Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 77–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:04:33

УДК 517.946

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ СВОЙСТВО САМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИХ АТРИБУТОВ

С. А. НАЗАРОВ

Описан широкий класс краевых задач, для которых применение эллиптической теории сводится к элементарным алгебраическим операциям. Класс характеризуется полиномиальным свойством: полуторалинейная форма, отвечающая задаче, возникает только на конечномерном линейном пространстве $\mathcal{P}$ векторных полиномов. Такое свойство обеспечивает эллиптичность краевой задачи, а ее ядро и коядро выражаются в терминах $\mathcal{P}$. Для областей с кусочно гладкими границами или выходами на бесконечность (коническими, цилиндрическими и периодическими) дополнительно предоставляются фрагменты асимптотических формул для решений и конкретизируются общие условные теоремы о фредгольмовости (в том числе, за счет модификации обычных весовых норм), а также вычисляется индекс оператора краевой задачи. Полиномиальное свойство помогает выполнить асимптотический анализ краевых задач в тонких областях и их сочленениях. Именно, несложные манипуляции с $\mathcal{P}$ дают возможность при редукции размерности предсказать размеры результирующей системы и порядки входящих в нее дифференциальных операторов, устанавливают ее эллиптичность и предоставляют полную информацию о строении пограничных слоев. Приведенные результаты иллюстрируются примерами из теории упругости и гидромеханики.

Библиография: 128 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	77
§ 1. Полиномиальное свойство	80
§ 2. Краевые задачи в областях с кусочно гладкой границей	92
§ 3. Краевые задачи в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность	112
§ 4. Краевые задачи в тонких областях	118
§ 5. Пограничные слои для тонких областей и их сочленений	127
Список литературы	137

Введение

Систематические исследования краевых задач для эллиптических систем уравнений в частных производных сформировали разветвленную теорию, стержневыми

результатами которой являются: реализация краевых задач в областях с гладкими границами как фредгольмовых операторов в классах Гёльдера и L_p ([1]–[5] и др.), а также пространствах распределений ([5]–[8] и др.); вариационные постановки задач в гильбертовых энергетических пространствах ([9]–[12], [5] и др.); построение шкал пространств с весовыми нормами для краевых задач в областях с кусочно гладкими границами (угловые и конические точки, ребра, выходы на бесконечность и пр.) и асимптотические формулы для решений ([13]–[21] и др.). Эти и иные результаты, в частности, асимптотические методы, интенсивно разрабатываемые в последнее время, оказали существенное влияние на развитие многих прикладных дисциплин и были востребованы в разнообразных задачах теории дифракции, механики деформируемых тел, гидродинамики, теории разрушения и пр. Цель данного обзора – описать широкий класс краевых задач, в основном, формально самосопряженных, для которых проверка свойств, необходимых для применения эллиптической теории, и конкретизация ее общих утверждений сводятся к простым, чисто алгебраическим операциям (к ним в данном контексте причисляется и дифференцирование полиномов).

Начальным этапом, предвещающим использование аппарата эллиптической теории, служит изучение *модельных задач*. В случае областей с гладкими границами таковыми оказываются система уравнений с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ и аналогичная краевая задача в полупространстве $\mathbb{R}_+^n$. Если доказательство эллиптичности самой системы сводится к нахождению определителя матрицы, полиномиально зависящей от параметра $\xi \in \mathbb{R}^n$, то для проверки условий накрытия этой системы граничными операторами (условий Шапиро–Лопатинского) требуется решить краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси с параметром $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Во втором случае прямые вычисления становятся необозримыми уже в задаче Неймана для системы анизотропной теории упругости (21 свободная константа), а имеющееся описание условий накрытия в терминах корней неких полиномов ничуть не снижает их трудоемкости (ср. с комментарием к определению 10.1.1 в книге [7]). Еще сложнее обстоят дела с краевыми задачами в областях с ребрами, для которых возникают новые *модельные задачи в двугранных углах* и известные условия фредгольмовости оператора исходной задачи формулируются как требования однозначной разрешимости таких модельных задач в специальных весовых пространствах (см. [22]–[24], [20; гл. 6, 7] и др.). К сожалению, в общем случае пересказать эти требования в алгебраических терминах вряд ли возможно, а пример, в котором они заведомо не выполнены, доставляет все та же задача Неймана для трехмерного анизотропного упругого тела с гладким ребром на поверхности.

Для исправления ситуации с задачей Неймана в работах [25], [26] для гладких ребер и в [27] для многогранных углов были введены *ступенчатые* весовые пространства, обеспечивающие фредгольмовость оператора краевой задачи (распределение весовых множителей в соответствующих нормах отличается от использованного ранее в [28], [29] для других целей; см. далее п. 3 §2). Попутно в [26] был намечен, а в [27] отчетливо выделен класс формально самосопряженных эллиптических систем с *полиномиальным свойством* – именно для них развитый подход приводил к успеху. Отметим, что в книге [19] задачи Неймана на полиэдральных областях изучались в пространствах Соболева–Слободянского $H^s(\Omega)$ с нецелым (и не произвольным) показателем s .

Говоря приблизительно, полиномиальное свойство означает, что квадратичная (по-

луторалинейная) форма, отвечающая краевой задаче, вырождается лишь на *конечномерном линеале $\mathcal{P}$ векторных полиномов*. По своей природе это свойство присуще всем *стационарным* задачам математической физики, в частности, упоминавшейся задаче анизотропной теории упругости. В [30] было замечено, что названное свойство гарантирует как эллиптичность системы, так и ее покрытие граничными операторами (в [26], [27] и [20], [31] эллиптичность краевых задач постулировалась). В [32] требования к структуре системы были значительно ослаблены при сохранении абсолютного большинства результатов (в терминологии из § 1 ранее рассматривались матрицы дифференциальных операторов с простой структурой), а в [33] схема исследования была приспособлена к некоторым несамосопряженным краевым задачам (см. п. 5 § 1 и пример 1.13).

Если квадратичная форма a , порожденная эллиптическим по Петровскому оператором $\mathcal{L}$ порядка $2m$, удовлетворяет “усиленному” неравенству Гординга

$$(0.1) \quad \|\nabla^m u; L_2(\Omega)\|^2 \leq ca(u, u; \Omega) \quad \forall u = (u_1, \dots, u_T), \quad u_j \in H^m(\Omega),$$

то $\mathcal{L}$, разумеется, обладает полиномиальным свойством, причем линеал $\mathcal{P}$ состоит из всех полиномов степени не выше $m - 1$. В [32] установлено, что полиномиальное свойство имеется и у *формально положительных операторов* [12], для которых неравенство типа Гординга–Корна

$$(0.2) \quad \|u; H^m(\Omega)\|^2 \leq C(a(u, u; \Omega) + \|u; L_2(\Omega)\|^2) \quad \forall u \in H^m(\Omega)^T$$

выводится в [12] также на основе чисто алгебраических предположений. Пример оператор-матрицы, обладающей полиномиальным свойством, но не являющейся формально положительной, доставляет система уравнений Стокса (см. далее п. 6 § 1).

В отличие от (0.1) неравенство (0.2) годится только для ограниченных областей, а в случае некомпактных границ требуются *весовые неравенства Корна*, в которых весовые множители определяются как дифференциальной структурой оператор-матрицы $\mathcal{L}$, так и геометрической формой выходов на бесконечность. Подобные неравенства известны лишь для весьма узкого класса операторов (см. [34]–[38] и др.), но сами краевые задачи в неограниченных областях возникают естественным образом при асимптотическом анализе различных сингулярных возмущений и, описывая явление пограничного слоя, приобрели теперь немаловажное значение (см. [39]–[43] и др.). Поэтому далее обсуждаются задачи в областях с коническими, цилиндрическими и квазиполициндрическими (периодическими) выходами на бесконечность. Полиномиальное свойство не только помогает установить их фредгольмовость, но и позволяет выразить в терминах линеала $\mathcal{P}$ фрагменты асимптотических разложений решений, описать ядро и коядро оператора задачи, найти условия убывания решения при $|x| \rightarrow \infty$.

Основная идея большинства доказательств довольно-таки проста: вектор-функция u конструируется так, чтобы при подстановке ее на обе позиции в формулу Грина часть слагаемых исчезала и возникало равенство $a(u, u; \Omega) = 0$, означающее, что $u \in \mathcal{P}$. Последнее включение используется либо для идентификации ядра оператора задачи, либо для отрицания предположенного свойства, если u – заведомо не полином (центральным моментом является конечномерность линеала $\mathcal{P}$ и в принципе он может состоять из произвольных, не обязательно полиномиальных функций, однако обобщения такого рода малосодержательны – см. замечание 3.1 в [32]). Ключевой

трюк — подбор самих пробных функций u , и на этом пути удастся получить частичную информацию о спектре пучков, порожденных модельными задачами в конусах, цилиндрах и квазцилиндрах. Более точно, конкретизируется строение канонических систем жордановых цепочек, отвечающих собственным числам пучков из некоторой узкой полосы на комплексной плоскости. Тем не менее, вкупе с общими теоремами эллиптической теории (условия фредгольмовости оператора задачи, представления его коядра посредством ядра сопряженной задачи, формулы для приращения индекса и т. п.) установленные отдельные свойства спектра дают возможность закончить исследование краевых задач и предоставить алгебраическое описание их атрибутов.

Применение полиномиального свойства в асимптотическом анализе не ограничивается исследованием пограничных слоев. В § 4 изложены результаты [30] для краевых задач в тонких областях $\Omega(\varepsilon)$, которые при $\varepsilon \rightarrow +0$ стягиваются к подмногообразиям S меньшей размерности (типичные примеры — пластины и стержни). Асимптотический подход подразумевает *редукцию размерности* — вывод результирующей задачи на S , из решений которой сооружается асимптотическое приближение к решению исходной задачи в $\Omega(\varepsilon)$. В [44], [45] (см. также [46; гл. 9] и [43; гл. 15, 16]) обнаружена аналогия в процедурах построения результирующих систем и жордановых цепочек родственных пучков. Как упоминалось в предыдущем абзаце, линейал полиномов $\mathcal{P}$ содержит ряд сведений о структуре жордановых цепочек, что позволило в [30] дать алгебраическое описание результирующей задачи: при помощи несложных манипуляций с $\mathcal{P}$ устанавливаются размеры результирующей системы и порядки входящих в нее дифференциальных операторов, проверяются априори ее эллиптичность и формальная самосопряженность. Подчеркнем, что в [30] изучены задачи теории осреднения (см. [47]–[51] и др.), однако для упрощения изложения в данном обзоре быстрые осцилляции коэффициентов и границы области исключены из рассмотрения.

§ 1. Полиномиальное свойство

1. Матричные операторы простой структуры. Пусть $\mathcal{L}(x, D_x)$ есть $(T \times T)$ -матрица, составленная из дифференциальных операторов

$$(1.1) \quad \mathcal{L}_{jk}(x, \nabla_x) = \sum_{|\alpha| \leq t_j + t_k} l_{jk}^\alpha(x) \nabla_x^\alpha,$$

где $l_{jk}^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка в $\mathbb{R}^n$; $t_1, \dots, t_T$ и T — натуральные числа, $\nabla_x = \text{grad}$,

$$\nabla_x^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Предположим, что в любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с $(n-1)$ -мерной гладкой границей $\partial\Omega$ и компактным замыканием $\overline{\Omega}$ верна формула Грина

$$(1.2) \quad (\mathcal{L}u, v)_\Omega + (\mathcal{N}u, \mathcal{D}v)_{\partial\Omega} = a(u, v; \Omega),$$

где $u = (u_1, \dots, u_T)$, $v = (v_1, \dots, v_T) \in C^\infty(\overline{\Omega})^T$, $(\cdot, \cdot)_\Xi$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Xi)$, скалярном или векторном; $\mathcal{N}$ и $\mathcal{D}$ — $(m \times T)$ -матрицы,

$m = t_1 + \dots + t_T$; $\mathcal{D}$ – система Дирихле (см. [5], [6], [8] и др.), $\mathcal{N}(x, \nabla_x)$ – оператор краевых условий Неймана; a – симметричная полуторалинейная форма

$$(1.3) \quad a(u, v; \Xi) = \sum_{j,k=1}^T \sum_{|\sigma| \leq t_j} \sum_{|\gamma| \leq t_k} \int_{\Xi} a_{jk}^{\sigma\gamma}(x) \nabla_x^\gamma u_k \nabla_x^\sigma \overline{v_j} \, dx,$$

причем $a_{jk}^{\sigma\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и согласно сказанному

$$(1.4) \quad a(u, v; \Xi) = \overline{a(v, u; \Xi)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Далее используется лишь такое свойство системы Дирихле:

$$(1.5) \quad \forall \Phi \in C^\infty(\partial\Omega)^m \quad \exists U \in C^\infty(\overline{\Omega})^T: \quad \mathcal{D}U = \Phi \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Образует $(m \times T)$ -матрицы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{T}$ из строк $\mathcal{B}_q$ и $\mathcal{T}_q$, выбранных одним из следующих двух способов:

$$(1.6) \quad \mathcal{B}_q = \mathcal{N}_q, \mathcal{T}_q = \mathcal{D}_q \quad \text{или} \quad \mathcal{B}_q = \mathcal{D}_q, \mathcal{T}_q = -\mathcal{N}_q$$

(своим для каждого $q = 1, \dots, m$). Из (1.2) и (1.4), (1.6) вытекает “полная” формула Грина

$$(1.7) \quad (\mathcal{L}u, v)_\Omega + (\mathcal{B}u, \mathcal{T}v)_{\partial\Omega} = (u, \mathcal{L}v)_\Omega + (\mathcal{T}u, \mathcal{B}v)_{\partial\Omega},$$

устанавливающая формальную самосопряженность краевой задачи

$$(1.8) \quad \mathcal{L}(x, \nabla_x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(1.9) \quad \mathcal{B}(x, \nabla_x)u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

в которой $f = (f_1, \dots, f_T)$ и $g = (g_1, \dots, g_m)$. Подчеркнем, что граничные операторы $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ и т. п. зависят от области Ω , но это в обозначениях не указывается.

Один из классов оператор-матриц простой структуры возникает при использовании матричной записи. Именно, векторы u и f , g интерпретируются как столбцы, а в формулах

$$(1.10) \quad \mathcal{L}(x, \nabla_x) = \Lambda(x, \nabla_x)^* A(x) \Lambda(x, \nabla_x),$$

$$(1.11) \quad a(u, v; \Xi) = (A\Lambda u, \Lambda v)_\Xi$$

под Λ и A подразумеваются матрицы размера $N \times T$ и $N \times N$ соответственно (N – некоторое натуральное число). Элементы $\Lambda_{hj}(x, \nabla_x)$ матрицы Λ – дифференциальные операторы порядка t_j с гладкими коэффициентами, а A – матрица-функция, симметрическая, положительно определенная и бесконечно дифференцируемая во всех точках $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, Λ и Λ^* – формально сопряженные операторы. Нетрудно убедиться в справедливости представлений (1.1), (1.3) и неравенства

$$(1.12) \quad a(u, u; \Omega) \geq c_A(\Omega) \|\Lambda u; L_2(\Omega)\|^2,$$

где $c_A(\Omega)$ – положительная постоянная, зависящая от A и Ω .

В результате интегрирования по частям (в том числе и на границе $\partial\Omega$) появляется формула Грина (1.2). Так, при $t_1 = \dots = t_T = 1$ имеем $m = T$ и

$$(1.13) \quad \mathcal{D}v = v, \quad \mathcal{N}(x, \nabla_x)u = \Lambda(\nu(x))^* A(x) \Lambda(x, \nabla_x),$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Ясно, что всегда дело можно свести к ситуации, в которой A – единичная матрица, но запись (1.10), (1.11) более удобна для операторов с постоянными коэффициентами. В частности, $\Lambda(\nabla_x)^* = \Lambda(-\nabla_x)^t$ в случае вещественных коэффициентов у Λ ; t – знак транспонирования.

