times T \leq G \leq T_0 \text{ wr } S_2$.
- (7) Γ является обобщенным 2-угольником.

Обобщенные многоугольники. Классификация всех пар (Γ, G) , где Γ — обобщенный g -угольник, а G — флаг-транзитивная группа автоморфизмов, является открытой проблемой.

В случае $g = 2$ вопрос эквивалентен классификации всех факторизаций, т.е. описанию всех троек (G, A, B) , где A, B — собственные подгруппы группы G и $G = AB$.

В случае $g = 3$ геометрия Γ является проективной плоскостью порядка n . Если плоскость дезаргова, а G не содержит $PSL(3, q)$, то либо $q = 2$ и G — группа Фробениуса порядка $7 \cdot 3$, либо $q = 8$ и G — группа Фробениуса порядка $73 \cdot 9$ (Хигмэн [58]). Если же плоскость недезаргова, то $p = n^2 + n + 1$ — простое число и G — группа Фробениуса порядка $(n^2 + n + 1)(n + 1)$ (Кантор [72]). Более того, n делится на 8, но не является степенью 2, и для любого делителя d числа n имеем $d^{n+1} \equiv 1 \pmod{p}$ (Фейт [49]).

В случае $g > 3$ имеет место

ТЕОРЕМА 2.3 (Зейц [108]). Пусть Γ — классический обобщенный многоугольник с $g > 3$ и флаг-транзитивной группой автоморфизмов G . Тогда либо G — классическая группа автоморфизмов Γ (см. утверждение (1) из заключения теоремы 2.2), либо $\Gamma = Q(4, 3)$ (двойственно, $W(3)$) и G — подгруппа из $2^4.S_5$, содержащая $2^4.Sz(2)$, либо $\Gamma = Q^-(5, 3)$ (двойственно, $H(3, 9)$) и G — расширение $PSL(3, 4)$ с помощью нетривиальной подгруппы из четверной группы внешних автоморфизмов.

В первоначальной версии работы Зейца [108] были пропущены вышеуказанные спорадические примеры. Вскоре Зейц скорректировал доказательство, но не опубликовал его. Корректную версию доказательства теоремы 2.3 можно найти в работах Мейкснера [94], [95].

Для $g = 4$ два спорадических примера, отвечающих неклассическим обобщенным четырехугольникам, построены Кантором [71]. А именно, $GQ(3, 5)$ с группой автоморфизмов $2^6.A_6$ и $GQ(15, 17)$ с группой автоморфизмов $16^3.(18\delta)$, δ — небольшое натуральное число.

Для $g = 6$ или 8 Бюкенхаут и Ван Мальдегем [14] рассмотрели точечно транзитивное действие почти простой группы, отвечающей группе из Атласа (см. Конвей и др. [24]), и доказали, что полученные пары — классические.

Пространства прямых. Пусть Γ – пространство толстых прямых, в котором нет прямой, содержащей все точки. Заметим, что флаг-транзитивная группа автоморфизмов G этого пространства является либо почти простой, либо аффинной, т.е. множество точек P обладает структурой аффинного пространства $AG(n, p)$ над полем простого порядка p , а G содержит группу трансляций T этого пространства.

Рассмотрим сначала примеры с почти простой группой.

(1) Дезарговы проективные пространства. Здесь Γ – геометрия точек и прямых дезаргова проективного пространства $PG(d, q)$ размерности $d \geq 2$, $PSL(d+1, q) \leq G \leq P\Gamma L(d+1, q)$. В этом случае имеется один спорадический пример с $\Gamma = PG(3, 2)$ и $G = A_7$ в ее дважды транзитивном действии на точках.

(2) Эрмитовы унитары. Пусть V – трехмерное линейное пространство над полем F_{q^2} с невырожденной эрмитовой формой. Эрмитова унитар $U_H(q)$ имеет в качестве точек $q^3 + 1$ вполне изотропных 1-подпространств, а в качестве прямых множества из $q + 1$ точек, лежащих в невырожденных 2-подпространствах. Далее, $PSU(3, q) \leq G \leq P\Gamma U(3, q)$. Заметим, что при $q = 2$ мы имеем аффинный случай.

(3) Унитары Ри. Для $q = 3^{2e+1}$, $e \geq 0$, имеется группа Ри ${}^2G_2(q)$ с дважды транзитивным действием на $q^3 + 1$ точках. Любая пара точек фиксируется единственной инволюцией, а множество точек, фиксируемых инволюцией, состоит точно из $q + 1$ точек и называется прямой унитары Ри $U_R(q)$. Далее, ${}^2G_2(q) \leq G \leq \text{Aut}^2 G_2(q)$.

(4) Пространства Витта. Пусть $q = 2^n$, $n \geq 3$. Пространство Витта $\text{Wit}(q)$ строится по группе $PSL(2, q)$. Точками являются диэдральные подгруппы порядка $2(q+1)$, а прямыми – инволюции. При этом точка лежит на прямой, если соответствующая диэдральная подгруппа содержит инволюцию. Далее, $PSL(2, q) \leq G \leq P\Gamma L(2, q)$. Заметим, что $\text{Wit}(8)$ изоморфно $U_R(3)$.

Примеры с аффинной группой. Пусть G_0 – стабилизатор точки. Тогда $G = TG_0$ и G_0 – неприводимая подгруппа из $GL(n, p)$.

(1) Дезарговы аффинные пространства. Здесь Γ – геометрия точек и прямых аффинного пространства $AG(d, q)$ с $d \geq 2$ и $q^d = p^n$. Если Z – центр $GL(d, q)$, то ввиду флаг-транзитивности G группа ZG_0 действует транзитивно на ненулевых векторах пространства. По теореме Геринга [57] выполняется одно из следующих утверждений.

(а) G дважды транзитивна (и поэтому известна).

(б) $d = 2$, $q = 11$ или 23 и G – одна из трех разрешимых флаг-транзитивных групп.

(в) $d = 2$, $q = 9, 11, 19, 29$ или 59 , $G_0^{(\infty)} = SL(2, 5)$ (здесь $G_0^{(\infty)}$ – последний член ряда коммутантов G_0).

(г) $d = 4$, $q = 3$ и $G_0^{(\infty)} = SL(2, 5)$.

(2) Недезарговы аффинные плоскости трансляций.

(а) Плоскости Люнебурга. Имеются недезарговы аффинные плоскости порядка q^2 , где $q = 2^{2e+1}$, $e \geq 1$, и ${}^2B_2(q) \leq G_0 \leq \text{Aut}^2 B_2(q)$.

(б) Плоскость Геринга порядка 27. Здесь $G_0 = SL(2, 13)$ и G действует дважды транзитивно на точках плоскости.

(в) Почтиполевая плоскость порядка 9. Здесь имеется 7 возможностей для G_0 .

(3) Пространства Геринга. Имеется точно два флаг-транзитивных пространства на 3^6 точках с 9-точечными прямыми. В обоих случаях $G_0 = SL(2, 13)$ и G действует дважды транзитивно.

(4) Одномерный аффинный случай. Этот случай до конца не исследован.

(а) Аффинные плоскости трансляций. Все флаг-транзитивные аффинные плоскости, не вошедшие в пункт (2), имеют 1-мерную аффинную группу.

(б) Обобщенные системы Нетто. Пусть $q = p^n$, p – нечетное простое число, и пусть k – такое нечетное число, что $k(k-1)$ делит $q-1$. Через K обозначим множество всех корней из 1 степени k в F_q . Пусть F_q будет множеством точек системы инцидентности $N(k, q)$, а множество прямых состоит из образов K под действием группы $AG^{k-1}L(1, q)$ отображений $x \rightarrow a^{k-1}x + b$, где $a, b \in F_q$, $a \neq 0$. Эта группа и содержащие ее подгруппы из $AG^{k-1}L(1, q)$ действуют флаг-транзитивно на $N(k, q)$, однако $N(k, q)$ не всегда является пространством прямых. Следующее условие является необходимым и достаточным для того, чтобы $N(k, q)$ было пространством прямых:

(*) для любого примитивного корня ε степени k из 1 в F_q элементы $\varepsilon - 1, \varepsilon^2 - 1, \dots, \varepsilon^{k-1} - 1$ лежат в разных смежных классах мультипликативной группы F_q^* по $(F_q^*)^{k-1}$.

В частности, если $k = 3$, то $N(3, q)$ является пространством прямых для $q \equiv 7 \pmod{12}$. Такие пространства называют обычно системами троек Нетто.

Если $k = 5$, то $q \equiv 21 \pmod{40}$. Для $q < 800$ имеется четыре возможности с $q = 61, 421, 661$ и 701 . Только две дезарговы проективные плоскости возникают как обобщенные системы Нетто: $N(3, 7) \simeq PG(2, 2)$ и $N(9, 73) \simeq PG(2, 8)$.

(в) Канторовский трюк раздувания (inflation trick). Пусть L – прямая пространства прямых (P, B) и G_L действует флаг-транзитивно на некотором пространстве прямых Γ' с точечным множеством L . Тогда образы прямых из Γ' под действием G образуют множество прямых флаг-транзитивного пространства прямых Γ'' с множеством точек P .

Стартуя, например, с $P = GF(q^n)$, $L = GF(q)$ и $G = AG^m L(1, q^n)$, мы получим флаг-транзитивное пространство прямых тогда и только тогда, когда m взаимно просто с $(q^n - 1)/(q - 1)$, причем в этом случае $G_L = AG^m L(1, q)$.

Если имеется обобщенная система Нетто $\Gamma = N(m+1, q)$, то мы получим новые обобщенные системы Нетто $\Gamma'' = N(m+1, q^n)$ для значений n , удовлетворяющих вышеуказанному условию взаимной простоты.

Однако мы получим новые примеры, если найдется аффинная плоскость трансляций Γ' порядка $\sqrt{q}$, допускающая $AG^m L(1, q)$ как флаг-транзитивную группу автоморфизмов. Такие плоскости существуют, если $\sqrt{q} = 2^e$ для нечетного $e \geq 5$ или если $\sqrt{q}$ является степенью нечетного простого числа с показателем, не являющимся степенью 2.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть G – флаг-транзитивная группа автоморфизмов пространства прямых Γ . Тогда выполняется одно из утверждений:

- (I) (Γ, G) является одним из примеров (1)–(4) в почти простом случае;
- (II) (Γ, G) – один из примеров (1)–(3) в аффинном случае;
- (III) Γ имеет $q = p^a$ точек и G – подгруппа из $AGL(1, q)$;
- (IV) каждая прямая имеет две точки и G – любая группа, действующая дважды транзитивно на точках пространства.

В работе Пазини, Ешиары [99] имеется подробный обзор флаг-транзитивных геометрий Бюкенхаута с большим количеством примеров.

§3. Расширения частичных геометрий

В этом разделе рассмотрены расширения частичных геометрий, как правило, без каких-либо предположений о действии группы автоморфизмов.

Если вычет в любой точке связной геометрии $\mathbf{S}$ является α -частичной геометрией, то $\mathbf{S}$ называется *расширенной* (α -) *частичной геометрией*, для краткости, ErG_α или ErG . По связности все точечные вычеты ErG_α имеют один и тот же порядок (s, t) , и мы будем обозначать эту геометрию как $ErG_\alpha(s, t)$.

Для любого антифлага (a, L) геометрии $ErG_\alpha(s, t)$ с $\varphi(a, L) \neq 0$ выполняется неравенство $\alpha + 1 \leq \varphi(a, L) \leq s + 2$. Более того, если геометрия является φ -однородной с $\varphi \geq s + 1$, то она будет и сильно однородной. Геометрия ErG называется *одноточечным расширением*, если она сильно $(s + 2)$ -однородна; *треугольной*, если любые три попарно коллинеарные точки лежат в общем блоке (необходимо единственном). Геометрия $ErG_\alpha(s, t)$ является треугольной тогда и только тогда, когда она $(\alpha + 1)$ -однородна.

Геометрия $ErG_\alpha(s, t)$ – одноточечное расширение тогда и только тогда, когда она является $2-(v, k, \lambda)$ -схемой с $v = 1 + (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s + 2$, $\lambda = t + 1$. В этом случае число ее блоков равно $b = (t + 1)(\alpha + st)(\alpha + (s + 1)(\alpha + st))/(\alpha^2(s + 2))$ и $(s + 2)$ делит $2t(t + 1)(2t - \alpha)$.

ТЕОРЕМА 3.1 (Хобарт и Хьюз [62]). *Точечный граф Γ сильно φ -однородной $ErG_\alpha(s, t)$ является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_\varphi(s + 1, st/\alpha)$. В частности, он сильно регулярен с параметрами $v = 1 + (s + 1) \times (1 + st(s + 2))/(\varphi\alpha)$, $k = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $\lambda = s + st(\varphi - 1)/\alpha$, $\mu = \varphi(1 + st/\alpha)$ и собственными значениями $k, s + 1 - \varphi, -(1 + st/\alpha)$.*

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть d – диаметр точечного графа геометрии $ErG_\alpha(s, t)$, $\varphi_0 = \min\{\varphi(a, L)\}$, где минимум берется по всем антифлагам с $\varphi(a, L) \neq 0$. Тогда справедливы оценки:*

- (1) $d \leq \max\{2, s + 5 - 2\varphi_0\}$ (Хобарт и Хьюз [62]);
- (2) *если $\alpha \geq 2$, то $d \leq \max\{2, [s/2] - \varphi_0 + 4\}$ и $d \leq \max\{3, [(t(s + 1)/4 + (s - \alpha))/(t + 1)] - \varphi_0 + 5\}$, где $[x]$ – целая часть числа x (Дель Фра и Гинелли [43]).*

Следующая теорема автора расширяет результат Камерона, Фишера [20] об s -однородных расширениях обобщенных четырехугольников.

ТЕОРЕМА 3.3 (Махнев [82]). *Пусть $\mathbf{S}$ является s -однородной геометрией $ErG_\alpha(s, t)$, $\bar{\Gamma}$ – дополнение точечного графа $\mathbf{S}$. Тогда выполняется одно из утверждений.*

- (1) $s = 2$ и имеется точно 7 геометрий: две сильно однородные с параметрами точечного графа $(16, 9, 4, 6)$ и $(28, 15, 6, 10)$, еще две геометрии с сильно регулярным точечным графом $(36, 15, 6, 6)$ и $(64, 27, 10, 12)$, а также три геометрии (по одной для $t = 1, 2, 4$), точечные графы которых являются графами Тэйлора (двойными антиподальными графами диаметра 3).
- (2) $\mathbf{S}$ является геометрией $ErG_2(s, 1)$, $\bar{\Gamma}$ – сильно регулярный граф с $\lambda = 0$, $\mu = 2$ и $\mathbf{S}$ – геометрия вершин и клик Γ , соответствующий $\bar{\Gamma}(a)$ для

$a \in \bar{\Gamma}$.

- (3) $\mathbf{S}$ сильно s -однородна и либо $t = \alpha$ и $\bar{\Gamma}$ является квадратной решеткой на $(s+2)^2$ вершинах, либо $t = 2\alpha$, $s \leq (2\alpha-1)(\alpha+1)^2$, $s + \alpha + 1$ делит $2s(s+1)(2\alpha+1)$ и $\bar{\Gamma}$ является треугольным графом на $(s+2)(2s+3)$ вершинах.

Подмножество C точек геометрии $pG_\alpha(s, t)$ называется *предовалом*, если $|C| \geq \alpha + 1$ и каждая точка из C соединена различными прямыми точно с α другими точками из C . Предовал C с $|C| = \alpha + 1$ называется *суперовалом*. Множество из трех точек, не лежащее на прямой, любые две точки которого коллинеарны, называется *треугольником*.

Суперовалы в проективной и аффинной плоскостях являются гиперовалями и аффинными овалами соответственно. Но суперовал в двойственной аффинной плоскости, т.е. проективной плоскости с удаленными точкой и прямыми, проходящими через нее, вместе с удаленной точкой снова будет обычным гиперовалом. Поэтому суперовалы в двойственных проективной и аффинной плоскостях существуют, только если плоскость имеет четный порядок.

Пусть (a, L) – антифлаг геометрии $\mathbf{S} = pG_\alpha(s, t)$ такой, что $\varphi(a, l) \neq 0$ (L пересекает $\mathbf{S}_a$). Тогда $\mathbf{S}_a \cap L$ является предовалом в $\mathbf{S}_a$. Если геометрия $\mathbf{S}$ треугольна, то $\mathbf{S}_a \cap L$ – суперовал в $\mathbf{S}_a$ и каждый треугольник из $\mathbf{S}_a$ лежит в единственном суперовале $\mathbf{S}_a \cap L$ (Хьюз [66]).

Обобщая некоторые результаты из работ Дель Фра и др. [47] и Хобарт, Хьюза [63] о расширениях геометрий с минимальным μ , автор [81] получил следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\mathbf{S}$ является φ -однородной $ErG_\alpha(s, t)$, $\varphi \leq s$, (a, B) – антифлаг с $\varphi(a, b) \neq 0$, и b, c – различные точки из $B - \mathbf{S}_a$ такие, что $\mu(a, b) = \mu(a, c) = \varphi(1 + t(\varphi - 1)/\alpha)$. Тогда $\mathbf{S}$ может быть только одной из геометрий:

- (1) треугольным расширением $GQ(s, t)$ с $s \geq t$;
- (2) геометрией $EGQ(25, 5)$ с $\varphi = 6$;
- (3) расширенной сетью $ErG_t(s, t)$, $t \leq 2$;
- (4) расширенной двойственной 2-схемой $ErG_2(s, 1)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathbf{S}$ является φ -однородной $ErG_\alpha(s, t)$, $\varphi \leq s$, $\mathbf{S}$ сильно регулярным точечным графом Γ , в котором $\mu = \varphi(1 + t(\varphi - 1)/\alpha)$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $\mathbf{S}$ – треугольное расширение $GQ(t, t)$, $t = 2, 3, 4, 8, 13$;
- (2) $\alpha = t = 1$, $\varphi = 2$ и Γ либо совпадает с частным графа Джонсона $J(10, 5)$, либо является дополнительным графом к квадратной решетке на 16 вершинах;
- (3) $\mathbf{S}$ – геометрия вершин и максимальных клик графа, дополнительного к графу с $\lambda = 0$, $\mu = 2$.

Подмножество точек K частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ называется $(0, n)$ -множеством, если каждая прямая, пересекающая K , пересекает K по n точкам. Если, кроме того, каждая прямая пересекает K , то K называется n -овоидом.

Для непустого подмножества точек K частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ через L^+ (L^-) обозначим множество прямых, (не) пересекающих K , и рассмотрим натуральное число $n = \min_{l \in L^+} |l \cap K|$. Тогда для $k = |K|$ выполняются следующие нестрогие неравенства (Де Клерк, Дель Фра и Гинелли [32]):

- (1) $k \geq n[(n-1)t + \alpha]/\alpha$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда множество прямых геометрии индуцирует на K подгеометрию $pG_\alpha(n-1, t)$ (в частности, K будет $(0, n)$ -множеством);
- (1') если L^- пусто, то $k \geq n[st + \alpha]/\alpha$;
- (2) $k \geq (s+1)[n(t+1) - (s+t+1-\alpha)]/\alpha$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда K является регулярным $(0, n)$ -множеством валентности $n(t+1) - t$ и для каждой точки $P \notin K$ число прямых, проходящих через P и не пересекающих K , равно $e = (s+t+1-\alpha)/n$.

Отметим, что граница (1) лучше (2) тогда и только тогда, когда $n < (s+t+1-\alpha)/t$. Эти границы совпадают, если $n = s+1$ (и K является множеством всех точек геометрии) или $n = (s+t+1-\alpha)/t$. Если $n = (s+t+1-\alpha)/t$ и $k = (s+1)(s+t+1-\alpha)/t$, то K является подгеометрией $pG_\alpha((s+1-\alpha)/t, t)$, причем для каждой точки $P \notin K$ найдется единственная прямая, проходящая через P и пересекающая K .

3.1. Расширения сетей и двойственных сетей. Небольшим обобщением расширенной двойственной сети является следующее понятие *трансверсальной схемы*. Пусть m, c и u — натуральные числа, большие 1. Множество из mc точек, лежащих в t классах по c точек, вместе с m^u блоками порядка c , такое, что любой блок содержит точно одну точку из каждого класса, и любое множество из u точек, выбранных в разных классах, лежит в единственном общем блоке, называется *u-трансверсальной схемой для (m, c)* или, кратко, *u-TD(m, c)-схемой*.