2. Матричные операторы усложненной структуры. Расширим матрицу $\mathcal{L}$ до размера $T' \times T'$:

$$(1.14) \quad \mathcal{L}'(x, \nabla_x) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x, \nabla_x), & \mathcal{Q}^*(x, \nabla_x) \\ \mathcal{Q}(x, \nabla_x), & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $T' > T$, $\mathcal{Q}$ – матрица размера $(T' - T) \times T$ с элементами $\mathcal{Q}_{pk}$, причем $\text{ord } \mathcal{Q}_{pk} = t_p + t_k$, $p = T + 1, \dots, T'$, $k = 1, \dots, T$ и

$$(1.15) \quad t_{T+1}, \dots, t_{T'} \leq 0.$$

Ясно, что $m' = t_1 + \dots + t_{T'} \leq m$.

Оператор (1.14) наследует формальную самосопряженность от $\mathcal{L}$. Опишем краевые условия, которыми можно снабдить $\mathcal{L}'$. Пусть на $\partial\Omega$ выполняются представления

$$(1.16) \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}' \\ \mathcal{N}'' \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}' \\ \mathcal{S}\mathcal{Q} + \mathcal{M}\mathcal{D}' \end{pmatrix}$$

и одновременно верна формула Грина

$$(1.17) \quad (\mathcal{Q}^* u', v)_\Omega = (u', \mathcal{Q}v)_\Omega - (\mathcal{K} u', \mathcal{D}' v)_{\partial\Omega}$$

для любых гладких функций $u' = (u_{T+1}, \dots, u_{T'})$ и $v = (v_1, \dots, v_T)$. Матрицы $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{N}'$, $\mathcal{D}'$ обладают размерами $m \times (T' - T)$, $(m - m') \times (T' - T)$ и $m' \times T$ соответственно, а их элементы – дифференциальные операторы на $\partial\Omega$. Наконец, $\mathcal{M}(s, \nabla_s)$ – оператор-матрица размером $(m - m') \times m$, а через s , несколько вольно, обозначаются координаты точки в карте подходящего атласа на $(n - 1)$ -мерном подмногообразии $\partial\Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Пусть $d_q + t_j$ и $n_q + t_k$ – порядки дифференциальных операторов $\mathcal{D}_{qj}$ и $\mathcal{N}_{qk}$. В соответствии с (1.2) имеем

$$t_j + t_k - 1 = -1 + \text{ord } \mathcal{L}_{jk} = \text{ord } \mathcal{D}_{qj} + \text{ord } \mathcal{N}_{qk} = t_j + t_k + d_q + n_q,$$

т.е. $n_q = -1 - d_q \geq 0$ и $d_k < 0$. Таким образом, требование (1.15), приводящее к неравенству $\text{ord } \mathcal{D}_{pj} \leq t_j$, необходимо для принципиальной возможности подставить в (1.17) подматрицу $\mathcal{D}'$ из (1.16).

Матрицы $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{T}'$ соорудим из строк $\mathcal{B}'_q$ и $\mathcal{T}'_q$, $q = 1, \dots, m'$, определяемых, как и в (1.6), одним из двух способов

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \mathcal{B}'_q &= (\mathcal{N}' + \mathcal{M}^* \mathcal{N}'', \mathcal{K})_q, & \mathcal{T}'_q &= (\mathcal{D}', 0)_q \\ \text{или} \\ \mathcal{B}'_q &= (\mathcal{D}', 0)_q, & \mathcal{T}'_q &= -(\mathcal{N}' + \mathcal{M}^* \mathcal{N}'', \mathcal{K})_q. \end{aligned}$$

В (1.18) фигурируют строки составных $(m' \times \mathcal{T}')$ -матриц; в частности, к $(m' \times T)$ -матрице $\mathcal{D}'$ справа приписаны $T' - T$ нулевых m' -столбцов.

ЛЕММА 1.3 ([32]). 1) *Справедлива формула Грина*

$$(1.19) \quad (\mathcal{L}'\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega + (\mathcal{B}'\mathbf{u}, \mathcal{T}'\mathbf{v})_{\partial\Omega} - (\mathcal{J}\mathcal{Q}u, \mathcal{N}''v)_{\partial\Omega} \\ = (\mathbf{u}, \mathcal{L}'\mathbf{v})_\Omega + (\mathcal{T}'\mathbf{u}, \mathcal{B}'\mathbf{v})_{\partial\Omega} - (\mathcal{N}''u, \mathcal{J}\mathcal{Q}v)_{\partial\Omega},$$

в которой $\mathbf{u} = (u, u') = (u_1, \dots, u_{T'})$ и $\mathbf{v} = (v, v')$ – произвольные функции из $C^\infty(\bar{\Omega})^{T'}$.

2) Если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega})^{T'}$ и $\mathcal{Q}u = \mathcal{Q}v = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$(1.20) \quad (\mathcal{L}\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega + ([\mathcal{N}' + \mathcal{M}^* \mathcal{N}'']u + \mathcal{K}u', \mathcal{T}'v)_{\partial\Omega} = a(u, v; \Omega).$$

Подчеркнем, что в (1.19) фигурируют новые (по сравнению с (1.7)) интегралы по поверхности $\partial\Omega$, которые исчезают при выполнении условий леммы 1.3 (2). Далее рассмотрение краевой задачи (1.8), (1.9) и аналогичной ей задачи (1.8)', (1.9)' с операторами $\mathcal{L}'$, $\mathcal{B}'$ ведется параллельно, причем (1.19) и (1.20) придают роли формул Грина (1.7) и (1.2). (Так, например, задача (1.8)', (1.9)' самосопряжена относительно формулы (1.19).) Для упрощения формулировок в следующих разделах, если не оговорено противное, под (1.8), (1.9) подразумеваем *обе упомянутые задачи*, а под $\mathcal{L}$ – как оператор простой структуры, так и оператор (1.14) сложной. В связи с этим позволяем себе вместо $\mathbf{u}$, T' и т. п. писать u , T и т. п.

3. Полиномиальное свойство. Будем говорить, что пара $\{\mathcal{L}, a\}$ обладает *полиномиальным свойством*, если для любой (в том числе неограниченной) области $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ верно следующее утверждение:

$$1^0. u \in C^\infty(\bar{\Xi})^T, \mathcal{L}u = 0 \text{ в } \Xi, a(u, u; \Xi) = 0 \Leftrightarrow u \in \mathcal{P}|_\Omega.$$

Здесь фигурирует некоторый *конечномерный* линейал полиномов переменных x с коэффициентами из $\mathbb{C}^T$.

При условии

$$2^0. u \in C^\infty(\bar{\Xi})^T, a(u, u; \Xi) = 0 \Leftrightarrow u \in \mathcal{P}^a|_\Xi$$

полиномиальное свойство присуще *самой форме* (а не паре “оператор-форма”). Конечномерный линейал $\mathcal{P}^a$, разумеется, может отличаться от $\mathcal{P}$ (и не только в случае $T' > T$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Для операторов усложненной структуры начало строки 1^0 читается так: $\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Xi})^{T'}$, $\mathcal{L}'\mathbf{u} = 0 \dots$. Строка 2^0 в изменениях не нуждается – речь в ней идет о фрагменте u функции $\mathbf{u} = (u, u')$.

Если $\mathcal{L}$ – оператор простой структуры, то $\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{P}^a : \mathcal{L}p = 0\}$, а полиномиальное свойство имеется у формы a в *полном объеме* тогда, когда выполнено следующее требование:

$$3^0. a(p, v; \Xi) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}, v \in C^\infty(\bar{\Xi})^T.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5 ([32]). Для операторов простой структуры условие 1^0 вытекает из 2^0 , а в случае области $\Omega = \Xi$ с гладкой границей требование 3^0 равносильно такому:

$$4^0. \mathcal{N}(x, \nabla_x)p(x) = 0, x \in \partial\Omega \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Отметим, что в доказательстве используется свойство (1.5) системы Дирихле и в формулу Грина (1.2) подставляются функции $u = p$ и $v = U$.

4. Формально положительные операторы ([12]). Оператор-матрица $\Lambda(x, \nabla_x)$ называется *алгебраически комплектной*, а оператор (1.10) – *формально положительным*, если при некотором натуральном ρ_Λ выполнено следующее условие:

5⁰. для всякой строки полиномов $P = (P_1, \dots, P_T)$, обладающей обобщенной однородностью с показателем $\rho \geq \rho_\Lambda$,

$$(1.21) \quad P_k(z\xi) = z^{t_k+\rho} P_k(\xi) \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, \dots, T,$$

найдется строка дифференциальных операторов $Q = (Q_1, \dots, Q_N)$, такая, что

$$(1.22) \quad P(\nabla_x) = Q(x, \nabla_x) \Lambda(x, \nabla_x).$$

Так как $\text{ord } \Lambda_{hk} = t_k$, в силу (1.21) и (1.22) $\text{ord } Q_h = \rho$. Если коэффициенты операторов постоянны, то равенство (1.22) переписывается в виде $P(\xi) = Q(\xi) \Lambda(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, объясняющем происхождение термина “алгебраическая комплектность”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 ([32]). При условии 5⁰ оператор $\mathcal{L}$ и форма a из (1.10) и (1.11) удовлетворяют 1^0-4^0 , причем

$$(1.23) \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}^a = \{p : \Lambda(x, \nabla_x)p(x) = 0, \quad x \in \Xi\}.$$

Понятия, введенные в 5⁰, находят применение и для операторов усложненной структуры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7 ([32]). Пусть матрица $\mathcal{Q}^*(x, \nabla_x)$ алгебраически комплектна и форма a из (1.3) подчинена условию 2⁰, причем $\mathcal{L}p = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}^a$, таких, что $\mathcal{Q}p = 0$. Тогда пара $\{\mathcal{L}', a\}$ обладает полиномиальным свойством 1⁰.

5. Эллиптичность краевой задачи. Обозначим через $\mathcal{L}^0$ и a^0 оператор и форму, получающиеся из $\mathcal{L}$ и a замораживанием коэффициентов в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, т.е. в согласии с (1.1)

$$(1.24) \quad \mathcal{L}^0 = (\mathcal{L}_{jk}^0)_{j,k=1}^T, \quad \mathcal{L}_{jk}^0(x, \nabla_x) = \sum_{|\alpha|=t_j+t_k} l_{jk}^\alpha(x^0) \nabla_x^\alpha,$$

а выражение $a^0(u, v; \Xi)$ получается из (1.3) заменой $a_{jk}^{\sigma\gamma}(x)$ на $a_{jk}^{\sigma\gamma}(x^0)$ и сужением суммирования до $|\sigma| = t_j$, $|\gamma| = t_k$. Точно так же определяются главные части $\mathcal{B}^0$, $\mathcal{Q}^0$, $\mathcal{L}'^0$ и т.п. операторов $\mathcal{B}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{L}'$ и т.п. Элементам $\mathcal{B}_{qj}$ матрицы $\mathcal{B}$ приписываются порядки $r_q + t_j$.

Будем говорить, что полиномиальное свойство у пары $\{\mathcal{L}, a\}$ наследуется при замораживании в точке x^0 , если для $\{\mathcal{L}^0, a^0\}$ справедливо требование 1⁰ (быть может, с новым линейным полиномом; см. далее пример 1.16). Такая же терминология используется для 2⁰ и 3⁰.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Пусть алгебраическикомплектная матрица $\Lambda(\nabla_x)$ составлена из однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Тогда полиномиальное свойство пары $\{\mathcal{L}, a\}$ из (1.10), (1.11) выдерживает замораживание коэффициентов в любой точке.

В очередных утверждениях устанавливается, что полиномиальное свойство обеспечивает *эллиптичность* краевой задачи (1.8), (1.9) и, как следствие, *фредгольмовость* ее оператора

$$(1.25) \quad \mathcal{A}^l = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}: \mathcal{D}^l H(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}^l H(\Omega);$$

здесь $H^s(\Omega)$ и $H^{s+1/2}(\partial\Omega)$ – пространства Соболева–Слободецкого,

$$(1.26) \quad \mathcal{D}^l H(\Omega) = \prod_{k=1}^T H^{l+t_k}(\Omega),$$

$$(1.27) \quad \mathcal{R}^l H(\Omega) = \prod_{j=1}^T H^{l-t_j}(\Omega) \times \prod_{q=1}^m H^{l-r_q-1/2}(\partial\Omega).$$

Подчеркнем, что при постановке самой краевой задачи не требовалось ничего, кроме правильной структуры оператора $\mathcal{L}$ (см. (1.1) или (1.14)) и наличия формул Грина (1.2) и (1.17), приводящих к (1.7) и (1.19). Навязанная структура гарантирует *лишь непрерывность* отображения (1.25) при условии

$$(1.28) \quad l \geq \max\{t_1, \dots, t_T; 1 + r_1, \dots, 1 + r_m\} = \max\{t_1, \dots, t_T\} \equiv \max t.$$

ТЕОРЕМА 1.9 ([30], [32]). 1) Если для любой точки $x^0 \in \overline{\Omega}$ пара $\{\mathcal{L}^0, a^0\}$ обладает полиномиальным свойством, то задача (1.8), (1.9) эллиптическая и оператор $\mathcal{A}^l$ из (1.25), (1.28) фредгольмов.

2) Если полиномиальное свойство пары $\{\mathcal{L}, a\}$ выдерживает замораживание во всех точках $x^0 \in \overline{\Omega}$, то

$$(1.29) \quad \ker \mathcal{A}^l = \mathcal{P}(\mathcal{B}) \equiv \{p \in \mathcal{P} : \mathcal{B}p = 0 \text{ на } \partial\Omega\},$$

$$(1.30) \quad \text{coker } \mathcal{A}^l = \{(p, \mathcal{T}p, \mathcal{N}'p') : p \in \mathcal{P}(\mathcal{B})\},$$

но для операторов простой структуры компонента $\mathcal{N}'p'$ убивается.

Итак, формула (1.29) по линейалу полиномов $\mathcal{P}$ выстраивает все решения однородной задачи (1.8), (1.9). Кроме того, в соответствии с (1.30) условия ее разрешимости принимают вид

$$(1.31) \quad (f, p)_\Omega + (g, \mathcal{T}p)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$$

для операторов простой структуры и вид

$$(1.31') \quad (f, p)_\Omega + (g, \mathcal{T}p)_{\partial\Omega} + (\mathcal{S}f', \mathcal{N}''p)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$$

в случае усложнения структуры. Проблем с определением последнего интеграла в правой части (1.31)' не возникает. В самом деле,

$$f' = (f_{1+T'}, \dots, f_T) \in H^{l-t_{1+T'}}(\Omega) \times \dots \times H^{l-t_{T'}}(\Omega) \subset H^l(\Omega)^{T'-T},$$

$$\mathcal{S}f' \in H^{l-d_{1+m'}-1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{l-d_m-1/2}(\partial\Omega) \subset H^{l+1/2}(\partial\Omega)^{m-m'},$$

так как в силу требования (1.15), представления (1.16) и замечания 1.2

$$\text{ord } \mathcal{S}_{qp} = \text{ord } \mathcal{D}_{qj} - \text{ord } \mathcal{Q}_{pj} = d_p + t_j - (t_p + t_j) = d_p - t_p < -t_p,$$

$$q = 1 + m', \dots, m, \quad p = 1 + T, \dots, T', \quad j = 1, \dots, T.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Формулой Грина (1.7), приводящей к обычным условиям разрешимости (1.31), могут обладать не только операторы простой структуры (см. далее пример 1.16).

Приведем пояснения к доказательству теоремы 1.9. Равенство (1.29) выводится путем обращения к полиномиальному свойству 1^0 и подстановки произвольного решения однородной задачи (1.8), (1.9) в формулу Грина (1.2) или (1.20), левая часть которой исчезает. Аналогично равенство (1.30) получается при рассмотрении сопряженной задачи, совпадающей с (1.8), (1.9), причем переход от сопряженного оператора $(\mathcal{A}^l)^*$, заданного на пространстве распределений, к оператору $\mathcal{A}^l$ осуществляется за счет результатов [5], [6], [8] в случае (1.7) и [52] в случае (1.20). Продемонстрируем теперь, как делается заключение об эллиптичности, – используемый прием [30] является частью доказательств многих утверждений в обзоре.

Отсутствие эллиптичности у матрицы $\mathcal{L}^0(\nabla_x)$ означает, что $\det \mathcal{L}^0(\theta) = 0$ в некоторой точке θ единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ и, следовательно, существует такой столбец $b = (b_1, \dots, b_T)^t$, что $\mathcal{L}^0(\theta)b = 0 \in \mathbb{C}^T$ и $|b| \neq 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $\theta = e^1$, где e^h – орт оси x_h . Положим

$$(1.32) \quad w = (w_1, \dots, w_T), \quad w_j(x) = b_j \frac{d^{s-t_j} W}{dx_n^{s-t_j}}(x_n), \quad j = 1, \dots, T,$$

где $W \in C_0^\infty(0, 1)$ и s – натуральное число, $s \geq \max\{t_1, \dots, t_T\}$. Очевидно, что $\mathcal{L}^0(\nabla_x)w = 0$ и, в частности, $\mathcal{Q}^0(\nabla_x)w = 0$ для оператора из (1.14). Таким образом, можно применить формулу Грина (1.2) на кубе $\mathbb{Q} = \{x : 0 < x_p < 1\}$. Подставив в эту формулу на обе позиции построенную функцию w , убеждаемся в том, что $a(w, w; \mathbb{Q}) = 0$, поскольку поверхностные интегралы по противоположным граням либо взаимно сокращаются из-за разнонаправленности нормалей, либо аннулируются благодаря множителю $W \in C^\infty(0, 1)$. Итак, все требования из посылки в 1^0 выполнены, т.е. w – полином, что возможно лишь при $b = 0$ ввиду произвольности W . Найденное противоречие доказывает эллиптичность $\mathcal{L}^0(\nabla_x)$. Лишь незначительные модификации конструкции (1.32) нужны для проверки условий накрытия $\mathcal{L}^0(\nabla_x)$ граничным оператором $\mathcal{B}^0(\nabla_x)$ (см. [30], [32]).

Приведенные рассуждения опираются на формулу Грина (1.2) в области с кусочно гладкой границей (в кубе), в то время как она (формула) постулировалась только при гладкой поверхности $\partial\Omega$. Эта неувязка устраняется при помощи стандартного трюка. В формулу Грина на более широкой области подставляется произведение

$$w^\delta(x) = \chi_\delta(x_1) \times \dots \times \chi_\delta(x_n) w(x),$$

где χ_0 – характеристическая функция отрезка $[0, 1]$, а $t \mapsto \chi_\delta(t)$ – та же “ступенька”, сглаженная в δ -окрестностях точек $t = 0$ и $t = 1$. Предельный переход $\delta \rightarrow +0$ превращает объемные интегралы, содержащие производные множителей $\chi_\delta(x_h)$, в поверхностные и обеспечивает нужную формулу Грина на $\mathbb{Q}$, отличающуюся, вообще говоря, от (1.2) строением интегралов по границе, но вполне заменяющую (1.2).

Отметим, что для неотрицательной формы a (см., например, (1.12)) из равенства $a(u, u; \Omega) = 0$ вытекает, что $a(u, u; \omega) = 0$ при любой подобласти $\omega \subset \Omega$, а значит, в 1^0 – 3^0 достаточно брать области Ξ с компактным замыканием и гладкой границей.

Эллиптичность краевой задачи с формально положительным оператором (1.10) можно также установить, обратившись к ее обобщенной постановке и следующему неравенству Корна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11 ([12]). Если матрица $\Lambda(x, \nabla_x)$ алгебраически комплексна, то для функции $u \in \mathcal{D}^0 H(\Omega)$ справедливо неравенство

$$(1.33) \quad \|u; \mathcal{D}^0 H(\Omega)\| \leq c(\|\Lambda u; L_2(\Omega)\| + \|u; L_2(\Omega)\|),$$

в котором постоянная c зависит от Λ и Ω , но не от u .

Это же неравенство (1.33) позволяет рассмотреть несамосопряженные матричные операторы прежней структуры

$$(1.34) \quad \mathcal{L}(x, \nabla_x) = \Lambda^*(x, \nabla_x)(A(x) + iB(x))\Lambda(x, \nabla_x).$$

Здесь i – мнимая единица, A и B – симметрические гладкие матрицы-функции, $A(x)$ положительно определена при всех x . Разумеется, краевая задача (1.8), (1.9) перестает быть формально самосопряженной, однако теорема 1.9 (2) сохраняется в полном объеме. Дело в том, что, во-первых, оператор краевых условий Неймана принимает вид

$$(1.35) \quad \mathcal{N}(x, \nabla_x) = \mathcal{N}^0(x, \nabla_x)(A(x) + iB(x))\Lambda(x, \nabla_x),$$

во-вторых, переход к сопряженной задаче сводится к замене $+i$ на $-i$ в (1.34), (1.35) и, в-третьих, согласно (1.23) линейал полиномов $\mathcal{P}$ аннулируется оператором $\Lambda(x, \nabla_x)$, т.е. оказывается одинаковым для обеих задач (подробности см. в [32]).

6. Конкретные задачи математической физики. Обсудим ряд задач, имеющих явную физическую природу. Количество примеров, конечно же, можно было бы увеличить, но мы ограничиваемся двумя разделами механики – теорией упругости и гидродинамикой, предоставляющими иллюстративный материал и в следующих параграфах.

ПРИМЕР 1.12. Согласно матричную запись уравнений линейной теории упругости (см. [53]–[55], [12] и др.) с обозначениями из п. 1, обнаруживаем, что $A(x)$ – матрица Гука, построенная по аналогичному тензору упругих модулей и потому являющаяся симметрической и положительно определенной,

$$(1.36) \quad \Lambda(\xi)^t = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha\xi_3 & \alpha\xi_2 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \alpha\xi_3 & 0 & \alpha\xi_1 \\ 0 & 0 & \xi_3 & \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $T = T' = 3$, $t_1 = t_2 = t_3$ и $N = 6$. Столбец $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ интерпретируется как вектор смещений, а столбец

$$A\Lambda u = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \alpha^{-1}\sigma_{23}, \alpha^{-1}\sigma_{31}, \alpha^{-1}\sigma_{12})^t$$

содержит декартовы компоненты σ_{jk} тензора напряжений.

Матрица (1.36) алгебраически комплексна и $\rho_\Lambda = 2$ в 5^0 . Как нетрудно проверить, линейал полиномов (1.23) совпадает с пространством жестких смещений

$$(1.37) \quad \mathcal{P} = \{p(x) = a + b \times x : a, b \in \mathbb{R}^3\}$$

(крестом обозначено векторное произведение, все функции вещественные). Условия Дирихле $\mathcal{D}u \equiv u = 0$ отвечают жестко заземленной границе упругого тела, а условия Неймана – свободной или нагруженной, так как 3-столбец $\mathcal{N}(x, \nabla_x)u(x)$ из (1.13) является вектором $\sigma^\nu(u; x)$ нормальных напряжений на поверхности $\partial\Omega$. В соответствии с правилом (1.6) можно соорудить смешанные краевые условия, для чего второе слагаемое из (1.2) удобно переписать в виде

$$(1.38) \quad (\mathcal{N}u, \mathcal{D}v)_{\partial\Omega} = (\mathcal{U}\mathcal{N}u, \mathcal{U}\mathcal{D}v)_{\partial\Omega}$$

и лишь потом оперировать со строками матриц $\mathcal{U}\mathcal{N}$ и $\mathcal{U}\mathcal{D}$; здесь $\mathcal{U}$ – произвольная унитарная матрица-функция на $\partial\Omega$. Впрочем, подобные условия редко поддаются физическому осмыслению.

Для изотропного однородного упругого тела матрица A имеет вид

$$(1.39) \quad A = \text{diag}\{2\mu\mathbb{I}_3 + \lambda\mathbb{E}_3, 2\mu\mathbb{I}_3\},$$

где $\mu > 0$ и $\lambda \geq 0$ – постоянные Ламе, $\mathbb{I}_q$ – единичная $(q \times q)$ -матрица, а элементами $(q \times q)$ -матрицы $\mathbb{E}_q$ служат q^2 единиц.

ПРИМЕР 1.13. Деформированное состояние упругого электропроводящего тела (см., например, [56], [57]) описывается посредством системы дифференциальных уравнений с оператором $\mathcal{Q}(x, \nabla_x) = \Lambda(\nabla_x)^* Q(x) \Lambda(\nabla_x)$, где

$$(1.40) \quad \Lambda(\xi)^t = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha\xi_3 & \alpha\xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \alpha\xi_3 & 0 & \alpha\xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 & \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & -Q_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

Q_{11} и Q_{22} – вещественные, симметрические, положительно определенные матрицы размера 6×6 и 3×3 , а $Q_{12} = Q_{21}^t$ – вещественная (6×3) -матрица. При этом $u = (v_1, v_2, v_3, \varphi)^t$; φ – электрический потенциал, а v_j – смещения точек тела вдоль осей x_j . Все группы краевых условий, допускающие физическое истолкование, образуются по правилу (1.6).

Алгебраическая комплектность матрицы (1.40) (расширенной матрицы (1.36)) сомнений не вызывает. Вместе с тем, из-за “неправильного” знака при блоке Q_{22} оператор $Q(x, \nabla_x)$ не является формально положительным. Однако, переобозначив $u = (v_1, v_2, v_3, i\varphi)^t$ и

$$A = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

приходим к эквивалентной системе дифференциальных уравнений с оператором (1.34), у которого все необходимые свойства имеются. Таким образом, для краевых задач электропезоупругости верна теорема 1.9, в которой

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^a = \{p(x) = (a + b \times x, c) : a, b \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}\}.$$

ПРИМЕР 1.14. При рассмотрении пластины как двумерного объекта возникает система уравнений (1.8), в которой $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2, u_3)^t$, а оператор $\mathcal{L}$ имеет вид (1.10), причем $A = (6 \times 6)$ -матрица, симметрическая и положительно определенная, и

$$(1.41) \quad \Lambda(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \alpha\xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2\xi_1^2 & \alpha^2\xi_2^2 & \xi_1\xi_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т.е. $T = T' = 3$, $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 2$ и $N = 6$. Матрица (1.41) алгебраически комплектна (отметим, что $\rho_\Lambda = 2$ в 5^0) и

$$(1.42) \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}^a = \{p(x) = (c_1 - c_0x_2, c_2 + c_0x_1, C_0 + C_1x_1 + C_2x_2) : c_j, C_j \in \mathbb{R}\}.$$

Как и в предыдущих примерах, каждой возникающей конструкции можно придать физический смысл, но мы ограничимся констатацией следующего: компоненты u_1 и u_2 столбца u являются продольными смещениями в пластине, u_3 — поперечным, а краевые условия Дирихле

$$(1.43) \quad u_1(x) = 0, \quad u_2(x) = 0, \quad u_3(x) = 0, \quad \partial_\nu u_3(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

означают жесткое защемление края пластины. В (1.43) ∂_ν — производная вдоль внешней нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, а соответствующий граничный матричный оператор выглядит так:

$$(1.44) \quad \mathcal{D}(x, \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \nu_1(x)\xi_1 + \nu_2(x)\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Мы еще вернемся к задачам теории пластин в § 2 и § 4.

ПРИМЕР 1.15. Оператор системы уравнений Стокса

$$(1.45) \quad -\Delta_x u(x) + \text{grad } u'(x) = f(x),$$

$$(1.46) \quad -\text{div } u(x) = f'(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

допускает запись (1.14), в которой $T = 3$, $T' = 4$, $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ и $t_4 = 0$; кроме того, $m' = m = 3$ и

$$(1.47) \quad \mathcal{L}(\nabla_x) = -\text{diag}\{\Delta_x, \Delta_x, \Delta_x\}, \quad \mathcal{Q}^*(\nabla_x) = \nabla_x.$$

При этом $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, $\text{grad} = \nabla_x$ и $\text{div} = \nabla_x \cdot$ — векторные операции; $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ — поле скоростей, а $u' = u_4$ — гидростатическое давление в стационарном потоке жидкости.

Формулы Грина (1.2) и (1.17) конкретизируются так:

$$(1.48) \quad (-\Delta_x u, v)_\Omega + (\partial_\nu u, v)_\Omega = \sum_{j=1}^3 (\nabla_x u_j, \nabla_x v_j)_\Omega \equiv a(u, v; \Omega),$$

$$(1.49) \quad (\nabla_x u', v)_\Omega = (u', -\nabla_x \cdot v)_\Omega + (\nu u', v)_{\partial\Omega}.$$

Следовательно, в (1.16) $\mathcal{D} = \mathcal{D}' = \mathbb{I}_3$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}' = \text{diag}\{\partial_\nu, \partial_\nu, \partial_\nu\}$, $\mathcal{K} = \nu^t$; матрицы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{S}$ становятся пустыми и $(\mathcal{N}', \mathcal{K})\tilde{u} = \partial_\nu u + \nu u'$, где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^t$ — единичный вектор внешней нормали. Таким образом, формула Грина (1.19) теряет нестандартные интегралы с $\mathcal{S}$ и приобретает классический вид (см., например, [58]):

$$(1.50) \quad \{(-\Delta_x u + \nabla_x u', v)_\Omega + (-\nabla_x \cdot u, v')_\Omega\} + (\partial_\nu u + \nu u', v)_{\partial\Omega} \\ = \{(u, -\Delta_x v + \nabla_x v')_\Omega + (u', -\nabla_x \cdot v)\} + (u, \partial_\nu v + \nu v')_{\partial\Omega}.$$

Как показано в [58], граничные интегралы $(\partial_\nu u + \nu u', v)_{\partial\Omega}$ и т. п. можно заменить в (1.50) суммами $(u, \tau^{(\nu)}(\mathbf{v}))_{\partial\Omega} - (\nu \nabla_x \cdot u, v')_{\partial\Omega}$ и т. п., вернув формуле Грина строение (1.19). Здесь $\tau^{(\nu)} = (\tau_1^{(\nu)}, \tau_2^{(\nu)}, \tau_3^{(\nu)})^t$ — вектор нормальных напряжений,

$$(1.51) \quad \tau_j^{(\nu)} = \sum_{h=1}^3 \nu_h \tau_{jh}, \quad \tau_{jk}(\mathbf{u}) = e_{jk}(u) - \delta_{jk} u', \quad e_{jk}(u) = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Из (1.48) вытекает, что $\mathcal{P}^a = \mathbb{R}^3$. Так как алгебраическая комплектность матрицы $\mathcal{Q}^*(\xi) = \xi$ сомнений вызвать не может, предложение 1.7 устанавливает полиномиальное свойство 1^0 пары $\{\mathcal{L}, a\}$ из (1.47) и (1.48), причем $\mathcal{P} = \mathbb{R}^4$. Прежний прием (1.38), привлекающий унитарную матрицу $\mathcal{U}$, позволяет помимо условий прилипания $u = 0$ на $\partial\Omega$ включить в изложенную схему линейную часть условий на свободной поверхности

$$(1.52) \quad v \cdot u = 0, \quad \nu \times \tau^{(\nu)}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

(проекция вектора $\nu \times \tau^{(\nu)}$ на направление ν равна нулю тождественно и поэтому в (1.52) по существу присутствуют три краевых условия).