Предположим сначала, что геометрия $\mathbf{S}$ является расширенной двойственной сетью, т.е. каждый вычет $\mathbf{S}_a$ есть $pG_s(s, t)$. В этом случае геометрия либо треугольная, либо является одноточечным расширением. Для точки a данной t -(v, k, λ)-схемы $\mathbf{S} = (P, B)$ через $\mathbf{S}^a$ обозначим $(t-1)$ -схему с множеством точек $P - \{a\}$ и множеством блоков из B , не инцидентных a (так называемое внешнее ограничение $\mathbf{S}$).

ТЕОРЕМА 3.5 (Хобарт, Хьюз [62]). *Пусть геометрия $\mathbf{S}$ является одноточечным расширением двойственной сети. Тогда $\mathbf{S}$ является одной из геометрий:*

- (1) *единственная 2-(21, 6, 4)-схема, расширяющая двойственную аффинную плоскость порядка 4 и совпадающая с $\mathbf{M}_{22}^a$, где $\mathbf{M}_{22}$ — естественная 3-(22, 6, 1)-схема для группы Матве M_{22} ;*
- (2) *единственная биплоскость 2-(7, 4, 2), расширяющая двойственную аффинную плоскость порядка 2 (получаемая, как и выше, в виде внешнего ограничения 3-схемы, расширяющей проективную плоскость порядка 2).*

В указанной работе [62] построен ряд примеров треугольных расширений двойственных сетей.

ТЕОРЕМА 3.6 (Хобарт, Хьюз [62]). *Пусть геометрия $\mathbf{S}$ является одноточечным расширением сети типа (n, m) . Тогда*

- (1) *$m = n+1$ и $\mathbf{S}$ — инверсивная плоскость порядка n , или*
- (2) *$m = (n+1)/2$ и $\mathbf{S}$ является 2-($n^2+1, n+1, (n+1)/2$)-схемой.*

Далее, мы имеем $\varphi(a, L) = n + 1$, поэтому в первом случае геометрия треугольна, а во втором – нет.

ПРИМЕР 3.1. Пусть q – степень нечетного простого числа, $G = PSL(2, q^2)$, H – подгруппа из G , изоморфная $PGL(2, q)$, G и H естественно действуют на проективной прямой $F_{q^2} \cup \infty$. Пусть точками геометрии $\mathbf{S}$ являются точки этой прямой, а блоками – G -сопряженные с $B = F_q \cup \infty$ подмножества. Так как стабилизатор блока B совпадает с H , то $\mathbf{S}$ является расширенной сетью типа (2) из заключения теоремы 3.6. (Заметим, что $\mathbf{S}$ является полуинверсивной плоскостью, так как она естественно вкладывается в инверсивную плоскость и содержит половину блоков этой плоскости.)

До конца раздела 3.1 будем предполагать, что $\mathbf{S}$ – сильно однородная расширенная сеть, не являющаяся одноточечным расширением. Тогда ее точечный граф Γ сильно регулярен с параметрами $v = 1 + n + n(n^2 - 1)/\varphi$, $k = n^2$, $\lambda = \varphi(n - 1)$, $\mu = \varphi n$ и имеет собственные значения $n - \varphi$, $-n$ кратностей $n^2(n^2 - 1)/(\varphi(2n - \varphi))$, $n + n(n^2 - 1) \times (n - \varphi)/(\varphi(2n - \varphi))$ соответственно. Поэтому φ делит $n(n^2 - 1)$ и $\varphi(2n - \varphi)$ делит $n^2(n^2 - 1)$. Заметим, что эти условия выполнены, если $\varphi = n - 1$, n или $n + 1$. В случае $\varphi = n$ исследованы треугольные расширения.

ТЕОРЕМА 3.7 (Хобарт, Хьюз [62]). Пусть геометрия $\mathbf{S}$ – треугольное n -однородное расширение сети типа (n, m) . Тогда $\mathbf{S}$ является $3-TD(n, n + 1)$ -схемой и каждый точечный вычет получается удалением из аффинной плоскости одного класса параллельных прямых (в частности, $n = m$).

Такие расширения существуют для любого n , являющегося степенью простого числа.

ПРИМЕР 3.2. Пусть q – степень простого числа a , W есть $3 \times (q + 1)$ -матрица над F_q такая, что любые ее три столбца линейно независимы (столбцы W образуют овал в проективной плоскости $PG(2, q)$). Пусть точками геометрии $\mathbf{S}$ являются пары (i, x) , где i – номер столбца W , $x \in F_q$; а блоками – векторы из пространства, порожденного строками W ; пара (i, x) инцидентна w , если i -я координата w равна x .

Тогда $\mathbf{S}$ является сильно однородным треугольным расширением сети типа (n, n) .

Допустим теперь, что $\varphi = n - 1$. Ввиду теоремы 3.3 $(n - 1)$ -однородная расширенная сеть типа (n, m) с $m \geq 3$ является сильно однородной.

ПРИМЕР 3.3. Пусть G – дважды транзитивная группа подстановок на множестве $\mathcal{U}$ из $n + 1$ элементов такая, что только 1 фиксирует 3 точки, и пусть $|G| = (n + 1)nm$. Точками геометрии $\mathbf{S}$ являются пары (i, j) , где $i, j \in \mathcal{U}$; а блоками – символы $[g]$, $g \in G$; пара (i, j) инцидентна g , если $j = ig$.

Тогда $\mathbf{S}$ является сильно $(n - 1)$ -однородным расширением сети типа (n, m) :

- (i) $PGL(2, q)$ дает расширение сети типа $(q, q - 1)$;
- (ii) $PSL(2, q)$ дает расширение сети типа $(q, (q - 1)/2)$;
- (iii) $PG^*L(2, q^2)$, q нечетно, дает расширение сети типа $(q^2, q^2 - 1)$;
- (iv) $AGL(2, 2^p)$, p простое, дает расширение сети типа $(2^p - 1, p)$.

Полученные геометрии треугольны в случаях (i), (iii); здесь $PG^*L(2, q^2)$ – это группа всех подстановок K_{q^2} вида $x \rightarrow (ax^{\sigma\Delta} + b)/(cx^{\sigma\Delta} + d)$, где $\Delta = ab - cd \neq 0$ и $\sigma_\Delta = 1$

или q в зависимости от того, является Δ квадратом или нет; $AGL(2, 2^p)$ – это группа всех подстановок K_{2^p} вида $x \rightarrow (ax^\sigma + b)$, где $a \neq 0$ и σ – автоморфизм поля F_{2^p} .

Пусть, наконец, $\varphi = n - e$ с $e > 1$. Тогда $n - e$ делит $e(e^2 - 1)$ и $n^2 - e^2$ делит $e^2(e^2 - 1)$, причем $n \leq e^2$. Для максимально возможного значения $n = e^2$ все условия делимости выполнены. Если $e = q$ – степень простого числа, то параметры точечного графа расширенной сети $(1 + q^2 + q(q + 1)(q^2 + 1), q^4, (q^2 - 1)(q^2 - q), q^2(q^2 - q))$ совпадают с параметрами дополнения для графа прямых в $PG(3, q)$. Заметим, что в треугольном случае расширение сети восстанавливается по точечному графу.

Допустим теперь, что $\mathbf{S}$ является треугольным сильно однородным расширением сети типа $(q^2, q^2 - q)$. Для любой точки b вычета $\mathbf{S}_a$ имеется $q^2 - q$ блоков, являющихся прямыми сети $\mathbf{S}_a$, в то время как остальные $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ блоков из $b^\perp$ пересекают $\mathbf{S}_a$ по $q^2 - q$ точкам. Если L – блок сети, пересекающий $\mathbf{S}_a$, но не содержащий a , то $L \cap \mathbf{S}_a$ является предвалом сети $\mathbf{S}_a$.

ТЕОРЕМА 3.8 (Хобарт, Хьюз [62]). *Пусть геометрия $\mathbf{S}$ – треугольное расширение сети типа $(q^2, q^2 - q)$ и некоторый точечный вычет $\mathbf{S}_a$ вкладывается в аффинную плоскость $\mathbf{A}$ порядка q^2 . Тогда:*

- (1) *если некоторый предвал $L \cap \mathbf{S}_a$ расширяется до овала $\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ – проективная плоскость, соответствующая $\mathbf{A}$, то $q = 2$;*
- (2) *если $\mathbf{A}$ дезаргова, то $q \leq 3$.*

Исключение с $q = 2$ в самом деле существует.

ПРИМЕР 3.4. Пусть точками геометрии $\mathbf{S}$ будут 35 прямых $PG(3, 2)$; блоками – 56 спредов (множеств из 5 прямых, расщепляющих 15 точек $PG(3, 2)$).

Тогда $\mathbf{S}$ является сильно однородным расширением сети типа $(4, 2)$.

Кроме $n = e^2$ существуют спорадические возможности для $e > 3$. Например:

- (1) $e = 4$ дает $n = 6$ или 8 и в треугольном случае возможны расширения сетей типа $(6, 2)$ и $(8, 4)$;
- (2) $e = 5$ дает $n = 7, 10$ или 15;
- (3) $e = 6$ дает $n = 8, 9$ или 36.

3.2. Расширения двойственных 2-схем. Любое расширение 2-схем $pG_{s+1}(s, t)$ одноточечно и является предметом изучения теории блок-схем. В этом разделе мы рассмотрим расширения $\mathbf{S}$ двойственных 2-схем. Пусть $\mathbf{S}_a$ является двойственной $2-(v, k, 1)$ -схемой с $r = (v - 1)/(k - 1)$ прямыми, проходящими через точку, и с $b = vr/k$ прямыми. Тогда $\mathbf{S}_a$ является $pG_k(r - 1, k - 1)$ с b точками и v прямыми. Супервал в $\mathbf{S}_a$ соответствует множеству L из k прямых в $\mathbf{S}_a^D$ такому, что любые две прямые из L пересекаются и любая точка, лежащая на прямой из L , принадлежит точно двум прямым из L .

Если геометрия $\mathbf{S}$ является треугольным расширением двойственных 2-схем и $\mathbf{S}_a$ – двойственная $2-(v, k, 1)$ -схема с b прямыми, то $k + 1$ делит $b(v - k)$. Заметим, что изучение сильно φ -однородных расширений двойственных сетей $pG_{t+1}(s, t)$ равносильно изучению сильно φ -однородных частичных $(t + 1, 2)$ -геометрий с $s + 2$ точками в блоке. В частности, блочные графы таких расширений сильно регулярны (см. [65]).

Рассмотрим сначала одноточечные расширения. Несложно понять, что одноточечное расширение двойственной 2-схемы – это в точности квази-симметричная 2-схема, в которой любые два блока пересекаются по нулю или двум точкам.