ПРИМЕР 1.16. Рассмотрим двумерную линейаризованную систему, описывающую течение мультиполярной жидкости

$$(1.53) \quad -\frac{\partial}{\partial x_1} t_{1k}(\mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial x_2} t_{2k}(\mathbf{u}) = f_k, \quad k = 1, 2; \quad -\nabla_x \cdot u = f_3 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$, u_1 и u_2 — скорости, $u' = u_3$ — давление, t_{jk} — модифицированные напряжения (моментные), $h > 0$ — параметр,

$$t_{jk}(\mathbf{u}) = e_{jk}(u) - \delta_{jk} u' - h \Delta_x e_{jk}(u), \quad j, k = 1, 2$$

(см. (1.51)). Для простоты некоторым физическим константам приданы конкретные значения (ср. с [59]). При $h = 0$ и $f_3 = 0$ соотношения (1.52) не отличаются от двумерных уравнений Стокса (1.45), (1.46). Оператор системы (1.51) записывается в виде (1.14), где $T = 2$, $T' = 3$, $t_1 = t_2 = 2$, $t_3 = -1$, $m = 4$, $m' = 3$ и

$$\mathcal{L}(\xi) = 2[h|\xi|^2 + 1] \begin{pmatrix} |\xi|^2 + \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 \\ \xi_2 \xi_1 & |\xi|^2 + \xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}^*(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Многократным интегрированием по частям (в том числе и вдоль контура $\partial\Omega$) выводим формулу Грина (1.2), в которой

$$\begin{aligned}
 a(u, v; \Omega) &= \frac{1}{2}(e_{jk}(u), e_{jk}(v))_{\Omega} + \frac{h}{2}(\nabla_x e_{jk}(u), \nabla_x e_{jk}(v))_{\Omega}, \\
 \mathcal{D}v &= (v_1, v_2, \partial_{\nu}v_1, \partial_{\nu}v_2), \quad \mathcal{N}u = (\mathcal{N}_1u, \mathcal{N}_2u, \mathcal{N}_3u, \mathcal{N}_4u), \\
 \mathcal{N}_{2+p}u &= h\nu_j\nu_k \frac{\partial}{\partial x_k} e_{jp}(u), \\
 \mathcal{N}_p u &= \nu_j [e_{jp}(u) - h\Delta_x e_{jp}(u)] - h\partial_s \left[s_j \nu_k \frac{\partial}{\partial x_k} e_{jp}(u) \right].
 \end{aligned}
 \tag{1.54}$$

Индексы j, k и p принимают значения 1 и 2; по j и k производится суммирование. Кроме того, $\nu = (\nu_1, \nu_2)^t$ и $s = (s_1, s_2)^t$ — единичные векторы нормали и касательной; $\partial_{\nu} = \nu \cdot \nabla_x$ и $\partial_s = s \cdot \nabla_x$.

Для формы a из (1.54) выполняется требование 2^0 и $\mathcal{P}^a = \{p(x) = (c_1 - c_0x_2, c_2 + c_0x_1) : c_q \in \mathbb{R}\}$. Поскольку $a^0(u, v; \Omega) = 2^{-1}h(\nabla_x e_{jk}(u), \nabla_x e_{jk}(v))_{\Omega}$, полиномиальное свойство выдерживает замораживание коэффициентов, однако линейные функции. Предложение 1.7 наделяет полиномиальным свойством 1^0 пару $\{\mathcal{L}', a\}$.

Для применения теоремы 1.9 об эллиптичности задач в Ω конкретизируем процедуру построения операторов краевых условий, изложенную в п. 2. Необходимая формула Грина (1.17) указана в (1.49). С целью вывести представление (1.16) воспользуемся приемом (1.38) и заменим в (1.54) операторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{N}$ такими:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}v &= (v_1, v_2 - \nu_2\partial_{\nu}v_1 + \nu_1\partial_{\nu}v_2, \nu_1\partial_{\nu}v_1 + \nu_2\partial_{\nu}v_2), \\
 \mathcal{N}u &= (\mathcal{N}_1u, \mathcal{N}_2u, -\nu_2\mathcal{N}_3u + \nu_1\mathcal{N}_4u, \nu_1\mathcal{N}_3u + \nu_2\mathcal{N}_4u).
 \end{aligned}
 \tag{1.55}$$

Теперь (3×4) -матрицу $\mathcal{D}'$ в (1.16) составим из строк $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$, отвечающих первым трем выражениям в правой части (1.55); аналогично из $\mathcal{N}$ конструируется $\mathcal{N}'$. Очевидная формула

$$\nu_1\partial_{\nu}v_1 + \nu_2\partial_{\nu}v_2 = \nabla_x \cdot v + \nu_2\partial_s v_1 - \nu_1\partial_s v_2$$

дает требуемое представление для $\mathcal{D}_4$; при этом в (1.16) $\mathcal{S} = 1$ (скаляр) и $\mathcal{M} = (\nu_2\partial_s, -\nu_1\partial_s, 0)$ (строка). Наконец, последнее слагаемое из (1.49) переписывается в виде $(\mathcal{K}u', \mathcal{D}'v)_{\partial\Omega}$, требуемом в (1.17) и содержащем столбец $\mathcal{K} = (\nu_1, \nu_2, 0)^t$. Итак, в соответствии с (1.18) конструируются те краевые условия, которые включаются в предложенную схему и в большинстве своем допускают физическую интерпретацию. Отметим, что в силу (1.16) и (1.18) условия Дирихле для системы (1.53) принимают вид

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad -\nu_2\partial_{\nu}v_1 + \nu_1\partial_{\nu}v_2 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega
 \tag{1.56}$$

и содержат одним соотношением меньше, чем условия $\mathcal{D}v = 0$ для оператора $\mathcal{L}$ (см. (1.54)). Если к (1.56) добавить уравнение неразрывности $-\nabla_x \cdot v = 0$, суженное на $\partial\Omega$, то возникнет система Дирихле, равносильная $\mathcal{D}$.

§ 2. Краевые задачи в областях с кусочно гладкой границей

1. Область с коническими точками. Предположим, что граница $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ гладкая всюду, кроме точек $x^1, \dots, x^M$, составляющих множество нерегулярностей Υ . Пусть при любом $\mu = 1, \dots, M$ существует диффеоморфизм окрестности $\mathcal{V}^\mu \ni x^\mu$ на шар $\mathbb{B}_1^n(x^\mu) = \{x : |x - x^\mu| < 1\}$, переводящий $\Omega \cap \mathcal{V}^\mu$ в $\mathbb{K}^\mu \cap \mathbb{B}_1^n(x^\mu)$, где $\mathbb{K}^\mu$ – конус с вершиной x^μ , вырезающий на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}(x^\mu) = \partial\mathbb{B}_1^n(x^\mu)$ область ω^μ с гладкой $(n-2)$ -мерной границей $\partial\omega^\mu$ (не исключается случай $\partial\omega^\mu = \emptyset$, когда x^μ – изолированная точка границы и $\mathbb{K}^\mu = \mathbb{R}^n \setminus x^\mu$ – полный конус). Упрощая обозначения, но не ограничивая общности, считаем, что $\mathcal{V}^\mu \cap \Omega = \mathbb{B}_1^n(x^\mu) \cap \mathbb{K}^\mu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В этом параграфе рассматриваются ограниченные области, но в принципе пересказ результатов для областей с коническими выходами на бесконечность не составляет труда – далее в § 5 обсуждается один из возможных вариантов.

Пусть оператор $\mathcal{L}$ с простой или усложненной структурой и соответствующая форма a обладают полиномиальным свойством 1^0 , выдерживающим замораживание коэффициентов в любой точке $x^0 \in \overline{\Omega}$. Образует граничный оператор $\mathcal{B}$ в согласии с правилом (1.6) или (1.18) и рассмотрим аналогичную (1.8), (1.9) краевую задачу

$$(2.1) \quad \mathcal{L}(x, \nabla_x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(2.2) \quad \mathcal{B}(x, \nabla_x)u(x) = q(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus \Upsilon.$$

Следуя [13], введем пространство $V_\beta^l(\Omega, \Upsilon)$ как пополнение $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Upsilon)$ по норме

$$(2.3) \quad \|w; V_\beta^l(\Omega, \Upsilon)\| = \left(\sum_{k=0}^l \|\rho^{\beta-l+k} \nabla_x^k w; L_2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2},$$

где $\rho(x) = \text{dist}\{x, \Upsilon\}$, а $l \in \{0, 1, \dots\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ – показатели гладкости и веса. Если $l > 0$, то $V_\beta^{l-1/2}(\partial\Omega, \Upsilon)$ – следовое пространство, снабженное естественной нормой

$$(2.4) \quad \|W; V_\beta^{l-1/2}(\partial\Omega, \Upsilon)\| = \inf \{ \|w; V_\beta^l(\Omega, \Upsilon)\| \mid W = w \text{ на } \partial\Omega \setminus \Upsilon \}.$$

Определим еще векторные пространства, похожие на (1.26) и (1.27),

$$(2.5) \quad \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega) = \prod_{k=1}^T V_\beta^{l+t_k}(\Omega, \Upsilon),$$

$$(2.6) \quad \mathcal{R}_\beta^l V(\Omega) = \prod_{j=1}^T V_\beta^{l-t_j}(\Omega, \Upsilon) \times \prod_{q=1}^m V_\beta^{l-r_q-1/2}(\partial\Omega, \Upsilon).$$

В левых частях этих формул указывается только область Ω , поскольку для нее множества $\partial\Omega$ и Υ уже зафиксированы. Сокращая обозначения, далее пишем $V_\beta^l(\Omega)$ и т. п.

Если для l выполнено неравенство (1.28), оператор задачи (2.1), (2.2),

$$(2.7) \quad \mathcal{A}_\beta^l = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}\} : \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l V(\Omega)$$

оказывается непрерывным при любом β . С целью сформулировать условия его фредгольмовости, перепишем главные части $\mathcal{L}^\mu(\nabla_x)$ и $\mathcal{B}^\mu(x, \nabla_x)$, вычисленные в точке x^μ , при помощи сферических координат (ρ_μ, φ^μ) , где $\rho_\mu = |x - x^\mu|$, а φ^μ — координаты точки в карте подходящего атласа на сфере $\mathbb{S}^{n-1}(x^\mu)$. Для элементов матриц имеем

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{jk}^\mu(\nabla_x) &= \rho_\mu^{-t_j - t_k} L_{jk}^\mu(\varphi^\mu, \nabla_{\varphi^\mu}, \partial/\partial \rho_\mu), \\ \mathcal{B}_{qk}^\mu(\nabla_x) &= \rho_\mu^{-t_j - r_q} B_{qk}^\mu(\varphi^\mu, \nabla_{\varphi^\mu}, \partial/\partial \rho_\mu). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что из-за искривленности конической поверхности $\partial\mathbb{K}^\mu$ коэффициенты граничного оператора $\mathcal{B}^\mu$ остаются переменными, но он допускает запись (2.8). Заменяя дифференцирование $\partial/\partial \rho_\mu$ величиной $\lambda - t_k$, положим

$$(2.9) \quad \begin{aligned} L^\mu(\varphi, \partial_\varphi, \lambda) &= (L_{jk}^\mu(\varphi, \partial_\varphi, \lambda - t_k))_{j,k=1}^T, \\ B^\mu(\varphi, \partial_\varphi, \lambda) &= (B_{qk}^\mu(\varphi, \partial_\varphi, \lambda - t_k))_{q,k=1}^{m,T} \end{aligned}$$

и введем полиномиальный пучок (спектральное семейство)

$$(2.10) \quad \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}^\mu(\lambda) = \{L^\mu(\varphi, \partial_\varphi, \lambda), B^\mu(\varphi, \partial_\varphi, \lambda)\}: \mathcal{D}^l H(\omega^\mu) \rightarrow \mathcal{R}^l H(\omega^\mu).$$

Известно (см. [4]), что его спектр $\sigma(\mathfrak{A}^\mu)$ состоит из изолированных конечнократных собственных чисел, лежащих в объединении двойного угла и полосы

$$(2.11) \quad \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < \gamma |\operatorname{Re} \lambda| \text{ или } |\operatorname{Re} \lambda| < h\} \quad (\gamma, h > 0).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. 1) Обычно на место λ в (2.9) ставят $-i\lambda$, что вызвано использованием преобразования Меллина (замена Эйлера $\rho \mapsto t = \log \rho$ и преобразование Фурье $\mathcal{F}_{t \rightarrow \lambda}$). Поскольку технические детали у нас не затрагиваются, удобно избавиться от “лишнего” множителя $-i$. В связи с этим множество (2.11) меняет ориентацию и содержит вещественную ось вместо мнимой.

2) Имеется возможность сопоставить каждой точке $x \in \Upsilon$ свой весовой показатель $\beta(x)$, изменив тем самым норму (2.3). Для наших целей достаточно оперировать с постоянным β , и упомянутым обобщением здесь пренебрегаем.

Согласно [13] оператор (2.7) оказывается фредгольмовым в том и только том случае, когда прямая $i\mathbb{R} - (\beta - l + n/2) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = l - \beta - n/2\}$ не содержит собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^1, \dots, \mathfrak{A}^M$. Если же хотя бы одно собственное число попадает на указанную прямую, образ $\operatorname{Im} \mathcal{A}_\beta^l = \mathcal{A}_\beta^l \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)$ становится незамкнутым в $\mathcal{R}_\beta^l V(\Omega)$, но $\dim \ker \mathcal{A}_\beta^l, \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_\beta^l < \infty$.

Полиномиальное свойство 3^0 формы a^μ с замороженными в x^μ коэффициентами, отвечающей модельной задаче в конусе $\mathbb{K}^\mu$:

$$(2.12) \quad \mathcal{L}^\mu(\nabla_x) \mathcal{U}(x) = \mathcal{F}(x), \quad x \in \mathbb{K}^\mu; \quad \mathcal{B}^\mu(x, \nabla_x) \mathcal{U}(x) = \mathcal{G}(x), \quad x \in \partial\mathbb{K}^\mu \setminus x^\mu,$$

позволяет получить полную информацию о спектре $\sigma(\mathfrak{A}^\mu)$ пучка $\mathfrak{A}^\mu$ в узкой полосе

$$(2.13) \quad \Pi^\mu = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \lambda + n/2| < \delta_\mu\}$$

и сделать заключение о разрешимости задач (2.1), (2.12) в классах $\mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)$, $\mathcal{D}_\beta^l V(\mathbb{K}^\mu)$ при

$$(2.14) \quad \beta - l \in (-\delta, \delta), \quad \delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_M\} > 0.$$

Введем необходимые обозначения. Пусть $\mathcal{P}^\mu$ – линеал, отвечающий паре $\{\mathcal{L}^\mu, a^\mu\}$ согласно 1⁰–3⁰. *Обобщенная степень* $\deg\{p; \mathbf{t}\}$ (векторного) полинома $p = (p_1, \dots, p_T)$ равна q , если $\deg p_j = q + t_j$ для (скалярных) полиномов p_j . Этот полином *однороден относительно точки x^μ* , если p_j – однородные полиномы переменной $x - x^\mu$. Подчеркнем, что обобщенная степень может быть отрицательной и

$$\deg\{p, \mathbf{t}\} \geq -\max \mathbf{t} = -\max\{t_1, \dots, t_T\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 ([27]). *Существует такое $\delta_\mu \in (0, 1)$, что верны следующие утверждения.*

1) *Если пара $\{\mathcal{L}^\mu, a^\mu\}$ обладает полиномиальным свойством 1⁰, то в полосе Π^μ может располагаться разве лишь собственное число $\lambda_0 = -n/2$ пучка (2.10). Собственное подпространство $\ker \mathfrak{A}^\mu(\lambda_0)$ состоит из следов на $\omega^\mu \subset \mathbb{S}^{n-1}(x^\mu)$ полиномов из линеала*

$$(2.15) \quad \mathcal{P}_0^\mu = \{p \in \mathcal{P}^\mu : \mathcal{B}^\mu p = 0 \text{ на } \partial\mathbb{K}^\mu \setminus x^\mu, \deg\{p; \mathbf{t}\} = -n/2, \\ p \text{ однороден относительно } x^\mu\}.$$

2) *Если $\varkappa_\mu = \dim \mathcal{P}_0^\mu > 0$ и форма a^μ обладает полиномиальным свойством в полном объеме, то полная алгебраическая кратность собственного числа $\lambda_0 = -n/2$ пучка (2.10) равна $2\varkappa_\mu$ и любая жорданова цепочка имеет длину 2.*

Нетрудно указать ситуации, в которых линеал (2.15) заведомо тривиален и пересечение $\sigma(\mathfrak{A}^\mu) \cap \Pi^\mu$ пусто.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *В условиях предложения 2.3 (1) полоса (2.13) свободна от спектра пучка $\mathfrak{A}^\mu$, если выполнено одно из трех условий:*

- 1) n – нечетное число,
- 2) $\max \mathbf{t} < n/2$,
- 3) $\mathcal{B}^\mu = \mathcal{D}^\mu$ – система Дирихле на $\partial\mathbb{K}^\mu \setminus x^\mu$.

Предложение 2.3 (2) означает, что каждый собственный вектор $\Phi^0 \in \ker \mathfrak{A}^\mu(\lambda_0) = \mathcal{P}_0^\mu|_{\omega^\mu}$ сопровождается присоединенным Φ^1 и цепочка Φ^0, Φ^1 непродолжима, т.е. нет присоединенных векторов второго порядка. Разумеется, $\Phi^0, \Phi^1 \in C^\infty(\overline{\omega^\mu})$. Кроме того, функции $\mathbb{K}^\mu \ni x \mapsto$

$$(2.16) \quad \mathcal{U}^0(x) = \rho_\mu^{\mathbf{t}-n/2} \Phi^0(\varphi^\mu), \quad \mathcal{U}^1(x) = \rho_\mu^{\mathbf{t}-n/2} (\Phi^0(\varphi^\mu) \log \rho_\mu + \Phi^1(\varphi^\mu))$$

удовлетворяют однородной задаче (2.12) и являются ее *степенными решениями* вида

$$(2.17) \quad \mathcal{U}(x) = \rho_\mu^{\lambda+\mathbf{t}} \Phi(\varphi^\mu) = (\rho_\mu^{\lambda+t_1} \Phi_1(\varphi^\mu, \log \rho_\mu), \dots, \rho_\mu^{\lambda+t_T} \Phi_T(\varphi^\mu, \log \rho_\mu)),$$

где $l \mapsto \Phi_j(\cdot, l)$ – полиномы с коэффициентами из $C^\infty(\overline{\omega^\mu})$. Функция $x \mapsto \mathcal{U}^0(x)$ оказывается полиномом из $\mathcal{P}_0^\mu$, аннулирующим форму a^0 , а для $\mathcal{U}^1$ интеграл $a^0(\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^1; \mathbb{K}^\mu)$ расходится как на бесконечности, так и в точке x^μ .

Поясним идею доказательства предложения 2.3 (1) на примере оператора простой структуры. При $\lambda \in i\mathbb{R} - n/2$ степенное решение $\mathcal{U}$ из (2.17) подставляется на обе позиции в формулу Грина (1.2) на сферическом слое $\Xi = \{x \in \mathbb{K}^\mu : b_- < \rho_\mu < b_+\}$, где $b_+ > b_- > 0$. Очевидно, что $(\mathcal{L}^\mu \mathcal{U}, \mathcal{U})_\Xi = 0$. Интеграл по боковой поверхности $\Gamma = \partial\Xi \cap \partial\mathbb{K}^\mu$ также исчезает, поскольку один из сомножителей в каждом члене суммы

$$(\mathcal{N}^\mu \mathcal{U}, \mathcal{D}^\mu \mathcal{U})_\Gamma = \sum_{\mu=1}^q (\mathcal{N}_q^\mu \mathcal{U}, \mathcal{D}_q^\mu \mathcal{U})_\Gamma$$

равен нулю согласно определению (1.6) и равенству $\mathcal{B}^\mu \mathcal{U} = 0$ на $\Gamma \subset \partial\mathbb{K}^\mu$. В левой части формулы (1.2) остались два интеграла $I_\pm$ по сферическим областям $\omega_\pm^\mu = \{x \in \mathbb{K}^\mu : \rho_\mu = b_\pm\}$. Благодаря условию $\operatorname{Re} \lambda = -n/2$ (мнимые части λ сокращаются из-за комплексного сопряжения второго сомножителя) и в согласии с замечанием 1.2 подынтегральные выражения $J_\pm$ оказываются положительно однородными функциями степени $1 - n$, а значит, $J_\pm(x) = \pm a_\pm^{1-n} J_0(x)$ (мы учли разнонаправленность нормалей к $\omega_\pm^\mu$). Следовательно, $I_+ + I_- = 0$ и $a^\mu(\mathcal{U}, \mathcal{U}; \Xi) = 0$, т.е. $\mathcal{U} \in \mathcal{P}^\mu$ в силу 1⁰. Отсюда вытекает, что $\mathcal{U}$ попадает в линейал (2.15), а $\lambda = \lambda_0$ – единственно возможная точка спектра $\mathfrak{A}^\mu$ на прямой $i\mathbb{R} - n/2$. Переход к полосе (2.13) обеспечивается общими свойствами спектра пучка (см. текст между (2.10) и (2.11)).

В точности так же обрабатываются операторы с усложненной структурой. При подозрении на неправомотность использования формулы Грина в области Ξ с кусочно гладкой границей можно привлечь прием умножения на “сглаженную ступеньку” $\chi_\delta(\rho_\mu)$, обсуждавшийся в п. 5 §1.

Если $\sigma(\mathfrak{A}_\mu) \cap \Pi_\mu = \emptyset$, то согласно [13] при ограничениях (1.28) и (2.14) на показатели l и β оператор: $\mathcal{D}_\beta^l V(\mathbb{K}^\mu) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l V(\mathbb{K}^\mu, x^\mu)$ задачи (2.12) в конусе $\mathbb{K}^\mu$ оказывается изоморфизмом. Это свойство модельных задач (при всех $\mu = 1, \dots, M$), а также эллиптичность самой задачи (2.1), (2.2), проверенная в теореме 1.9, влекут фредгольмовость отображения (2.7). В случае $-n/2 \in \sigma(\mathfrak{A}_\mu)$ на интервале $(l - \delta, l + \delta)$ запретным становится показатель $\beta = l$. Более детальная информация об отображении (2.7), дающая описание подпространств $\ker \mathcal{A}_\beta^l$ и $\operatorname{coker} \mathcal{A}_\beta^l$ в терминах линейала полиномов $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, получается при помощи очередных двух утверждений общего характера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 ([15], [21] и [5], [8], [52]). *Операторы $\mathcal{A}_\beta^l$ и $\mathcal{A}_{2l-\beta}^l$ фредгольмовы одновременно, причем при наличии этого свойства*

$$(2.18) \quad \operatorname{coker} \mathcal{A}_\beta^l = \{(v, \mathcal{T}v, \mathcal{N}''v) : v \in \ker \mathcal{A}_{2l-\beta}^l\}.$$

Иными словами, задачи (2.1), (2.2), поставленные в пространствах $\mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)$ и $\mathcal{D}_{2l-\beta}^l V(\Omega)$, сопряжены относительно формулы Грина (1.19) (или (1.7) – ср. с (1.30) и с комментарием по поводу матриц простой структуры). Поэтому коядро одной задачи определяется ядром другой: замена $\beta \mapsto 2l - \beta$ переставляет операторы в (2.18). При изучении свойств отображения (2.7) в зависимости от весового показателя β решающую роль играет “формула о приращении индекса”, упрощенный вариант которой приводится ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6 ([60], [15], [20], [21]). Пусть $\beta^+ \in (l, l + \delta)$ и $\beta^- \in (l - \delta, l)$. Тогда справедливо равенство

$$(2.19) \quad \text{Ind } \mathcal{A}_{\beta^+}^l = \text{Ind } \mathcal{A}_{\beta^-}^l + 2(\varkappa_1 + \dots + \varkappa_M),$$

где $\text{Ind } A = \dim \ker A - \dim \text{coker } A$ – индекс оператора A , а последнее слагаемое – суммарная алгебраическая кратность собственного числа $\lambda_0 = -n/2$ пучков $\mathfrak{A}^1, \dots, \mathfrak{A}^M$ (если $\lambda_0 \notin \sigma(\mathfrak{A}^\mu)$, то $\varkappa_\mu = \dim \mathcal{P}_0^\mu = 0$).

Сформулируем центральные утверждения данного раздела.

ТЕОРЕМА 2.7 ([30], [31; §6.1]). Предположим, что оператор $\mathcal{L}$ и форма a в задаче (2.1), (2.2) обладают полиномиальным свойством, выдерживающим замораживание в любой точке $x^0 \in \overline{\Omega}$.

1) Если при каждом $\mu = 1, \dots, M$ линейал полиномов (2.15) тривиален ($\varkappa_1 = \dots = \varkappa_M = 0$; см., например, следствие 3.4), то для показателей l и β , подчиненных (1.28) и (2.14),

$$(2.20) \quad \ker \mathcal{A}_\beta^l = \mathcal{P}_+(\mathcal{B}) \equiv \{p = (p_1, \dots, p_T) \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) : \nabla_x^s p_j(x^\mu) = 0 \\ \text{при } s \leq t_j - n/2, \mu = 1, \dots, M, j = 1, \dots, T\},$$

$$(2.21) \quad \text{coker } \mathcal{A}_\beta^l = \{(p, \mathcal{T}p, \mathcal{N}''p) : p \in \mathcal{P}_+(\mathcal{B})\};$$

здесь подпространство $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{P}$ определено в согласии с (1.29).

2) Предположим дополнительно, что в случае $\varkappa_\mu > 0$ у формы a^μ имеется полиномиальное свойство $\mathfrak{Z}^0$. Тогда при $\beta^- \in (l - \delta, l)$ ядро оператора $\mathcal{A}_\beta^l$ определено равенством (2.20), в котором $\beta = \beta^-$. Если же $\beta \in (l, l + \delta)$, то

$$\ker \mathcal{A}_{\beta^+}^l = \ker \mathcal{A}_{\beta^-}^l \dot{+} \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ – подпространство, размерность которого равна $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_M$, а для элементов ζ верны формулы

$$(2.22) \quad \zeta - \mathcal{U}^{1\mu} - \mathcal{U}^{0\mu} \in \mathcal{D}_{\beta^-}^l V(\Omega \cap \mathcal{V}^\mu, \partial\Omega \cap \mathcal{V}^\mu, x^\mu), \quad \mu = 1, \dots, M$$

($\mathcal{U}^{0\mu}$ и $\mathcal{U}^{1\mu}$ – степенные решения (2.16) модельных задач (2.12)). Кроме того, $\mathcal{X}$ содержит подпространство полиномов

$$(2.23) \quad \mathcal{P}_0(\mathcal{B}) = \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) : \deg\{p; \mathbf{t}\} = -n/2, \\ p \text{ однороден относительно каждой из точек } x^1, \dots, x^M\},$$

а в асимптотике (2.22) решения $\zeta \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{P}_0(\mathcal{B})$ присутствует хотя бы один не-тривиальный логарифмический член $\mathcal{U}^{1\mu}$. Наконец, представления для $\text{coker } \mathcal{A}_{\beta^\pm}^l$ получаются в соответствии с (2.18).

Формулы Грина (1.2) и (1.20), справедливые изначально для $u, v \in C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Upsilon)^T$, по замыканию переносятся на пары $u \in \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}_{2l-\beta}^l V(\Omega)$. Поэтому при $\beta \leq l$ доказательство равенства (2.20) достигается так же, как и в п. 5 §1: функция $u \in \ker \mathcal{A}_\beta^l \subset \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega) \subset \mathcal{D}_{2l-\beta}^l V(\Omega)$ подставляется на обе позиции в (1.2) или (1.20) и

применяется требование 1^0 . Проверка остальных утверждений чуть более сложна и требует обращения к соотношениям (2.18), (2.19) и теореме об асимптотике решений [13], [31; § 4.2]. Подчеркнем, что при $\beta \leq l$ класс $\mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)$ содержится в энергетическом пространстве $\mathcal{D}^0 H(\Omega)$, порожденном формой a и неравенством Корна (см. предложение 1.11 и соотношение (1.12)).

В теореме 2.7 не было задействовано множество

$$(2.24) \quad \mathcal{P}_-(\mathcal{B}) = \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) : \deg\{p; \mathbf{t}\} < -n/2\},$$

которое состоит из полиномиальных решений однородной задачи (2.1), (2.2) и не обязано быть тривиальным (так, для условий Неймана $\mathcal{P}(\mathcal{N}) = \mathcal{P}$ в силу 4^0 и $\dim \mathcal{P}_-(\mathcal{N}) > 0$ в случае $\max \mathbf{t} > n/2$). Если $\mathcal{P}_-(\mathcal{B}) \neq \{0\}$, то δ_μ в предложении 2.3 оказывается таким, что условие (2.14) исключает обсуждаемые полиномы из $\mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)$. Причина кажущейся неувязки в том, что при $\dim \mathcal{P}_-(\mathcal{B}) > 0$ весовые классы из теоремы 2.7 соответствуют задаче Соболева (2.1), (2.2) с дополнительными условиями

$$(2.25) \quad \nabla_x^s u_j(x^\tau) = 0, \quad s < t_j - n/2, \quad j = 1, \dots, T; \quad \mu = 1, \dots, M$$

(см. [61], [31; § 12.7] и др.).

Переход к обычным “энергетическим” решениям $u \in \mathcal{D}^0 H(\Omega)$ может быть осуществлен в рамках теории самосопряженных расширений (см. далее п. 7).

Как показывает анализ доказательств, предложение 2.3 (2) и, следовательно, теорема 2.7 (2) сохраняют силу и для операторов усложненной структуры (1.14), если в формуле Грина (1.20) удастся избавиться от поверхностного интеграла за счет одного из предположений $\mathbf{u} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$ или $\mathbf{v} \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

ПРИМЕР 2.8. Снабдим систему Стокса (1.45), (1.46) условиями прилипания $\mathcal{D}'u \equiv u = 0$ на $\partial\Omega$. Тогда $\mathcal{P}(\mathcal{D}', 0) = \{p = (0, 0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$ (см. пример 1.15) и согласно (1.48), (1.49) при соленоидальном поле скоростей $v \in C^\infty(\bar{\Omega})^3$ получаем

$$(2.26) \quad (-\nabla_x u + \nabla_x u', v)_\Omega + (\partial_\nu u + \nu u', v)_{\partial\Omega} = a(u, v; \Omega).$$

Если $v \in \mathcal{P}(\mathcal{D}', 0)$, то интеграл по $\partial\Omega$ в (2.26), конечно же, равен нулю, т.е. задача Стокса приобретает некое подобие свойства 4^0 , причем роль оператора $\mathcal{N}$ в 4^0 передается системе Дирихле $\mathcal{D}'$. Аналогичное заключение можно сделать и для задачи (1.53), (1.56) о мультиполярной жидкости. Впрочем, это не находит применения в данном контексте, поскольку и для плоских и для трехмерных течений упомянутые задачи обслуживаются утверждениями 2.3 (1) и 2.7 (1). Полезность обсуждаемого обобщения станет понятной в п. 5 § 3.

Поскольку и другие примеры были бы прямым пересказом общей теоремы, упомянем лишь, что в п. 7 мы вернемся к рассмотрению задачи теории пластин.

2. Область с гладким ребром (некритический случай). Обратим внимание на качественное расхождение результатов, установленных в теореме 2.7. В ситуации $\dim \mathcal{P}_0^\mu = 0$ ($\mu = 1, \dots, M$) при условии (2.14) $\text{Ind } \mathcal{A}_\beta^l = 0$ (ср. (2.20) и (2.21)). Если же хотя бы один линеал $\mathcal{P}_0^\mu$ из (2.15) нетривиален (критическая ситуация), то

$\text{Ind } \mathcal{A}_\beta^l \neq 0$ при любом допустимом β . В самом деле, $\beta \mapsto \text{Ind } \mathcal{A}_\beta^l$ — монотонная функция и в силу теоремы 2.7 $(2) \pm \text{Ind } \mathcal{A}_\beta^l = 2(\varkappa_1 + \dots + \varkappa_M) > 0$ при $\pm(\beta - l) \in (0, \delta)$.