ТЕОРЕМА 3.9 (Хьюз [66]). *Для любого фиксированного $k > 2$ существует конечное число значений v , для которых одноточечные расширения $\mathbf{S}$ двойственных $2-(v, k, 1)$ -схем существуют. Более того,*

- (1) *если $k = 3$, то $\mathbf{S}$ является единственной $3-(8, 4, 1)$ -схемой;*
- (2) *если $k = 4$, то $\mathbf{S}$ является единственной $2-(21, 6, 4)$ -схемой, изоморфной внешнему ограничению схемы Матье $3-(22, 6, 1)$;*
- (3) *если $k = 5$, то $\mathbf{S}$ является единственной $3-(22, 6, 1)$ -схемой;*
- (4) *если $k = 6$, то $v = 46$ или 96 и $\mathbf{S}$ является $2-(70, 10, 6)$ - или $2-(305, 20, 6)$ -схемой.*

В пункте (3) заключения теоремы Хьюза фигурирует еще $2-(100, 12, 5)$ -схема с 375 блоками. Однако множество точек вне фиксированного блока вместе с множеством блоков, не пересекающих его, образуют расширенную проективную плоскость порядка 10, которая по теореме Лэма и др. [74] не существует.

Геометрии из пунктов (1), (3) обладают трижды транзитивными группами автоморфизмов $AGL(3, 2)$ и $\text{Aut } M_{22}$ соответственно. Схема из пункта (2) имеет дважды транзитивную группу автоморфизмов $P\Omega L(3, 4)$. Существование схем в пункте (4) неизвестно.

Тривиальная геометрия $pG_2(s, 1)$ (двойственная к схеме пар $(s + 2)$ -элементного множества) имеет интересные расширения.

Любая $EpG_2(s, 1)$ является полубиплоскостью с $(s + 2)$ точками в блоке, и обратно, любая полубиплоскость является такой EpG .

Треугольная полубиплоскость восстанавливается по своему точечному графу, который является локально треугольным. Следующие примеры приведены в статье Хьюза [66].

ПРИМЕР 3.5. (1) Пусть $\mathbf{B}$ является треугольной полубиплоскостью с матрицей инцидентности B . Тогда полубиплоскость $\mathbf{B}_1$ с матрицей инцидентности

$$B_1 = \begin{pmatrix} B & I \\ I & B^T \end{pmatrix}$$

треугольна.

(2) Для каждого $k \geq 3$ существует треугольная полубиплоскость с $v = 2^{k-1}$ точками и k точками в блоке.

Для построения геометрий из пункта (2) надо стартовать с треугольной полубиплоскости, являющейся $2-(4, 3, 2)$ -схемой, и применяя конструкцию из пункта (1), получить нужное бесконечное семейство.

ПРИМЕР 3.6. Пусть $V = V_n(2)$ является линейным n -мерным пространством над F_2 , D – такое множество из k векторов, порождающее V , что сумма любых четырех векторов из D и сумма любых шести векторов из D не является нулевым вектором. Тогда геометрия с множеством точек V и множеством блоков $\{D + v \mid v \in V\}$ является треугольной полубиплоскостью.

Первый новый пример такого вида получается при $n = 6, k = 8$ с $D = \{0, e_1, \dots, e_6, e_1 + \dots + e_6\}$, где $\{e_i\}$ – базис V . Эта геометрия имеет 64 точки и блоки порядка 8.

Перейдем теперь к расширениям конкретных классов двойственных 2-схем, а именно, к двойственным унитариям, двойственным 2-схемам, возникающим из гипервалов проективных плоскостей, двойственным проективным и аффинным пространствам.

Первоначально *унитарью* называли 2-схему абсолютных точек и не абсолютных прямых унитарной полярности проективной плоскости $PG(2, q^2)$. Сейчас под унитарью порядка q понимают любую $2-(q^3 + 1, q + 1, 1)$ -схему, $q > 1$.

ТЕОРЕМА 3.10 (Хьюз [66]). *Пусть $\mathbf{S}$ является треугольным расширением двойственных унитарей порядка q . Тогда $q \in \{2, 4, 5, 6, 10, 12, 19, 22, 26, 40, 54, 82, 166\}$. Ни одно из этих расширений не может быть сильно $(q + 2)$ -однородным.*

Пусть $\mathbf{P}$ – проективная плоскость четного порядка q , содержащая гипервал C . Тогда геометрия с множеством точек, не лежащих в C , и множеством блоков, состоящим из $q(q - 1)/2$ прямых, не пересекающих C , является двойственной к $2-(q(q - 1)/2, q/2, 1)$ -схеме.

ТЕОРЕМА 3.11 (Хьюз [66]). *Пусть $\mathbf{S}$ является треугольным расширением схем, двойственных к $2-(q(q - 1)/2, q/2, 1)$ -схемам. Тогда $q \in \{4, 6, 10, 22\}$. Если, кроме того, $\mathbf{S}$ сильно $(q + 2)/2$ -однородна, то $q = 6$.*

Для $q = 6$ треугольное расширение с 72 точками дано далее в примере 3.7 (i) с $n = 3$, а сильно 4-однородное расширение с 64 точками дано в примере 3.7 (iii).

Для $q = 4$ геометрия из пункта (2) примера 3.5 с $k = 6$ дает треугольное расширение схемы с 32 точками, двойственной к $2-(6, 2, 1)$ -схеме.

Для $k = 3, 4, 5$ полубиплоскости с 4, 8, 16 точками соответственно, данные в примере 3.5, являются единственными треугольными расширениями схем указанного вида.

ТЕОРЕМА 3.12 (Хьюз [66]). *Пусть $\mathbf{S}$ является треугольным расширением двойственных 2-схем.*

- (1) *Если $\mathbf{S}_a^D$ является $2-(v, 3, 1)$ -схемой, то $\mathbf{S}_a^D$ является геометрией точек и прямых $PG(n, 2)$.*
- (2) *Если $\mathbf{S}_a^D$ изоморфна $PG(n, q)$, то $q = 2$ или 4.*

ПРИМЕР 3.7. Пусть $\mathbf{V} = V_N(2)$ является многообразием Грассмана над F_2 размерности $N = n(n + 1)/2 - 1$, в которое двойственно вложена геометрия точек и прямых $PG(n, 2)$, т.е. точки $PG(n, 2)$ соответствуют “специальным” подпространствам $PG(n - 1, 2)$ из $\mathbf{V}$ и прямые $PG(n, 2)$ соответствуют точкам $\mathbf{V}$.

(i) Пусть H – гиперплоскость из $PG(N + 1, 2)$ с $\mathbf{V}$, вложенным в H . Тогда геометрия с множеством точек $AG(N + 1, 2) = PG(N + 1, 2) - \mathbf{V}$ и множеством блоков, состоящим из подпространств $PG(n, 2)$, пересекающих H по специальному подпространству из $\mathbf{V}$, является треугольным расширением двойственных 2-схем с вычетами, двойственными $PG(n, 2)$.

(ii) Пусть H – алгебраическое многообразие из $PG(N + 2, 2)$ такое, что для некоторой гиперплоскости H , содержащей $\mathbf{V}$, алгебраическое многообразие $W \cap H$ имеет свойство: множество точек из $W \cap H$, соединенных с фиксированной точкой из $W - H$ прямыми, пересекающими H в единственной точке, совпадает с $\mathbf{V}$. Тогда

геометрия $\mathbf{S}$ с множеством точек $W - H$ и множеством блоков, состоящим из подпространств $PG(n, 2)$ из W , пересекающих H по специальному подпространству из $\mathbf{V}$, является треугольным расширением двойственных 2-схем с вычетами, двойственными $PG(n, 2)$.

(iii) Пусть $n = 3$. Тогда $N = 5$ и $\mathbf{V}_5$ является квадрикой $Q_5^+(2)$ (без некоторых изотропных плоскостей, так как нас интересуют только “специальные” плоскости). В этом случае мы можем применить конструкцию из (ii) двумя путями. В обоих W будет квадрикой $Q_7^+(2)$, вложенной в $PG(7, 2)$, и H – гиперплоскость из $PG(7, 2)$:

(1) Пусть H – касательная гиперплоскость к W , тогда $W \cap H$ – конус над $Q_5^+(2)$, а вычеты $\mathbf{S}_a$ двойственны $PG(3, 2)$. Сейчас $Q_7^+(2)$ содержит 135 точек и конус над $Q_5^+(2)$ содержит 71 точку, поэтому $\mathbf{S}$ имеет 64 точки. Эта геометрия изоморфна геометрии, построенной в (i) для $n = 3$. Ее точечный граф сильно регулярен с параметрами (64, 35, 18, 20).

(2) Пусть H – секущая гиперплоскость к W , тогда $W \cap H$ есть $Q_6(2)$ и вычеты $\mathbf{S}_a$ снова двойственны $PG(3, 2)$. Так как $Q_6(2)$ содержит 63 точки, то $\mathbf{S}$ имеет 72 точки. Эта геометрия имеет дистанционно регулярный точечный граф, являющийся графом Тэйлора.

Можно показать, что если $\mathbf{S}$ – треугольное сильно однородное расширение двойственных геометрий к $PG(n, 2)$, то $n = 3$ или 5. Для $n = 3$ пример на 64 точках является сильно однородным. Существование сильно 6-однородного расширения геометрий, двойственных $PG(5, 2)$, не известно, оно должно иметь 4992 точки.

В случае $q = 4$ известен единственный пример треугольного расширения $PG(n, 4)^D$ – это 3-схема для группы Матье M_{22} , расширяющая $PG(2, 4)$. Если $n > 2$, то $PG(n, 4)^D$ не имеет сильно 6-однородных расширений.

В работе Хайбрехт, Пазини [67] классифицированы флаг-транзитивные расширения PG^D -геометрий, где PG^D означает геометрию прямых и точек проективного пространства. По связности геометрии точечные вычеты являются геометриями для $PG(n, q)$, q называется порядком геометрии, а n – вычетной размерностью.

Если вычетная размерность $s.PG^D$ -геометрии S равна 2, то S является конечной расширенной проективной плоскостью, т.е. совпадает либо с $AG(3, 2)$, либо со схемой Витта $S(22, 6, 3)$ для группы Матье M_{22} .