Указанное обстоятельство становится решающим при изучении особых подмногообразий $\Upsilon \subset \partial\Omega$ с положительной размерностью: в критической ситуации оператор $\mathcal{A}_\beta^l$ задачи (2.1), (2.2) перестает быть фредгольмовым (при любом $\beta \in \mathbb{R}!$), так как одно из подпространств $\ker \mathcal{A}_\beta^l$ или $\text{соker } \mathcal{A}_\beta^l$ оказывается бесконечномерным. В данном разделе будет рассмотрен некритический случай $\dim \mathcal{P}_0^\mu = 0$, а в следующих двух — продемонстрированы способы изменения весовых классов, приводящие к фредгольмовым операторам в критическом случае. Подчеркнем, что формулируемые далее теоремы 2.13 и 2.17 относятся также к ситуации $d = \dim \Upsilon = 0$ (конические точки) и доставляют оператор задачи (2.1), (2.2) с нулевым индексом.

Пусть $n > 2$ и $\Upsilon \subset \partial\Omega$ — гладкое замкнутое подмногообразие без края, $\dim \Upsilon = d \in (0, n - 2]$. Предположим, что поверхность $\partial\Omega$ гладкая всюду, кроме Υ , и для каждой точки $x^0 \in \Upsilon$ имеется диффеоморфизм ее окрестности $\mathcal{V}(x^0)$ на шар $\mathbb{B}_1^n$, переводящий $\Omega \cap \mathcal{V}(x^0)$ на $\mathbb{D}(x^0) \cap \mathbb{B}_1^n$, где $\mathbb{D}(x^0) = \mathbb{K}(x^0) \times \mathbb{R}^d$ и $\mathbb{K}(x^0)$ есть $(n - d)$ -мерный конус, вырезающий на сфере $\mathbb{S}^{n-d-1}$ область $\omega(z^0)$ с гладкой $(n - d - 2)$ -мерной границей. В случае $n = 3, d = 1$ мы имеем дело с двугранным углом $\mathbb{D}$, а при $\partial\omega = \emptyset$ конус $\mathbb{K}$ полный и подмногообразие Υ является внутренней частью компакта $\overline{\Omega}$. Далее вместо $\mathbb{D}(x^0)$ и т. п. пишем $\mathbb{D}^0$ и т. п., но помним, что $\mathbb{D}^0, \mathbb{K}^0$ и ω^0 переменные. Декартову систему координат (y, z) фиксируем так, чтобы $y \in \mathbb{K}^0$ и $z \in \mathbb{R}^d$.

Задаче (2.1), (2.2) сопоставим оператор (2.7), определенный на пространствах (2.5), (2.6). Заморозив коэффициенты дифференциальных операторов и формы a в точке $x^0 \in \Upsilon$, перейдем к модельной задаче

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}^0(\nabla_y, \nabla_z)u(y, z) &= f(y, z), & (y, z) \in \mathbb{D}^0, \\ \mathcal{B}^0(y, \nabla_y, \nabla_z)u(y, z) &= g(y, z), & (y, z) \in \partial\mathbb{D}^0 \setminus \Upsilon^0, \end{aligned}$$

где $\Upsilon^0 = \{0\} \times \mathbb{R}^d$ — спрямленное ребро. Применим преобразование Фурье $\mathcal{F}_{z \rightarrow \xi}$ и сделаем замену $y \mapsto \eta = |\xi|^{-1}y$. В результате получаем эталонную краевую задачу в конусе $\mathbb{K}^0$, зависящую от параметра $\theta = |\xi|^{-1}\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}^0(\nabla_\eta, i\theta)U(\eta, \theta) &= F(\eta, \theta), & \eta \in \mathbb{K}^0, \\ \mathcal{B}^0(\eta, \nabla_\eta, i\theta)U(\eta, \theta) &= G(\eta, \theta), & \eta \in \partial\mathbb{K}^0 \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

где $|\xi|^{-t_j}U_j(|\xi|y, \theta), |\xi|^{t_j}F_j(|\xi|y, \theta), |\xi|^{\sigma_q}G_q(|\xi|y, \theta)$ — образы Фурье компонент $u_j(y, z), f_j(y, z), g_q(y, z)$ функций u, f, g . Форма $a_\theta^0(u, v; \mathbb{K}^0)$, наследуемая задачей (2.28) от исходной задачи (2.1), (2.2), имеет вид

$$(2.29) \quad \sum_{j,k=1}^T \sum_{|\sigma|=t_j} \sum_{|\gamma|=t_k} \int_{\Xi} \overset{\circ}{a}_{jk}^{\sigma\gamma}(\nabla_\eta, i\theta)^\gamma u_k(\eta) (\nabla_\eta, -i\theta)^\sigma \overline{v_j(\eta)} d\eta,$$

где $\overset{\circ}{a}_{jk}^{\sigma\gamma}$ — постоянные (уже замороженные в точке x^0) коэффициенты формы a^0 и

$$(\nabla_\eta, i\theta) = (\partial/\partial\eta_1, \dots, \partial/\partial\eta_{n-d}, i\theta_1, \dots, i\theta_d).$$

Если в (2.29) положить $\theta_1 = \dots = \theta_d = 0$, то возникнет форма a_0^0 , отвечающая модельной задаче вида (2.12) в конусе $\mathbb{K}^0 \subset \mathbb{R}^{n-d}$ с операторами $\mathcal{L}^0(\nabla_\eta, 0)$ и $\mathcal{B}^0(\eta, \nabla_\eta, 0)$, удовлетворяющими соотношениям (2.8), в которых $\mu = 0, \rho_0 = |\eta|$ и φ^0 — координаты на $\mathbb{S}^{n-d-1}$ (обращаем внимание на понижение размерности).

ЛЕММА 2.9 ([27]). Пусть у пары $\{\mathcal{L}^0(\nabla_y, \nabla_z), a^0\}$ имеется полиномиальное свойство 1^0 с линейалом $\mathcal{P}^0$.

1) Пара $\{\mathcal{L}^0(\nabla_\eta, 0), a_0^0\}$ наследует свойство 1^0 , причем соответствующий линейал полиномов P^0 определяется так:

$$(2.30) \quad P^0 = \{p(\eta) : p \in \mathcal{P}, p(y, z) \text{ не зависит от } z \in \mathbb{R}^d\}.$$

2) Если $\Xi \subset \overline{\mathbb{K}}^0$, $U \in C^\infty(\overline{\Xi})^T$ и $a_\theta^0(U, U; \Xi) = 0$, $\mathcal{L}^0(\nabla_\eta, i\theta)U = 0$ на Ξ при $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, то $U = 0$.

Подобные заключения делаются и для полиномиальных свойств 2^0 и 3^0 .

Проверка утверждений достигается подстановкой функции $\Xi \times \mathbb{B}_1^d \ni (y, z) \mapsto U(y) \exp(i[\theta_1 z_1 + \dots + \theta_d z_d])$ в формулы из 1^0 .

Следуя [22], введем пространство $E_\beta^l(\mathbb{K}^0)$ как пополнение $C_0^\infty(\overline{\mathbb{K}}^0 \setminus \{0\})$ по норме

$$(2.31) \quad \|w; E_\beta^l(\mathbb{K}^0)\| = \left(\sum_{k=0}^l \|\rho_0^{\beta-l+k} (1 + \rho_0)^{l-k} \nabla_\eta^k w; L_2(\mathbb{K}^0)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Подчеркнем, что вблизи вершины конуса распределение весовых множителей в (2.31) такое же, как и в норме $\|w; V_\beta^l(\mathbb{K}^0, 0)\|$ из (2.3), однако около бесконечности множители становятся величинами $O(\rho_0^\beta)$, не зависящими от порядка k производной. Изменение весовой нормы вызвано присутствием младших членов в дифференциальных операторах из (2.28) – задача $\{\mathcal{L}^0(\nabla_\eta, q\theta), \mathcal{B}^0(\eta, \nabla_\eta, q\theta)\}$ оказывается эллиптической с параметром $q \in \mathbb{R}$ (см. [4]). Формулы (2.4)–(2.6) помогают определить следовые $E_\beta^{l-1/2}(\partial\mathbb{K}^0)$ и векторные $\mathcal{D}_\beta^l E(\mathbb{K}^0)$, $\mathcal{R}_\beta^l E(\mathbb{K}^0)$ пространства, в которых оператор задачи (2.8),

$$(2.32) \quad A_\beta^l(\theta) = \{\mathcal{L}^0(\nabla_\eta, i\theta), \mathcal{B}^0(\eta, \nabla_\eta, i\theta)\} : \mathcal{D}_\beta^l E(\mathbb{K}^0) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l E(\mathbb{K}^0),$$

является непрерывным при всех $\beta \in \mathbb{R}$ и l , подчиненных (1.28).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10 ([27]). Пусть в дополнение к условию леммы 2.9 линейал

$$(2.33) \quad P_0^0 = \{p \in P^0 : \mathcal{B}^0(\eta, \nabla_\eta, 0)p(\eta) = 0, \eta \in \partial\mathbb{K}^0 \setminus 0; \deg\{p; \mathbf{t}\} = -(n-d)/2, \\ \text{р однороден относительно точки } \eta = 0\}$$

(ср. с (2.15)) тривиален. Тогда найдется такое $\delta_0 > 0$, что при $|\beta - l| < \delta_0$ отображения (2.32) и

$$(2.34) \quad \{\mathcal{L}^0(\nabla_y, \nabla_z), \mathcal{B}^0(y, \nabla_y, \nabla_z)\} : \mathcal{D}_\beta^l V(\mathbb{D}^0, \Upsilon^0) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l V(\mathbb{D}^0, \partial\mathbb{D}^0, \Upsilon^0)$$

суть изоморфизмы.

При учете леммы 2.9 (2) и общих свойств оператора (2.32) (см. [22], [23], [20; §6.2]) соотношения $\dim \ker A_\beta^l(\theta) = 0$ и $\dim \operatorname{coker} A_\beta^l(\theta) = 0$ выводятся так же, как и представления (2.20) и (2.21). Переход к оператору (2.34) модельной задачи в $\mathbb{D}^0$ обеспечивается общими результатами [22], [23], которые к тому же гарантируют фредгольмовость отображения (2.7) в случае

$$(2.35) \quad |\beta - l| < \delta = \min\{\delta_0 \equiv \delta(x^0) : x^0 \in \Upsilon \subset \partial\Omega\}.$$

Дальнейшие рассуждения не отличаются от намеченных в п. 1.

ТЕОРЕМА 2.11 ([27]). Пусть β и l удовлетворяют (2.35) и (1.28), пара $\{\mathcal{L}, a\}$ обладает полиномиальным свойством, выдерживающим замораживание коэффициентов всюду в $\overline{\Omega}$, и, кроме того, для любой точки $x^0 \in \Upsilon$ равна нулю размерность линейала $P_0(x^0)$, построенного согласно (2.33). Тогда оператор (2.7) задачи (2.1), (2.2) фредгольмов, а его ядро и коядро находятся по формулам (2.20) и (2.21), в которых роль $\mathcal{P}_+(\mathcal{B})$ играет линейал

$$(2.36) \quad \mathcal{P}_*(\mathcal{B}) = \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) : \nabla_x^s p_j(x^0) = 0, x^0 \in \Upsilon, \\ s < t_j - (n-d)/2, j = 1, \dots, T\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.12. Если в (2.36) Υ — множество конических точек $\{x^1, \dots, x^M\}$, то согласно (2.23) и (2.20) $\mathcal{P}_*(\mathbb{B}) = \mathcal{P}_+(\mathcal{B}) \dot{+} \mathcal{P}_0(\mathcal{B})$. Разумеется, $\dim \mathcal{P}_0(\mathcal{B}) = 0$ ввиду условия $\dim P_0(x^0) = 0$, т.е. указанная конкретизация теоремы 2.11 не отличается от теоремы 2.7 (2). Обозначение $\mathcal{P}_*(\mathcal{B})$ удобно для следующих разделов.

Следствие 2.4, где n заменено на $n-d$, содержит достаточные условия для выполнения равенств $\dim P_0(x^0) = 0, x^0 \in \Upsilon \subset \partial\Omega$. Упомянутые в примере 2.8 задачи о трехмерных течениях управляются теоремой 2.11. То же касается и задачи Дирихле (защемленная граница) для систем уравнений теории упругости (примеры 1.12 и 1.13), однако для смешанных краевых задач условия теоремы 2.11 могут нарушаться (см. далее пример 2.14).

3. Область с гладким ребром (задача Неймана). Пусть $\mathcal{L}$ имеет простую структуру и $\mathcal{B} = \mathcal{N}$ — оператор Неймана из формулы Грина (1.2). Если $n-d$ — нечетное число или $n-d > 2 \max t$, то в силу следствия 2.4 (1, 2) и теоремы 2.11 при ограничении (2.35) оператор (2.7) задачи Неймана фредгольмов с нулевым индексом.

Пусть теперь $n-d$ четное и $n-d \leq 2 \max t$. Считаем, что форма a^0 обладает полиномиальным свойством в полном объеме. По предложению 1.5 линейал $P_0(x^0)$ содержит все полиномы подходящей степени и потому нетривиален (размерность $\dim P_0(x^0)$ вычислить нетрудно). Таким образом, в шкале пространств $\mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)$ не удастся реализовать задачу Неймана как фредгольмов оператор. Поясним идею [25]–[27] исправления ситуации, базирующуюся на следующих наблюдениях (для простоты Υ — одна коническая точка $x^1 = 0$). Во-первых, отображение

$$(2.37) \quad \{\mathcal{L}, \mathcal{N}\}: \mathbf{D} = \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega) \dot{+} \mathcal{P}_0^1 \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l V(\Omega)$$

сохраняет непрерывность при $\beta \in (l-1, l)$ (для главных частей $\{\mathcal{L}^1, \mathcal{N}^1\} \mathcal{P}_0^1 = 0$ согласно 4⁰). Во-вторых, благодаря предложению 2.3 (2) и формуле (2.19) индекс оператора (2.37) становится нулевым. В-третьих, по-прежнему $\mathbf{D} \subset \mathcal{D}^0 H(\Omega)$ и для функций $u, v \in \mathbf{D}$ верна формула Грина (1.2), позволяющая эксплуатировать полиномиальное свойство. Наконец, дифференцирование ∇_x^k при $k > t_j - (n-d)/2$ уничтожает компоненты p_j полиномов $p \in \mathcal{P}_0^1$, но оставляет нетривиальными компоненты $\mathcal{U}_j^1$ степенных решений (2.16) с логарифмами. Последнее наблюдение принципиально: функции $\mathcal{U}^1$ “отделяются” от полиномов $\mathcal{U}^0$ при помощи ступенчатых весовых норм.

Введем необходимые обозначения. Пусть l и s — целые числа, $l \geq 0$ и $s \leq l$. Пространство $V_\beta^{l,s}(\Omega)$ получается как пополнение $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Upsilon)$ по норме

$$(2.38) \quad \|w; V_\beta^{l,s}(\Omega)\| = \left(\sum_{k=0}^l \|\rho^{\beta-l+k+\Theta(s-k)} \nabla_x^k w; L_2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2},$$

где Θ – функция Хевисайда, $\Theta(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\Theta(t) = 0$ для $t < 0$. Если $s < 0$, то нормы (2.3) и (2.38) совпадают. Однако при $s \geq 0$ функция $k \mapsto \beta - l + k + \Theta(s - k)$ является кусочно линейной (имеет “ступеньку” на уровне $k = s$), в то время как для нормы (2.3) график функции $k \mapsto \beta - l + k$ – наклонная прямая. Аналогично (2.5) и (1.26) положим

$$\mathcal{D}_\beta^{l, (d-n)/2} V(\Omega) = \prod_{k=1}^T V_\beta^{l+t_k, t_k - (n-d)/2}(\Omega)$$

и рассмотрим такой оператор задачи Неймана (2.1), (2.2):

$$(2.39) \quad \mathcal{A}_\beta^{l, (d-n)/2} = \{\mathcal{L}, \mathcal{N}\}: \mathcal{D}_\beta^{l, (d-n)/2} V(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l V(\Omega).$$

ТЕОРЕМА 2.13 ([26]). *Пусть $n - d$ – четное число, не большее $2 \max t$. Предположим, что у $\{\mathcal{L}, a\}$ имеется полиномиальное свойство 1^0 , выдерживающее замораживание коэффициентов всюду в $\bar{\Omega}$, и для любой точки $x^0 \in \Upsilon$ форма a^0 , отвечающая модельной задаче в $\mathbb{D}(x^0)$, удовлетворяет 3^0 (и 4^0). Тогда найдется такое $\delta \in (0, 1)$, что при $\beta \in (l - \delta, l)$ и $l \leq \max t$ оператор (2.39) задачи Неймана $\{\mathcal{L}, \mathcal{N}\}$ в Ω является фредгольмовым, причем его ядро и коядро находятся по формулам (2.2) и (2.21), где под $\mathcal{P}_+(\mathcal{B})$ подразумевается линеал $\mathcal{P}_*(\mathcal{N})$ из (2.36).*

Итак, построен фредгольмов оператор, обладающий теми же характеристиками, что и оператор, доставляемый теоремой 2.11 в некритическом случае.

ПРИМЕР 2.14. Трехмерные задачи теории упругости с краевыми условиями Неймана (см. примеры 1.12 и 1.13) обслуживаются теоремой 2.13. Рассмотрим один из вариантов смешанной краевой задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}_+^3$ – тело, лежащее на плоскости $\Pi = \{x : x_3 = 0\}$ и ограниченное сверху гладкой поверхностью Σ , пересекающей Π вдоль гладкого контура $\Upsilon \ni x^0$ под углами $\alpha(x^0) \neq 0, \pi$. Уравнения равновесия

$$(2.40) \quad \Lambda(-\nabla_x)^t A(x) \Lambda(\nabla_x) u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

записанные при помощи матрицы (1.36), дополним условиями

$$(2.41) \quad \sigma^\nu(u; x) \equiv \Lambda(\nu(x))^t A(x) \Lambda(\nabla_x) u(x) = g(x), \quad x \in \Sigma_+ = \Sigma \cap \mathbb{R}_+^3,$$

$$(2.42) \quad \sigma_{13}(u; x) = 0, \quad \sigma_{23}(u; x) = 0, \quad u_3(x) = 0, \quad x \in \Pi_\Sigma,$$

где Π_Σ – основание тела, ограниченное контуром Υ , а σ_{jk} – декартовы компоненты тензора напряжений. Соотношения (2.42) суть линеаризованные условия Синьорини (контакт без трения); на тело Ω действуют объемные силы f и поверхностные нагрузки g . Условие $u_3 = 0$ на Π_Σ сужает линеал $\mathcal{P}_0 = \mathbb{R}^3$ до $\mathbb{P}_0(x^0) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ и потому ступенчатые нормы нужны лишь для компонент u_1 и u_2 вектора смещений u . В остальном проверка фредгольмовости оператора задачи (2.40)–(2.42),

$$V_\beta^{l+1, 0}(\Omega)^2 \times V_\beta^{l+1}(\Omega) \rightarrow V_\beta^{l-1}(\Omega)^3 \times V_\beta^{l-1/2}(\Sigma_+)^3 \times V_\beta^{l-1/2}(\Pi_\Sigma)^2 \times V_\beta^{l+1/2}(\Pi_\Sigma),$$

следует доказательству теоремы 2.13. При этом $l \in \{1, 2, \dots\}$ и $\beta \in (l - \delta, l)$, где число $\delta = \min\{\delta(x^0) : x^0 \in \Upsilon\} \in (0, 1)$ зависит от формы поверхности Σ (вычисление $\delta(x^0)$

по раствору $\alpha(x^0)$ двугранного угла можно найти, например, в [62], [63]). Линеал $\mathcal{P}_* = \{(c_1 - c_0 x_2, c_2 + c_0 x_1, 0) : c_q \in \mathbb{R}\}$ содержит жесткие смещения тела Ω вдоль плоскости Π , а условия разрешимости задачи (2.40)–(2.42),

$$(f, p)_\Omega + (g, p)_{\Sigma_+} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_*,$$

означают самоуравновешенность нагрузок в направлениях, параллельных Π .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.15. Предыдущий пример подсказывает, что в качестве ребра Υ может выступать линия смены типа краевого условия (в том числе и на гладкой поверхности $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Можно убедиться в том, что для справедливости теоремы 2.11 достаточна постановка условий Дирихле по одну сторону от Υ . Поэтому совмещение условий прилипания на Σ_+ с условиями (1.52) на свободной поверхности Π_Σ не требует обращения к ступенчатым нормам.

4. Область с гладким ребром (пространства с отделенной асимптотикой). Прием из предыдущего раздела малоудобен, если пространство $P_0(x^0)$ зависит от $x^0 \in \Upsilon$ (так будет, если в примере 2.14 Υ – пространственная дуга). Опишем подход, применимый в более общей ситуации. С этой целью воспроизведем лемму 8.4.8 из [30].

ЛЕММА 2.16. Пусть $u \in \mathcal{D}_\beta^{l, (d-n)/2} V(\mathbb{D}^0, \Upsilon^0)$, $\beta \in (l-1, l)$ и $\{p^{(1)}, \dots, p^{(\mathbb{J})}\}$ – некоторый базис в линеале полиномов обобщенной степени $-(n-d)/2$ (т.е. $\deg\{p^j; \mathbf{t}\} = (d-n)/2$). Тогда справедливо представление

$$u(y, z) = \sum_{j=1}^{\mathbb{J}} p^{(j)}(y) (\mathfrak{C}^0 k_j)(|y|, z) + \tilde{u}(y, z),$$

где коэффициенты k_j и остаток $\tilde{u}$ удовлетворяют неравенству

$$(2.43) \quad \|\tilde{u}; \mathcal{D}_\beta^l V(\mathbb{D}^0, \Upsilon^0)\| + \sum_{j=1}^{\mathbb{J}} \|k_j; H^{l-\beta}(\mathbb{R}^d)\| \leq c \|u; \mathcal{D}_\beta^{l, (d-n)/2} V(\mathbb{D}^0, \Upsilon^0)\|,$$

а $\mathfrak{C}^0$ – оператор продолжения с ребра Υ^0 в область $\mathbb{D}^0$, определенный, например, равенством

$$(2.44) \quad (\mathfrak{C}^0 k)(\rho, z) = \int_{\mathbb{R}^d} X(\zeta) k(z - \rho\zeta) d\zeta,$$

в котором $X(z) = (2\pi)^{-d/2} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow z}^{-1} \chi(|\xi|)$ (обратное преобразование Фурье) и $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ – эталонная срезка, $\chi(\rho) = 1$ при $\rho \leq 1$.

Левая часть (2.43) представляет собой эквивалентную норму в $\mathcal{D}_\beta^{l, (d-n)/2} V(\mathbb{D}^0, \Upsilon^0)$, и поэтому разумно в качестве области определения оператора задачи (2.1), (2.2) взять *весовое пространство функций с отделенной асимптотикой*. Введем необходимые обозначения и сформулируем теорему, вытекающую из более общих результатов [64], [65].

В трубчатой окрестности V подмногообразия Υ введем координаты (y, z) , где $y \in \mathbb{K}(x^0)$, а через z , несколько вольно, обозначаются координаты точки x^0 в подходящей карте атласа на Υ . При помощи достаточно мелкого разбиения единицы на $\mathcal{V}$ “склеим” оператор $\mathfrak{C}$ продолжения функций с Υ в Ω из эталонных операторов (2.44). Прямое описание подобных операторов и проверку их основных свойств можно найти, например, в [66]–[68].

Предположим, что размерность $J = \dim \mathbb{P}_0(x^0) > 0$ линеала (2.33) постоянна на Υ и, более того, можно ввести базис $\{p^1, \dots, p^J\}$ полиномов $y \mapsto p^j(y, z)$ в $\mathbb{P}_0(x^0)$, гладко зависящих от точки $x^0 \in \Upsilon$ (и от координаты z). При $\beta - l \in (-1, 0)$ определим пространство $\mathbf{D}_\beta^l V(\Omega)$ как множество функций, представимых в виде

$$(2.45) \quad u(x) = \sum_{j=1}^J p^{(j)}(y, z) (\mathfrak{C}k_j)(|y|, z) + \tilde{u}(x),$$

где $k_j \in H^{l-\beta}(\Upsilon)$ и $\tilde{u} \in \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)$. Подчеркнем, что согласно определению $\mathfrak{C}$ сумма из (2.45) исчезает вне $\mathcal{V}$. Нормой в $\mathbf{D}_\beta^l V(\Omega)$ назовем выражение

$$(2.46) \quad \|u; \mathbf{D}_\beta^l V(\Omega)\| = \left(\|\tilde{u}; \mathcal{D}_\beta^l V(\Omega)\| + \sum_{j=1}^J \|k_j; H^{l-\beta}(\Upsilon)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Так как операторы $\{\mathcal{L}^0(\nabla_\eta, 0), \mathcal{B}^0(\eta, \nabla_\eta, 0)\}$ модельных задач в $\mathbb{K}^0$ аннулируют полиномы $\eta \mapsto p^{(j)}(\eta, z)$, свойства оператора продолжения $\mathfrak{C}$ обеспечивают непрерывность отображения

$$(2.47) \quad \mathbf{A}_\beta^l = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}: \mathbf{D}_\beta^l V(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l V(\Omega),$$

где $\mathcal{R}_\beta^l V(\Omega)$ – то же пространство (2.6), что и в (2.7).

ТЕОРЕМА 2.17. Пусть полиномиальное свойство 1^0 у пары $\{\mathcal{L}, a\}$ сохраняется при замораживании коэффициентов в $\overline{\Omega}$, и при $x^0 \in \Upsilon$ форма a^0 , обслуживающая модельную задачу в $\mathbb{K}(x^0)$, удовлетворяет 3^0 . При указанных ограничениях на подпространства $P(x^0)$ существует такое $\delta > 0$, что в случае $l \geq \max \mathbf{t}$ и $\beta \in (l - \delta, l)$ оператор (2.47) задачи (2.1), (2.2) фредгольмов, а его ядро и коядро находятся по формулам (2.20) и (2.21), в которых вместо $\mathcal{P}_+(\mathcal{B})$ фигурирует линеал (2.36).

Так как коэффициенты $k_1, \dots, k_J$ не имеют даже первых производных, простое продолжение $\mathcal{V} \ni (y, z) \mapsto \chi(h^{-1}|y|)k_j(z)$ множителей k_j с ребрав Ω лишает получаемый остаток $\tilde{u}$ требуемой гладкости в Ω , т.е. без участия оператора $\mathfrak{C}$ ввести норму (2.46) не удастся. Разумеется, при $d = 0$ оператор продолжения не нужен и после естественных упрощений теоремы 2.17 и 2.13 доставляют фредгольмов оператор с нулевым индексом для задачи (2.1), (2.2) в области с коническими точками.

Техника отделения асимптотики, описанная здесь в простейшем варианте, оказывается полезной во многих вопросах. В [64], [65], [68]–[70] с ее помощью осуществлялись постановки (асимптотических) условий на подмногообразиях границы, описывались самосопряженные расширения дифференциальных операторов и строились псевдодифференциальные операторы на ребрах, порожденные эллиптическими задачами

и обобщающие такие классические характеристики задач, как матрицы рассеяния и поляризации. В рамках такого подхода ясную интерпретацию приобретают метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [71]) и критерии разрушения, учитывающие эффекты, локализованные в устьях трещин (см. [72]). Наконец, введение неизвестных угловых частей степенных решений (в (2.16) они вполне определены модельной задачей $\{\mathcal{L}^0, \mathcal{B}^0\}$ в $\mathbb{K}^0$) позволяет исследовать асимптотику решений даже тех краевых задач для нелинейных уравнений, которые не допускают линеаризацию из-за совпадения асимптотических порядков у линейных и нелинейных членов (см. [73] и др.).

5. Область с пересекающимися ребрами (многогранными углами).

Пусть множество Υ нерегулярностей границы $\partial\Omega$ является d -мерным подмногообразием, гладким всюду, кроме начала координат O , а в окрестности $\mathcal{V} \ni O$ область Ω совпадает с конусом $\mathbb{K}$, вырезающим на сфере $\mathbb{S}^{n-1} = \{x : r \equiv |x| = 1\}$ область ω . У ω имеется свое нерегулярное множество $v = \Upsilon \cap \mathbb{S}^{n-1}$, оказывающееся гладким $(d-1)$ -мерным подмногообразием границы $\partial\omega$. Если $n = 3$ и $d = 1$, то точка O может быть вершиной многогранного угла, а ω – сферическим многоугольником с вершинами $\varphi^1, \dots, \varphi^M \subset v$.

В области Ω рассмотрим задачу (2.1), (2.2) с краевыми условиями Неймана, т.е. возьмем оператор $\mathcal{B} = \mathcal{N}$ из формулы Грина (1.2). В согласии с (2.8) и (2.9) главные (в точке O) части $\mathcal{L}^0$ и $\mathcal{N}^0$ операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}$ запишем при помощи сферических координат (r, φ) и введем пучок

$$(2.48) \quad \mathfrak{A}(\lambda) = \{L^0(\varphi, \partial_\varphi, \lambda), N^0(\varphi, \partial_\varphi, \lambda)\},$$

которому предназначена та же роль, что и пучку (2.10) в случае вершин конусов с гладкой направляющей. В обсуждаемой задаче особенности границы $\partial\omega$ осложняют поиск подходящей области определения пучка (2.48). Теперь становятся понятными наши старания обеспечить нулевой индекс у операторов краевых задач в областях с гладкими ребрами – пучок (2.48) должен осуществлять изоморфизм при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением счетного набора изолированных точек из множества (2.11). В [27] показано, что в некритическом случае полиномиальное свойство 3^0 гарантирует справедливость постулатов общей теории [23], а в критическом случае ($n-d$ – четное число, $n-d \leq 2 \max \mathbf{t}$), когда теория [23] не работает, позволяет подобрать нужную область определения. Здесь мы ограничимся констатацией фактов, относящихся к критическому случаю (остальное можно найти в [27] и [23]).

Пространства $V_\beta^l(\omega, v)$ и $V_\beta^{l,s}(\omega, v)$ функций на ω определяются в соответствии с формулами (2.3) и (2.38), в которых градиент ∇_x заменен его сферической частью ∇_φ , а расстояние ρ до ребра v измеряется на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Векторные пространства $\mathcal{D}_\beta^{l,(d-n)/2}V(\omega, v)$ и $\mathcal{R}_\beta^l V(\omega, v)$ составляются по прежним правилам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.18 ([27]). Пусть $n-d$ – четное число, не превосходящее $2 \max \mathbf{t}$, а форма a^0 , получающаяся из (1.3) замораживанием коэффициентов в точке O , обладает полиномиальным свойством 3^0 . Тогда при $l \geq \max \mathbf{t}$ и $\beta \in (l-\delta, l)$ с некоторым $\delta > 0$ отображение

$$(2.49) \quad \mathfrak{A}(\lambda): \mathcal{D}_\beta^{l,(d-n)/2}V(\omega, v) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l V(\omega, v)$$

оказывается изоморфизмом при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, лежащих вне замкнутого двойного угла

$$\{\mu \in \mathbb{C} : |2 \operatorname{Re} \mu + n| \leq \gamma |\operatorname{Im} \mu|\}, \quad \gamma > 0.$$

В таком угле расположено счетное множество нормальных собственных чисел, сгущающееся лишь на бесконечности, а вершина $\lambda_0 = -n/2$ попадает в это множество лишь в том случае, если существует нетривиальный однородный полином $p = (p_1, \dots, p_T)$ обобщенной степени $-n/2$, удовлетворяющий условиям

$$\nabla_x^s p_j|_v = 0, \quad s < t_j - n/2, \quad j = 1, \dots, T.$$

Полная алгебраическая кратность собственного числа λ_0 совпадает с удвоенной размерностью линейала P_0^0 названных полиномов, $\ker \mathfrak{A}(\lambda_0) = P_0^0|_\omega$ и каждый собственный вектор имеет присоединенный.