Пусть Δ_{n+1} – это билдинг типа D_{n+1} над $GF(2)$. Вершины диаграммы Кокстера, лежащие на конце вилки, занумеруем 0 и 2, а их общего соседа занумеруем 1. Выберем элемент a типа 0 и через H обозначим множество всех 0-элементов, находящихся на не-максимальном расстоянии от a . Здесь расстояние между двумя элементами из Δ_{n+1} – это минимальная длина галереи, связывающей эти элементы. Выбросим из Δ_{n+1} все элементы x , 0-тени которых (0-элементы, инцидентные x) содержатся в H . Удаляя теперь все элементы типа i для $i > 2$ (усекая к $\{0, 1, 2\}$), получим $s.PG^D$ -геометрию Γ_n порядка 2 и вычетной размерности n .

Граф коллинеарности Γ_n – это граф знакопеременной формы $\text{Alt}(n+1, 2)$, а группа автоморфизмов G является расщепляемым расширением $V \wedge V$ с помощью $L_{n+1}(2)$, где $V = V(n+1, 2)$. Геометрия Γ_n просто связна и не имеет флаг-транзитивных истинных частных.

Если $n = 3$, то 0- и 1-элементы из Δ_4 образуют систему точек и прямых гиперболической квадррики $Q_7^+(2)$, а H является касательной гиперплоскостью к этой квадрике. В качестве H возьмем секущую гиперплоскость к $Q_7^+(2)$, а через Γ'_3 обозначим геометрию, полученную удалением из Δ_4 гиперплоскости H и всех элементов типа 3. Тогда Γ'_3 является $s.PG^D$ -геометрией порядка 2 и вычетной размерности 3 с 72 точками (Γ_3 имеет 64 точки).

Геометрия Γ'_3 просто связна, не имеет флаг-транзитивных истинных частных, а ее группа автоморфизмов изоморфна $Sp_6(2)$ (это стабилизатор H в группе $O_8^+(2)$).

ТЕОРЕМА 3.13 (Хайбрехт, Пазини [67]). *Пусть Γ является флаг-транзитивной $s.PG^D$ -геометрией вычетной размерности ≥ 3 . Тогда Γ изоморфна Γ_n или Γ'_3 .*

О расширениях $AG(n, q)^D$ получены лишь частичные результаты.

ТЕОРЕМА 3.14 (Хьюз [66]). *Пусть S является треугольным расширением $AG(n, q)^D$. Тогда q четно.*

ПРИМЕР 3.8. Во вложении точек и прямых $PG(n, 2)$ как специальных подпространств и точек многообразия Грассмана $V_N(2)$ мы можем ограничиться вложением точек и прямых из $AG(n, 2)$ и назвать полученное многообразие B_N . Вкладывая B_N в гиперплоскость H из $PG(N + 1, 2)$, мы получим точную копию конструкции из примера 3.7 (i), являющуюся треугольным расширением $AG(n, 2)^D$ для каждого $n > 2$. Эта геометрия является также треугольной полубиплоскостью с блоками порядка 2^n и с 2^{N+2} точками.

Эта конструкция предложена Пазини.

ТЕОРЕМА 3.15 (Хьюз [66]). *Пусть S является одноточечным расширением двойственных 2-схем.*

- (1) Если S_a^D является унитарью или проективной схемой $PG(n, q)$, то $S_a^D = PG(2, q)$, $q = 2$ или 4.
- (2) Если S_a^D является $2-(q(q-1)/2, q/2, 1)$ -схемой, то $q = 4$ и S — биплоскость, являющаяся $2-(16, 6, 2)$ -схемой.
- (3) Если S_a^D является аффинной схемой $AG(n, q)$, то n четно, $q = 2$ и S является либо $2-(21, 6, 4)$ -схемой, либо биплоскостью с блоками порядка 2^n . Обратно, любая биплоскость с блоками порядка 2^n является одноточечным расширением схем, двойственных $AG(n, 2)$.

3.3. Расширения обобщенных четырехугольников. В этом разделе рассматриваются расширения обобщенных четырехугольников, не предполагающие какого-либо группового действия. Результаты о расширениях обобщенных четырехугольников с флаг-транзитивной группой автоморфизмов можно найти в обзоре Камерона, Хьюза, Пазини [22].

Обобщенный четырехугольник назовем *квазиклассическим*, если $\{s, t\} = \{q-1, q+1\}$ для некоторой степени q простого числа или s и t являются неотрицательными степенями одного и того же простого числа. Автором [76] найден (довольно громоздкий) список допустимых параметров сильно регулярных геометрий, являющихся треугольными расширениями квазиклассических обобщенных четырехугольников.

ТЕОРЕМА 3.16 (Камерон, Хьюз, Пазини [22]). Пусть $\mathbf{S}$ является расширенным обобщенным четырехугольником $EGQ(s, t)$, $\varphi_0 = \min\{\varphi(a, L)\}$, где минимум берется по все антифлагам с $\varphi(a, L) \neq 0$.

- (1) Если $d(\mathbf{S}) = s - 2\varphi_0 + 5 > 3$, то $t = 1$.
- (2) Если $d(\mathbf{S}) = s + 1$, то либо $s = 2$ и $\mathbf{S}$ – аффинное полярное пространство диаметра 3, либо $t = 1$ и $\mathbf{S}$ является геометрией Джонсона $\mathcal{J}_{s+1}$, либо $s = 1$ и $\mathbf{S}$ – расширенная двойственная решетка.

Эти результаты уточняются в работе Дель Фра, Гинелли и Пазини [44]. Для EGQ пусть индекс φ_0 определен как и выше, $\mu = \min\{\mu(a, b) \mid d(a, b) = 2\}$.

ТЕОРЕМА 3.17 (Дель Фра, Гинелли, Пазини [44]). Пусть $\mathbf{S}$ является расширенным обобщенным четырехугольником $EGQ(s, t)$, d – диаметр точечного графа, $\varphi_0 = \min\{\varphi(a, L)\}$, где минимум берется по всем антифлагам с $\varphi(a, L) \neq 0$. Тогда справедливы оценки:

- (1) $d \leq \max\{3, (st + 4s - 5t)/(2t + 2) - 2\varphi_0 + 4\}$;
- (2) $d \leq \max\{3, s - \varphi_0 + 5 - \sqrt{\mu/t}\}$;
- (3) $d \leq \max\{3, 2(s + 1 - \varphi_0) + 5 - 4\mu/(st + 1)\}$.

Некоторый прогресс достигнут в изучении расширений обобщенных четырехугольников с небольшим числом точек на прямой. Треугольные расширения $GQ(2, t)$ найдены в работе Бюкенхаута, Юбо [12]. Для каждого значения $t = 1, 2$ и 4 имеется единственное одноточечное расширение $GQ(2, t)$ (Тас [117]).

ТЕОРЕМА 3.18 (Махнев, Падучих [89]). Пусть геометрия $\mathbf{S}$ является треугольным расширением $GQ(3, t)$, Γ – ее точечный граф. Тогда выполняется одно из следующих утверждений.

- (1) $t = 1$, Γ – либо граф Джонсона $J(8, 4)$ или его частное, либо один из двух локально $GQ(3, 1)$ -графов на 40 вершинах.
- (2) $t = 3$ и Γ – граф ранга 3 для $U_5(2)$.
- (3) $t = 9$ и Γ – граф Маклафлина.
- (4) $t = 5$ и Γ – граф диаметра 3 на 160 вершинах, имеющий относительно любой вершины диаграмму, изображенную на рис. 9.

Рис. 9. Локально $GQ(3, 5)$ -граф

Эта теорема является следствием результатов нескольких авторов. Во-первых, параметр t равен 1, 3, 5 или 9 (см. Пэйн и Тас [100]). Случай $t = 1$ рассмотрен в работе Блокхейса и Броувера [2]. В работе автора [80] найдены сильно регулярные локально $GQ(3, t)$ -графы. Если $t = 3$, то автором [77] доказано, что Γ – сильно регулярный граф с параметрами $(176, 40, 12, 8)$. Пасечник [96] с помощью компьютерных вычислений получил тот же результат. Им же установлено, что любой сильно регулярный локально $GQ(3, 3)$ -граф изоморфен графу ранга 3 для унитарной группы $PSU(5, 2)$. Пасечник [97] снова с помощью компьютерных вычислений доказал, что $EGQ(3, 9)$ является графом Маклафлина. Чисто комбинаторное доказательство этого факта получено автором и Падучих [90]. Наконец, случай $t = 5$ рассмотрен автором [85] (анонсировано в [79]). Существование локально $GQ(3, 5)$ -графа из заключения теоремы получено Ешиарой [129], но вопрос о его единственности остается открытым.

При исследовании локально $GQ(4, t)$ -графов особый интерес вызывает случай $t = 2$. Описание гипервалов из $GQ(4, 2)$ получено автором [83]. Подграф Δ из $GQ(s, t)$ называется *гипервалом*, если любая прямая пересекает Δ по 0 или 2 точкам.

ТЕОРЕМА 3.19 (Махнев, Падучих [91]). *Пусть геометрия $\mathbf{S}$ является треугольным расширением $GQ(4, 2)$, и ее точечный граф Γ вполне регулярен. Тогда Γ является одним из графов:*

- (1) *сильно регулярный граф с параметрами $(126, 45, 12, 18)$ на множестве векторов нормы 1 в 6-мерном ортогональном пространстве над $GF(3)$ типа “—” с отношением смежности, задаваемым ортогональностью, имеющий группу автоморфизмов $O_6^-(3)$;*
- (2) *единственный дистанционно регулярный локально $GQ(4, 2)$ -граф на 378 вершинах с массивом пересечений $(45, 32, 12, 1; 1, 6, 32, 45)$ (это 3-накрытие графа из пункта (1)).*

3.4. Некоторые обобщения расширений. В этом разделе рассматриваются геометрии с диаграммой $L.pG$ и элементами типов 0, 1 и 2, называемыми точками, прямыми и плоскостями соответственно. Такие геометрии называются локально частичными геометриями.

Пространство прямых порядка (r, s) является $2-(r(s+1)+1, r+1, 1)$ -схемой, т.е. частичной геометрией $pG_{r+1}(r, s)$. В случае $r = 1$ мы получим обычную расширенную частичную геометрию. Для любой связной геометрии с диаграммой $L.pG$ порядки элементов типов 0, 1 и 2 не зависят от выбора этих элементов и обозначаются r, s и t соответственно. При этом геометрия обозначается как $LpG(r, s, t)$. Геометрия $LpG(r, s, t)$ является треугольной тогда и только тогда, когда она $(\alpha r + 1)$ -однородна.

Рис. 10. $L.pG$ -диаграмма

ТЕОРЕМА 3.20 (Дель Фра, Гинелли [43]). *Пусть d – диаметр точечного графа $LpG(r, s, t)$, $\varphi_0 = \min\{\varphi(a, L)\}$, где минимум берется по все антифлагам s*

$\varphi(a, L) \neq 0$. Тогда справедливы оценки:

$$(1) \quad d \leq \max\{2, \min\{d_1, d_2, d_3, d_4\}\}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= [s/2] - \alpha + 3, & d_2 &= [(rs - 2\varphi_0)/(r + 1)] + 4, \\ d_3 &= [(s - r - \alpha)/2] + 3, & d_4 &= [(rs - \varphi_0)/(r + 1)] - r + 4; \end{aligned}$$

$$(2) \quad d \leq \max\{3, \min\{d_5, d_6\}\}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} d_5 &= [(t(s + 1)/4 + s - \alpha)/(t + 1)] - \alpha + 4, \\ d_6 &= \left[\frac{r(t(s + 1) + 4(s + t + 1 - \alpha))}{2(r + 1)(t + 1)} - \frac{2\varphi_0}{(r + 1)} \right] + 4. \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что граница из пункта (1) теоремы 3.20 достигается.

ПРИМЕР 3.9. В линейном пространстве F_2^{s+2} пусть множество точек P состоит из векторов с четным числом нулевых координат; множество блоков (плоскостей) B состоит из векторов с нечетным числом нулевых координат; точка инцидентна блоку, если они различаются в единственной координате; множество прямых состоит из пар точек, лежащих в общем блоке. Тогда геометрия $\mathcal{G}_{s+2} = (P, B)$ является треугольной $EpG_2(s, 1)$ с диаметром $d = [s/2] - \varphi + 4$.

Дальнейшим обобщением для EpG_α является геометрия $\mathcal{S}$ со следующей диаграммой типа $(pG.A_m.pG)$ ранга $n = m + 2, m \geq 1$. Как обычно, точка, прямая, плоскость, ..., двойственная прямая, двойственная точка означают элементы типов $1, 2, 3, \dots, n - 1, n$. Если x — элемент $\mathcal{S}$, то тенью x называется множество точек $\sigma(x)$ из $\mathcal{S}$, инцидентных с x . Мы можем сформулировать следующее свойство:

(Int) если $\sigma(x) \cap \sigma(y)$ не пусто для некоторых элементов x, y геометрии $\mathcal{S}$, то найдется такой элемент z из $\mathcal{S}$, инцидентный x и y , что $\sigma(z) = \sigma(x) \cap \sigma(y)$.

В статье Дель Фра, Гинелли и Пазини [45] показано, что почти все геометрии, принадлежащие диаграмме $(pG.A_m.pG)$ с $m \geq 3$, удовлетворяющие свойству (Int), известны.

Двойным (h, k) -усечением проективной геометрии размерности $h + n + k$ называется геометрия $\mathcal{G}$, образованная всеми i -мерными проективными подпространствами для $i = h, h + 1, \dots, h + n - 1$. Это усечение принадлежит диаграмме $(L^D.A_{n-2}.L)$.

ТЕОРЕМА 3.21 (Спрагу [112]). *Геометрия, принадлежащая диаграмме $(L^D.A_{n-2}.L)$, является двойным усечением проективной геометрии тогда и только тогда, когда она удовлетворяет свойству (Int).*

В заключение этой теоремы входят и проективные геометрии как $(0, 0)$ -усечения.

Верхним k -усечением аффинной геометрии размерности $n + k$ (принадлежащей диаграмме $(Af.A_{n+k-1})$) называется геометрия $\mathcal{G}$, образованная всеми i -мерными аффинными подпространствами для $i = 1, 2, \dots, n$. Это усечение принадлежит диаграмме $(Af.A_{n-2}.L)$.

ТЕОРЕМА 3.22 (Дель Фра, Гинелли, Пазини [45]). Пусть геометрия $\mathcal{G}$ принадлежит диаграмме $(Af.A_{n-2}.L)$. Если $n \geq 4$ или каждая прямая содержит более трех точек, то $\mathcal{G}$ является верхним усечением аффинной геометрии.

Нижним k -усечением полярного пространства ранга $n+k$ (принадлежащего диаграмме (C_{n+k})) называется геометрия $\mathcal{G}$, образованная всеми i -мерными вполне сингулярными подпространствами для $i = k+1, \dots, n+k$ (эти подпространства мы назовем точками, прямыми и т. д.). Это усечение принадлежит диаграмме $(L^D.C_{n-1})$.

ТЕОРЕМА 3.23 (Ронан [102]). Пусть геометрия $\mathcal{G}$ принадлежит диаграмме $(L^D.C_{n-1})$ с $n \geq 4$. Геометрия $\mathcal{G}$ является нижним усечением полярного пространства тогда и только тогда, когда она удовлетворяет свойству (Int).

Для данного невырожденного полярного пространства $\mathcal{S}$ ранга n гиперплоскостью называется такое истинное подмножество точек H , что каждая прямая из $\mathcal{S}$, не содержащаяся в H , пересекает H в единственной точке. Аффинным полярным пространством $\mathcal{G}$ называется геометрия, полученная удалением из $\mathcal{S}$ всех сингулярных подпространств, содержащихся в H (Коэн и Шульц [23]).

Пусть K_H – поточечный стабилизатор H в группе автоморфизмов геометрии $\mathcal{G}$, A – подгруппа из K_H . Тогда естественно определяется частное $\mathcal{G}/A$, называемое стандартным частным $\mathcal{G}$ (естественно, разрешается $A = 1$) и принадлежащее диаграмме $(Af.C_{n-1})$.

Рис. 11. $pG.A_m.pG$ -диаграмма

ТЕОРЕМА 3.24 (Кайперс и Пазини [26]). Геометрия, принадлежащая диаграмме $(Af.C_{n-1})$ с $n \geq 3$, является стандартным частным аффинного полярного пространства тогда и только тогда, когда она удовлетворяет свойству (Int).

Имеется общая конструкция для построения различных семейств геометрий. Пусть X, Y – подпространства из $PG(m, q)$ размерностей x, y соответственно ($x = m$ и $y = -1$ разрешаются). Через $\Gamma_m|_Y^X$ обозначим геометрию всех истинных подпространств из $PG(m, q)$, не пересекающих Y и вместе с X порождающих $PG(m, q)$. Размерности этих подпространств и ранг n геометрии принимают следующие значения:

- (1) если $x < m$ и $y \geq 0$, то размерности равны $m-x-1, m-x, \dots, m-y-2, m-y-1$ и $n = x-y+1$;
- (2) если $x < m$ и $y = -1$, то размерности равны $m-x-1, m-x, \dots, m-1$ и $n = x-y$;
- (3) если $x = m$ и $y \geq 0$, то размерности равны $0, 1, \dots, m-y-1$ и $n = x-y$;
- (4) если $x = m$ и $y = -1$, то размерности равны $0, 1, \dots, m-1$ и $n = x-y-1$.

В последнем случае мы имеем $PG(m, q)$. Если $x = m-1$ и $y = -1$, то $\Gamma_m|_Y^X = AG(m-1, q)$.

Если $x = m$ и $y = 0$, то $\Gamma_m|_Y^X$ является геометрией, двойственной к $AG(m-1, q)$, причем Y является бесконечно удаленной точкой.

Если $x < m - 1$ и $y = -1$, то геометрия называется *разреженным* (attenuated) пространством. Эта геометрия принадлежит диаграмме $(N.A_{n-1})$, где N означает сеть $pG_t(s, t)$, $s = q^{m-x} - 1$, $t = q$.

Если $x = m$ и $y \geq 1$, то $\Gamma_m|_Y^X$ является геометрией, двойственной к предыдущей (двойственное разреженное пространство). Эта геометрия принадлежит диаграмме $(A_{n-1}.N^D)$.

Если $x = m - 1$ и $y = 0$, то геометрия называется *биаффинным* пространством. Эта геометрия принадлежит диаграмме $(Af.A_{n-2}.Af^D)$.

Если $x = m - 1$ и $y \geq 1$, то $\Gamma_m|_Y^X$ называется *аффинным разреженным* пространством. Эта геометрия принадлежит диаграмме $(Af.A_{n-2}.N^D)$.

Если $x < m - 1$ и $y = 0$, то $\Gamma_m|_Y^X$ является геометрией, двойственной к предыдущей (двойственное аффинно разреженное пространство). Эта геометрия принадлежит диаграмме $(N.A_{n-2}.Af^D)$.

Если $x < m - 1$ и $y \geq 1$, то геометрия называется *дважды разреженным* пространством. Эта геометрия принадлежит диаграмме $(N.A_{n-2}.N^D)$.

Можно определить верхние усечения для разреженных пространств (двойственно, нижние усечения для двойственных разреженных пространств). Эти усечения принадлежат диаграмме $N.A_m.L$ (двойственно, $(L^D A_m.N^D)$).

Пусть невырожденное полярное пространство $\mathcal{S}$ ранга r естественно вложено в $P = PG(m, q)$. Пусть X — подпространство из P коразмерности x , $1 \leq x \leq r - 2$. Построим новую геометрию $\mathcal{S}^X$, элементами которой являются все сингулярные подпространства, порождающие вместе с X $PG(m, q)$. Их размерности равны $x - 1, x, \dots, r - 1$, а геометрия имеет ранг $n = r - x + 1 \geq 3$, удовлетворяет свойству (Int) и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $x = 1$, геометрия $\mathcal{S}^X$ является аффинным полярным пространством с диаграммой $(Af.C_{r-x})$;
- (2) $x > 1$, геометрия $\mathcal{S}^X$ называется *разреженным полярным* пространством и имеет диаграмму $(N.C_{r-x})$, где N означает сеть $pG_t(s, t)$, $s = q^x - 1$, $t = q$.

ТЕОРЕМА 3.25 (Дель Фра, Гинелли, Пазини [44]). Пусть геометрия $\mathcal{G}$ удовлетворяет свойству (Int) и принадлежит диаграмме $(pG.A_m.pG)$ с $m \geq 3$ и r, s, t как в начале раздела. Тогда $\mathcal{G}$ либо является геометрией из заключения теорем 3.22–3.24, либо принадлежит одной из диаграмм $(Af.A_m.N^D)$, $(N.A_m.N^D)$ или $(N.C_{m+1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Aschbacher M. The non-existence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57 // J. Algebra. 1971. V. 19. P. 538–540.
- [2] Blokhuis A., Brouwer A. E. Locally 4-by-4 grid graphs // J. Graph Theory. 1989. V. 13. P. 229–244.
- [3] Bose R. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs // Pacif. J. Math. 1963. V. 13. P. 389–419.
- [4] Brown M. R. Semipartial geometries and generalized quadrangles of order (r, r^2) // Simon Stevin. 1998. V. 5. P. 187–205.
- [5] Brouwer A., Cohen A., Neumaier A. Distance Regular Graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

- [6] Brouwer A., van Lint J. Strongly regular graphs and partial geometries // Enumeration and Design / ed. M. Jackson and S. Vanstone. New York: Academic Press, 1984. P. 85–122.
- [7] Buekenhout F. Diagrams for geometries and groups // J. Combin. Theory. Ser. A. 1979. V. 27. P. 121–151.
- [8] Buekenhout F. The basic diagram of a geometry // Lecture Notes in Math. 1981. V. 893. P. 1–29.
- [9] Buekenhout F. (g, d^*, d) -gons // Finite Geometries / ed. N. Johnson et al. New York: Marcel Dekker, 1983. P. 93–112.
- [10] Buekenhout F. Diagram geometries for sporadic groups // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 132–142.
- [11] Buekenhout F. Foundations of incidence geometry // Handbook of Incidence Geometry / ed. F. Buekenhout. Amsterdam: Elsevier, 1995. P. 63–105.
- [12] Buekenhout F., Hubaut X. Locally polar spaces and related rank 3 groups // J. Algebra. 1977. V. 45. P. 391–434.
- [13] Buekenhout F., Lefevre C. Generalized quadrangles in projective spaces // Arch. Math. 1974. V. 25. P. 540–552.
- [14] Buekenhout F., Van Maldeghem H. Remarks on finite generalized hexagons and octagons with a point transitive automorphism group // Finite Geometry and Combinatorics / ed. F. De Clerck et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 89–102.
- [15] Buekenhout F., Pasini A. Finite diagram geometries extending buildings // Handbook of Incidence Geometry / ed. F. Buekenhout. Amsterdam: Elsevier, 1995. P. 1143–1254.
- [16] Caldebrank A. On uniformly packed $[n, n - k, 4]$ codes over $GF(q)$ and a class of caps in $PG(k - 1, q)$ // J. London Math. Soc. 1982. V. 26. P. 365–384.
- [17] Caldebrank A., Kantor W. The geometry of two-weight codes // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 18. P. 97–122.
- [18] Cameron P. Partial quadrangles // Quart. J. Math. 1974. V. 25. P. 1–13.
- [19] Cameron P. Permutation Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
- [20] Cameron P., Fisher P. H. Small extended generalized quadrangles // European J. Combin. 1990. V. 11. P. 403–413.
- [21] Cameron P., Goethals J., Seidel J. Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents // J. Algebra. 1978. V. 55. P. 257–280.
- [22] Cameron P., Hughes D. R., Pasini A. Extended generalized quadrangles // Geom. Dedicata. 1990. V. 35. №1–3. P. 193–228.
- [23] Cohen A., Shult E. Affine polar spaces // Geom. Dedicata. 1990. V. 35. №1–3. P. 43–76.
- [24] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of Finite Groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [25] Coxeter H. Twelve points in $PG(5, 3)$ with 95040 self-transformations // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. V. 247. P. 279–293.
- [26] Cuypers H., Pasini A. Locally polar geometries with affine planes // European J. Combin. 1992. V. 13. P. 39–57.
- [27] Danzer L., Schulte E. Reguläre Inzidenzkomplexe I // Geom. Dedicata. 1982. V. 13. P. 295–308.
- [28] De Clerck F. The pseudo-geometric $(t, s, s - 1)$ -graphs // Simon Stevin. 1979. V. 53. P. 301–317.
- [29] De Clerck F. New partial geometries constructed from old ones // Bull. Math. Soc. Belg. – Simon Stevin. 1998. V. 5. P. 255–263.
- [30] De Clerck F., Dye R., Thas J. An infinite class of partial geometries associated with the hyperbolic quadric in $PG(4n - 1, 2)$ // European J. Combin. 1980. V. 1. P. 323–326.
- [31] De Clerck F., De Soete M., Gevaert H. A characterization of the partial geometry $T_2^*(K)$ // European J. Combin. 1987. V. 8. P. 121–127.
- [32] De Clerck F., Del Fra A., Ghinelli D. Pointsets in partial geometries // Advances in Finite Geometries and Designs. Proc. 3rd Isle of Thorns Conf. Chelwood Gate, UK, 1990 / ed. J. Hirshfeld et al, 1991. P. 93–110.

- [33] De Clerck F., Gevaert H., Thas J. Partial geometries and copolar spaces // *Combinatorics'88* / ed. A. Barlotti. Rende: Mediterranean Press, 1988. P. 267–280.
- [34] De Clerck F., Van Maldeghem H. On linear representation of (α, β) -geometries // *European J. Combin.* 1994. V. 15. P. 3–11.
- [35] De Clerck F., Van Maldeghem H. Some classes of rank 2 geometries // *Handbook of Incidence Geometry: Buildings and Foundations* / ed. F. Buekenhout. Amsterdam: Elsevier, 1995. P. 433–475.
- [36] De Clerck F., Thas J. Partial geometries in finite projective spaces // *Arch. Math.* 1978. V. 30. P. 537–540.
- [37] De Clerck F., Thas J. The embedding of $(0, \alpha)$ -geometries in $PG(n, q)$. Part I // *Ann. Discrete Math.* 1983. V. 18. P. 229–240.
- [38] Debroey I. Semipartial geometries satisfying the diagonal axiom // *J. Geom.* 1979. V. 13. P. 171–190.
- [39] Debroey I., Thas J. On polarities of symmetric semipartial geometries // *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 1977. V. 62. P. 607–612.
- [40] Debroey I., Thas J. On semipartial geometries // *J. Comb. Theory A.* 1978. V. 25. P. 242–250.
- [41] Debroey I., Thas J. Semipartial geometries in $PG(2, q)$ and $PG(3, q)$ // *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 1978. V. 64. P. 147–151.
- [42] Delandtsheer A. Dimensional linear spaces // *Handbook of Incidence Geometry: Buildings and Foundations* / ed. F. Buekenhout. Amsterdam: Elsevier, 1995. P. 193–294.
- [43] Del Fra A., Ghinelli D. Diameter bounds for locally partial geometries // *European J. Combin.* 1991. V. 12. P. 293–307.
- [44] Del Fra A., Ghinelli D., Pasini A. Diameter bound for an EGQ // *J. Combin. Inform. System Sci.* 1990. V. 15. P. 256–270.
- [45] Del Fra A., Ghinelli D., Pasini A. One diagram for many geometries // *Advances in Finite Geometries and Designs. Proc. 3rd Isle of Thorns Conf. Chelwood Gate, UK, 1990* / ed. J. Hirshfeld et al, 1991. P. 111–140.
- [46] Del Fra A., Ghinelli D., Hughes D. R. Extended partial geometries with minimal μ // *Geom. Dedicata.* 1992. V. 42. №2. P. 119–128.
- [47] Del Fra A., Ghinelli D., Meixner T., Pasini A. Flag-transitive extensions of C_n geometries // *Geom. Dedicata.* 1992. V. 37. №3. P. 253–273.
- [48] Deza M., Laurent M. Bouquets of matroids, d -injection geometries and diagrams // *J. Geom.* 1987. V. 29. P. 12–35.
- [49] Feit W. Finite projective planes and a question about primes // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1990. V. 108. P. 561–564.
- [50] Feit W., Higman G. The nonexistence of certain generalized polygons // *J. Algebra.* 1962. V. 1. P. 114–131.
- [51] Gevaert H. Partiele Meetkunden, Maximale Bogen en Flocks of Kwadratische Kegels // *Ph. D. Thesis. Gent: State Univ. Gent, 1987.*
- [52] Goethals J., Seidel J. The regular two-graph on 276 vertices // *Discrete Math.* 1975. V. 12. P. 143–158.
- [53] Haemers W. A new partial geometry constructed from the Hoffman–Singleton graph // *Finite Geometries and Designs. Proc. 2nd Isle of Thorus Conf., 1980* / ed. P. Cameron et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981. P. 119–127.
- [54] Haemers W. Regular two-graphs and extensions of partial geometries // *European J. Combin.* 1991. V. 12. P. 115–123.
- [55] Haemers W. There exist no $(76, 21, 2, 7)$ strongly regular graph // *Finite Geometries and Combinatorics* / ed. F. De Clerck et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 175–176.
- [56] Hall J. Classifying copolar spaces and copolar graphs // *Quart. J. Math.* 1982. V. 33. P. 421–449.
- [57] Hering C. Transitive linear groups and linear groups which contain irreducible subgroups of prime order // *Geom. Dedicata.* 1974. V. 2. P. 425–460.

- [58] Hill R. Caps and groups // Atti dei convegni Lincei 1976, Colloquio Intern. sulle Teorie Combinatorie, Roma. V. II. P. 384–394.
- [59] Higman D. G. Flag transitive collineation groups of finite projective spaces // Illinois J. Math. 1962. V. 6. P. 434–446.
- [60] Higman D. G., McLaughlin J. Geometric ABA-groups // Illinois J. Math. 1961. V. 5. P. 382–397.
- [61] Hirshfeld J., Thas J. The characterizations of projections of quadrics over finite fields of even order // J. London Math. Soc. 1980. V. 22. P. 226–238.
- [62] Hobart S. A., Hughes D. R. Extended partial geometries: nets and dual nets // European J. Combin. 1990. V. 11. P. 357–372.
- [63] Hobart S. A., Hughes D. R. EpGs with minimal μ . II // Geom. Dedicata. 1992. V. 42. P. 129–138.
- [64] Hoffman A., Singleton R. On Moore graphs of diameter 2 and 3 // IBM J. Res. Develop. 1960. V. 4. P. 497–504.
- [65] Huang T. On quasi-semisymmetric designs // Finite Geometry and Combinatorics: Abstracts. Gent: State Univ. Gent, 1997. P. 63–65.
- [66] Hughes D. R. Extended partial geometries: dual 2-designs // European J. Combin. 1990. V. 11. P. 459–471.
- [67] Huybrechts C., Pasini A. Flag-transitive extensions of dual projective spaces // Bull. Math. Soc. Belg. – Simon Stevin. 1998. V. 5. P. 341–352.
- [68] Ivanov A., Shpectorov S. A characterization of the association schemes of Hermitian forms // J. Math. Soc. Japan. 1991. V. 43. P. 25–48.
- [69] Kantor W. Symplectic groups, symmetric designs and line ovals // J. Algebra. 1975. V. 33. P. 43–58.
- [70] Kantor W. Strongly regular graphs defined by spreads // Israel J. Math. 1982. V. 41. P. 298–312.
- [71] Kantor W. Generalized polygons, SCABs and GABs // Buildings and the Geometry of Diagrams / ed. L. A. Rosati. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 79–158. (Lecture Notes in Math. V. 181.)
- [72] Kantor W. Primitive permutation groups of odd degree, and an application to finite projective planes // J. Algebra. 1987. V. 106. P. 15–45.
- [73] Кондратьев А. С., Махнев А. А., Старостин А. И. Конечные группы // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 24. М.: ВИНТИ, 1986. С. 3–120.
- [74] Lam C., Thiel L., Swiercz S., McKay J. The non-existence of ovals in a projective plane of order 10 // Discrete Math. 1983. V. 45. P. 319–321.
- [75] Makhnev A. Pseudogeometric graphs connected with partial geometries $pg(4, R, 1)$ // Math. Inst. Oberwolfach. V. 32. Tagungsbericht, 1991. P. 11.
- [76] Махнев А. А. О сильно регулярных расширениях обобщенных четырехугольников // Матем. сб. 1993. Т. 184. С. 123–132.
- [77] Махнев А. А. Конечные локально $GQ(3, 3)$ -графы // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. С. 1314–1324.
- [78] Махнев А. А. О псевдогеометрических графах частичных геометрий $pG_2(4, t)$ // Матем. сб. 1995. Т. 187. С. 97–112.
- [79] Makhnev A. Locally $GQ(3, 5)$ graphs and geometries with short lines // Intern. Conf. dedicated to the memory of P. Kazimirskii, Abstracts. L'viv, 1995. P. 59–60.
- [80] Махнев А. А. О сильно регулярных расширениях обобщенных четырехугольников с короткими прямыми // Дискрет. матем. 1996. Т. 8. С. 31–39.
- [81] Махнев А. А. О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ -подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3. С. 71–83.
- [82] Makhnev A. On extensions of partial geometries // Algebra. Proc. of the 3rd International Conference on Algebra. Krasnoyarsk, Russia, 1993 / ed. Yu. L. Ershov et al. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 165–169.
- [83] Махнев А. А. Расширения $GQ(4, 2)$, описание гипервалов // Дискрет. матем. 1997. Т. 9. С. 101–116.

- [84] Махнев А. А. О псевдогеометрических графах некоторых частичных геометрий // Вопросы алгебры. Т. 11. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1997. С. 60–67.
- [85] Махнев А. А. Локально $GQ(3, 5)$ -графы и геометрии с короткими прямыми // Дискрет. матем. 1998. Т. 10. С. 72–86.
- [86] Makhnev A. Partial geometries and the Krein condition // Intern. Math. Congress, Abstracts. Univ. Bielefeld, 1998. P. 282.
- [87] Махнев А. А. О псевдогеометрических графах частичных геометрий $pG_2(4, t)$, II // Дискрет. матем. (в печати).
- [88] Махнев А. А. О группах автоморфизмов частичных геометрий и их расширений // Международный алгебраический семинар, посв. 70-летию кафедры высшей алгебры МГУ. Тез. докл. М.: Изд-во МГУ, 1999. С. 41–42.
- [89] Makhnev A. A., Paduchikh D. V. The classification of locally $GQ(3, q)$ -graphs // Intern. Alg. Conf. dedicated to the memory of D.K. Faddeev: Abstracts. St. Petersburg, 1997. P. 84.
- [90] Махнев А. А., Падучих Д. В. О структуре локально $GQ(3, 9)$ графов // Дискр. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5. С. 61–77.
- [91] Махнев А. А., Падучих Д. В. Вполне регулярные локально $GQ(4, 2)$ графы // Межд. алгебр. конф. памяти А. Г. Куроша. Тез. докл. М., 1998. С. 188–189.
- [92] Mathon R. The partial geometries $pg(5, 7, 3)$ // Congr. Numer. 1981. V. 31. P. 129–139.
- [93] Mathon R. A new family of partial geometries // Finite Geometry and Combinatorics: Abstracts. Gent: State Univ. Gent, 1997. P. 83–84.
- [94] Meixner T. Construction of chamber systems of type M with transitive automorphism group // Buildings and the Geometry of Diagramms / ed. L. A. Rosati. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 207–217. (Lecture Notes in Math. V. 181.)
- [95] Meixner T. Locally finite Tits chamber systems with transitive group of automorphisms in characteristic 3 // Geom. Dedicata. 1990. V. 35. P. 13–30.
- [96] Pasechnik D. V. The triangular extensions of a generalized quadrangle of order $(3, 3)$ // Bull. Math. Soc. Belg. – Simon Stevin. 1995. V. 2. P. 509–518.
- [97] Pasechnik D. V. The extensions of the generalized quadrangle of order $(3, 9)$ // European J. Combin. 1996. V. 17. P. 751–755.
- [98] Pasini A. Diagrams and incidence structures // J. Combin. Theory. Ser. A. 1982. V. 33. P. 186–194.
- [99] Pasini A., Yoshiara S. Flag-transitive Buekenhout geometries // Combinatorics'90 / ed. A. Barlotti et al. Amsterdam: Elsevier, 1992. P. 403–447.
- [100] Payne S., Thas J. Finite Generalized Quadrangles. Boston: Pitman, 1984. (Research Notes in Math. V. 110.)
- [101] Pellegrino G. Su una interpretazione geometrica dei gruppi M_{11} ed M_{12} di Mathieu e su alcuni $t-(v, k, \lambda)$ -disegni deducibili da una $12^4_{5,3}$ calotta completa // Atti Sem. Math. Fis. Univ. Modena. 1974. V. 23. P. 103–117.
- [102] Ronan M. Extending locally truncated buildings and chamber systems // Proc. London Math. Soc. 1986. V. 53. P. 385–406.
- [103] Scharlau R. Buildings // Handbook of Incidence Geometry: Buildings and Foundations / ed. F. Buekenhout. Amsterdam: Elsevier, 1995. P. 477–646.
- [104] Schulte E. Reguläre Inzidenzkomplexe. II, III // Geom. Dedicata. 1983. V. 14. P. 33–79.
- [105] Segre B. Forme e geometrie Hermitiane, con particolare riguardo al caso finito // Ann. Math. Pura Appl. 1965. V. 70. P. 1–202.
- [106] Seidel J. Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3 // Linear Algebra Appl. 1968. V. 1. P. 281–298.
- [107] Seidel J. On two-graphs and Shult's characterization of symplectic and orthogonal geometries over $GF(2)$ // TH-Report 73-WSK-02. Technical Univ. Eindhoven, 1973.
- [108] Seitz G. Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Ann. of Math. 1973. V. 97. P. 27–56.

- [109] Shult E. Groups, polar spaces and related structures // Combinatorics, Proc. Advanced Study Inst. Breukelen / ed. M. Hall and J. van Lint. V. 55. Amsterdam: Math. Centre Tract, 1974. P. 130–161.
- [110] Spence E. Is Taylor's graph geometric? // Discrete Math. 1992. V. 106/107. P. 449–454.
- [111] Sprague A. Pasch's axiom and projective spaces // Discrete Math. 1981. V. 33. P. 79–87.
- [112] Sprague A. Rank 3 incidence structures admitting dual-linear, linear diagram // J. Combin. Theory. Ser. A. 1985. V. 38. P. 254–259.
- [113] Thas J. A. Construction of partial geometries // Simon Stevin. 1972/1973. V. 46. P. 95–98.
- [114] Thas J. A. Partial geometries in finite affine spaces // Math. Z. 1978. V. 178. P. 1–13.
- [115] Thas J. A. Some results on quadrics and a new class of partial geometries // Simon Stevin. 1981. V. 55. P. 129–139.
- [116] Thas J. A. Semi-partial geometries and spreads of classical polar spaces // J. Combin. Theory. Ser. A. 1983. V. 35. P. 58–66.
- [117] Thas J. A. Extensions of finite generalized quadrangles // Sympos. Math. 1986. V. 28. P. 127–143.
- [118] Thas J., Debroey I., De Clerck F. The embedding of $(0, \alpha)$ -geometries in $PG(n, q)$. Part II // Discrete Math. 1983. V. 51. P. 283–292.
- [119] Thas J., De Clerck F. Partial geometries satisfying the axiom of Pash // Simon Stevin. 1977. V. 51. P. 123–137.
- [120] Tits J. Les groupes de Lie exceptionnels et leur interpretation géométrique // Bull. Soc. Math. Belg. 1956. V. 8. P. 48–81.
- [121] Tits J. Sur la trialité et certains groupes qui s'en deduisent // Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 1959. V. 2. P. 14–60.
- [122] Tits J. Geometries polyedriques et groupes simples // Atti della II Riunione del Gruppoement de Mathematiciens d'Expression Latine, Firenze–Bologna (1961), 1963. P. 66–88.
- [123] Tits J. Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs. Berlin: Springer-Verlag, 1974. (Lecture Notes in Math. V. 386.)
- [124] Tits J. A local approach to buildings // The Geometric Vein. The Coxeter Festschrift. Berlin: Springer-Verlag, 1982. P. 519–547.
- [125] Tzanakis N., Wolfskill J. The diophantine equation $x^2 = 4q^{a/2} + 4q + 1$ with an application to coding theory // J. Number Theory. 1987. V. 26. P. 96–116.
- [126] Wallis W. Configurations arising from maximal arcs // J. Combin. Theory. Ser. A. 1973. V. 15. P. 115–119.
- [127] Wilbrink H., Brouwer A. $(57, 14, 1)$ strongly regular graph does not exist // Indag. Math. 1983. V. 45. P. 117–121.
- [128] Wilbrink H., Brouwer A. A characterization of two classes of semipartial geometries by their parameters // Simon Stevin. 1984. V. 58. P. 273–288.
- [129] Yoshiara S. On some flag-transitive non-classical $c.C_2$ -geometries // European J. Combin. 1993. V. 14. P. 59–77.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила в редакцию

26.04.1999