Как обычно, отсутствие на прямой $i\mathbb{R} - (\beta^0 - l + n/2)$ собственных чисел пучка (2.49) позволяет применить преобразование Меллина (см. замечание 2.2 (1)) и при помощи равномерных относительно параметра $\lambda \in i\mathbb{R} - (\beta^0 - l + n/2)$ оценок резольвенты $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$ (подробности см. в [27; §3]) установить однозначную разрешимость модельной задачи (2.12) в пространстве $\mathscr{D}_{\beta, \beta^0}^{l, (d-n)/2} V(\mathbb{K}, v, O)$ с нормой

$$(2.50) \quad \left(\sum_{k=1}^T \sum_{q=0}^{l+t_k} \int_0^\infty r^{2(\beta^0 - l - t_k) + n - 1} \times \left\| \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^q u_k(r, \cdot); V_{\beta}^{l+t_k-q, t_k-q-(n-d)/2}(\omega, v) \right\|^2 dr \right)^{1/2},$$

порожденной весовой нормой в пространстве $\mathscr{D}_{\beta}^{l, (d-n)/2} V(\omega, v)$ на сечении ω конуса $\mathbb{K}$ с негладкой направляющей. В области Ω также вводятся два весовых множителя – расстояние ρ до множества $\Upsilon \subset \partial\Omega$ и расстояние r до точки O . Именно, пространство $V_{\beta, \beta^0}^{l, s, s^0}(\Omega, \Upsilon, O)$ является пополнением $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Upsilon)$ по весовой норме со ступеньками на уровнях s и s^0

$$\left(\sum_{q=0}^l \left\| r^{\beta^0 - \beta - \Theta(s-q) + \Theta(s^0-q)} \rho^{\beta - l + q + \Theta(s-q)} \nabla_x^q w; L_2(\Omega) \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Уничтожая ступеньки, т.е. вычеркивая функции Хевисайда $\Theta(s-q)$ и $\Theta(s^0-q)$, $\Theta(s^0-q)$, приходим к классам $V_{\beta, \beta^0}^{l, s}(\Omega, \Upsilon, O)$ и $V_{\beta, \beta^0}^l(\Omega, \Upsilon, O)$ соответственно. Как и ранее, определяются следовые и векторные пространства (ср. с (2.4)–(2.6)). Отметим, что норму

$$\|\cdot; \mathscr{D}_{\beta, \beta^0}^{l, (d-n)/2} V(\Omega, \Upsilon, O)\|$$

можно получить “склеиванием” норм

$$\|\cdot; \mathscr{D}_{\beta}^{l, (d-n)/2} V(\Omega, \Upsilon)\| \quad \text{и} \quad \|\cdot; \mathscr{D}_{\beta, \beta^0}^{l, (d-n)/2} V(\mathbb{K}, v, O)\|,$$

фигурировавших в (2.38) и (2.50).

ТЕОРЕМА 2.19 ([27]). Пусть $n - d$ есть четное число, $n - d \leq 2 \max t$, а форма (1.3), отвечающая задаче Неймана (2.1), (2.2), обладает полиномиальным свойством 3^0 , выдерживающим замораживание во всякой точке замыкания $\bar{\Omega}$. Тогда найдутся такие положительные числа δ и δ^0 , что при $l \geq \max t$ и $\beta \in (l - \delta, l)$ выполняются следующие утверждения.

1) *Отображение*

$$(2.51) \quad \{\mathcal{L}, \mathcal{N}\}: \mathcal{D}_{\beta, \beta^0}^{l, (d-n)/2} V(\Omega, \Upsilon, O) \rightarrow \mathcal{R}_{\beta, \beta^0}^l V(\Omega, \Upsilon, O)$$

является фредгольмовым в том и только том случае, если прямая $i\mathbb{R} - (\beta^0 - l + n/2)$ свободна от спектра пучка (2.49).

2) Если линеал P_0^0 , указанный в предложении 2.18, тривиален, то при $|\beta^0 - l| < \delta^0$ оператор (2.51) задачи Неймана (2.1), (2.2) имеет нулевой индекс и его ядро совпадает с подпространством $\mathcal{P}_*^+$ полиномов из $\mathcal{P}_*(\mathcal{N})$ (см. (2.36)), подчиненных условиям (2.25) с $x^0 = O$ и $M = 1$. Условиями разрешимости задачи служат равенства

$$(2.52) \quad (f, p)_\Omega + (g, \mathcal{D}p)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_*^+.$$

3) Если $\dim P_0^0 = 0$, то при $\beta^0 \in (l - \delta^0, l)$ оператор задачи (2.1), (2.2),

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{N}\}: \mathcal{D}_{\beta, \beta^0}^{l, (d-n)/2, -n/2} V(\Omega, \Upsilon, O) \rightarrow \mathcal{R}_{\beta, \beta^0}^l V(\Omega, \Upsilon, O)$$

фредгольмов, причем его индекс равен нулю, ядро совпадает с линеалом полиномов $\mathcal{P}_*^+$, а коядро принимает вид $\{(p, \mathcal{D}p) : p \in \mathcal{P}_*^+\}$ (см. (2.52)).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.20. В условиях теорем 2.13 и 2.19 (2, 3) для операторов простой структуры $\mathcal{P}(\mathcal{N}) = \mathcal{P}$ в силу предложения 1.5. Поэтому ядра указанных в теоремах операторов задачи Неймана состоят из тех полиномов $p \in \mathcal{P}$, которые принадлежат областям определения операторов. Переформулировка последнего включения как раз и приводит к условиям Соболева (2.36) на Υ или (2.25) в точке O . Для систем уравнений второго порядка (примеры 1.12 и 1.13) $t_j = 1$ и $t_j - (n - d)/2 \leq 0$, т.е. условия Соболева исчезают и ядра совпадают с полным линеалом $\mathcal{P}$.

Общая схема [23] исследования геометрических особенностей более сложной структуры порождает иерархию модельных и эталонных задач (ср. с (2.12), (2.28) и (2.27) соответственно). Приемы, описанные в данном параграфе, позволяют последовательно рассмотреть эти задачи и реализовать схему в случае краевых условий Дирихле или Неймана при наличии полиномиального свойства у системы дифференциальных уравнений в области (подробности см. в [27]). Если подобные P_0^0 линеалы полиномов оказываются тривиальными (см. (2.33) и предложение 2.18), то и смешанные краевые задачи обрабатываются по схеме из [23] (ср. с замечанием 2.15). При нетривиальных линеалах типа P_0^0 требуются пространства с отделенной асимптотикой (п. 4 §2) или комбинации ступенчатых и обычных весовых норм (пример 2.14), однако смешанные краевые задачи изучались в [64], [65] только для областей с гладкими ребрами.

6. О собственных числах пучков. В большинстве утверждений данного параграфа устанавливались границы изменения весовых индексов, которые согласно [13], [14], [22], [23], [27] определяются спектром пучков вида (2.10) и (2.49), (2.48). Для

конкретных задач математической физики проделано множество расчетов таких собственных чисел (см. [74], [62], [41], [75], [63], а также упомянутые там ссылки); в некоторых случаях для них найдены асимптотические формулы (см. [76]–[79], [43; гл. 10] и др.). Кроме того, в [80]–[82] установлены тонкие оценки размеров полос, заведомо свободных от спектра пучков, порожденных операторами Ламе и Стокса (т.е. для величин δ и δ_0 , возникавших в теоремах этого параграфа).

Полное описание спектра пучков для достаточно общих систем уравнений возможно лишь при простейших формах конусов – проколотого пространства $\mathbb{R}^n \setminus O$ и полупространства $\mathbb{R}_+^n$ (см. [83]), а также угла с раствором 2π (см. [84]). Именно такие формы возникают в асимптотических методах при сингулярном возмущении гладких границ ([42], [43], [71], [85] и др.), в теории задач Соболева ([61], [31; §12.7] и др.) и в механике разрушения ([72], [31; гл. 7] и др.). Сформулируем несколько утверждений относительно оператор-матриц (1.10) простой структуры с краевыми условиями, соответствующими (1.6); при этом особое внимание уделяем задачам Дирихле и Неймана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.21 ([83], [71]). 1) Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n \setminus O$, то спектр пучка (2.10),

$$(2.53) \quad \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda) = L(\varphi, \partial_\varphi, \lambda): H^{l+\mathbf{t}}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H^{l-\mathbf{t}}(\mathbb{S}^{n-1}),$$

совпадает с объединением множеств $\mathbb{Z}_+(-\max \mathbf{t})$ и $\mathbb{Z}_-(n - \max \mathbf{t})$, где

$$\mathbb{Z}_\pm(k) = \{q \in \mathbb{Z} : \pm q \geq k\}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Степенные решения (2.16) являются либо полиномами, либо линейными комбинациями производных столбцов фундаментальной матрицы для оператора $\mathcal{L}^0(\nabla_x)$ в $\mathbb{R}^n$.

2) Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+^n$, то спектр пучка (2.10) содержится в объединении $\mathbb{Z}_+(-\max \mathbf{t}) \cup \mathbb{Z}_-(n - \max \mathbf{t})$. В случае условий Неймана он не отличается от этого объединения, а в случае условий Дирихле равен $\mathbb{Z}_+(0) \cup \mathbb{Z}_-(n)$. Степенные решения (2.16) являются либо полиномами, либо производными в касательных направлениях ядер Пуассона для задачи $\{\mathcal{L}^0(\nabla_x), \mathcal{B}^0(\nabla_x)\}$ в $\mathbb{R}_+^n$.

В очередном утверждении $n = 2$ и $\mathbb{K}$ – плоскость с полубесконечным разрезом,

$$(2.54) \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x : x_1 \leq 0, x_2 = 0\} = \{x = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) : \rho > 0, |\varphi| < \pi\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.22 ([84], [86]). 1) Спектр пучка (2.10), отвечающего задаче Дирихле для оператора $\mathcal{L}^0(\nabla_x)$ в $\mathbb{K}$, совпадает с множеством

$$(2.55) \quad \mathcal{X}_{\mathcal{D}} \cup \{\lambda : \lambda = i\mu_q + k + 1/2, k \in \mathbb{Z}, q = 1, \dots, Q\},$$

где $\mathcal{X}_{\mathcal{D}} = \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, а Q и $\mu_1, \dots, \mu_q$ – натуральное и вещественные числа (не зависящие от k). Все собственные числа просты алгебраически, т.е. присоединенных векторов нет. Полная кратность собственных чисел на прямой $i\mathbb{R} + k + 1/2$ равна $m = t_1 + \dots + t_T$; размерности собственных подпространств

$\ker \mathfrak{A}(i\mu_q + k + 1/2)$ одинаковы при всех $k \in \mathbb{Z}$. Кратность собственных чисел $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ равна

$$(2.56) \quad \sum_{j=1}^T \min\{p+1, t_j\},$$

а отвечающие им степенные решения оказываются полиномами. Ту же кратность (2.56) имеют собственные числа $-2-p$.

2) Спектр пучка (2.10), отвечающего задаче Неймана для оператора $\mathcal{L}^0(\nabla_x)$ в $\mathbb{K}$, совпадает с множеством

$$(2.57) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{N}} \cup \{\lambda : \lambda = i\mu_q + k + 1/2, \ k \in \mathbb{Z}, \ q = 1, \dots, Q\},$$

где $\mathcal{L}_{\mathcal{N}} = \mathbb{Z}$, а остальные обозначения – те же, что и в (2.55). Простыми являются все собственные числа, кроме целых точек отрезка $I = [-\max \mathbf{t}, \max \mathbf{t} - 2]$, частные кратности которых не превосходят двух. Полная кратность собственных чисел на прямой $i\mathbb{R} + k + 1/2$ равна $m = t_1 + \dots + t_T$; размерности подпространств $\ker \mathfrak{A}(i\mu_q + k + 1/2)$ одинаковы при всех $k \in \mathbb{Z}$. Если $p \in \mathbb{Z}$, то сумма

$$s(p) = \sum_{j=1}^T \min\{(p+1+t_j)_+, t_j\}$$

указывает размерность подпространства в $\ker \mathfrak{A}(p)$, состоящего из следов на окружности $\mathbb{S}^1$ полиномов переменных $x = (x_1, x_2)$. Полные алгебраические кратности собственных чисел p и $-2-p$ равны $s(p) + s(-2-p)$. Наконец, $\dim \ker \mathfrak{A}(p) = s(p)$ при $p \geq -1$, т.е. для таких p все собственные векторы – следы полиномов и существует $s(-2-p)$ присоединенных векторов первого порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.23. 1) Согласно [84] для справедливости предложения 2.22 необходима монотонная зависимость энергии от длины трещины. В задачах Дирихле и Неймана энергетический функционал, разумеется, возрастает и убывает соответственно, однако для смешанных краевых задач монотонности нет. Например, степенные решения уравнения Лапласа $-\Delta_x u = 0$ в $\mathbb{K}$ с условиями Дирихле при $\varphi = -\pi$ и Неймана при $\varphi = \pi$ имеют вид $r^\lambda \sin \lambda(\varphi + \pi)$, где $\lambda = k \pm 1/4$ и $k \in \mathbb{Z}$, т.е. спектр пучка не обладает провозглашенными свойствами. Из-за “неправильного” знака при блоке Q_{22} матрицы Q из (1.40) задачи Дирихле и Неймана для системы уравнений теории пьезоэлектрических тел не подчиняются предложению 2.22, однако основными в теории являются смешанные условия

$$(2.58) \quad \Lambda'(\nu(x))^t Q \Lambda(\nabla_x) u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$(2.59) \quad u_4(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

означающие, что механические усилия g приложены к поверхности $\partial\Omega$, электропроводящей и в силу (2.59) эквипотенциальной (в (2.58) (9×3) -матрица $\Lambda'(\xi)$ составлена

из трех первых столбцов матрицы $\Lambda(\xi)$; см. (1.40)). Соответствующий энергетический функционал убывает при росте трещины, на берегах которой назначены условия (2.58), (2.59), а значит, предложение 2.22 сохраняет силу.

2) В [84] спектры были погружены в множество (2.55) или (2.57); кроме того, была проверена алгебраическая простота собственных чисел с полужелыми вещественными частями. Остальные заключения об их количестве и кратностях делаются на основе предложения 2.3 с привлечением трюка [86]: поскольку собственные числа не могут покидать прямые $i\mathbb{R} + k + 1/2$ или множество $\mathbb{Z}$, в силу [87] их кратности такие же, как и у пучка, порожденного диагональной матрицей $\text{diag}\{\Delta_x^{t_1}, \dots, \Delta_x^{t_T}\}$, к которой можно придти непрерывным искажением оператора $\mathcal{L}^0(\nabla_x)$. В [84] показано также, что предложение 2.22 приспособливается к задачам с кусочно постоянными коэффициентами – на луче $\{x : x_1 > 0, x_2 = 0\}$ допускается постановка условий сопряжения (трансмиссии). Подсчет кратностей собственных чисел из предложения 2.21 нетрудно произвести посредством приема из [88; §13.1] (см. [83], [85]).

В задачах механики разрушения и других приложениях асимптотических методов важную роль играет нормировка степенных решений (см. [15] и [20; §5.2], [31; §6.1]). Для полного конуса $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n \setminus O$ все условия нормировки и биортогональности достигаются при помощи алгебраических операций и дифференцирования (см. [31; §6.4] и [71], [85]); та же процедура пригодна в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+^n$. Для трещины к упрощениям приводят следующие два наблюдения [84], [72]. Во-первых, производная $\partial \mathcal{U} / \partial x_1$ решения (2.17) задачи в угле (2.54) оказывается степенным решением с показателем $\lambda - 1$, которое аннулируется лишь при $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_2)$ (поэтому степенное решение, отвечающее собственному числу $\lambda = 0$ из (2.55), – полином переменной x_2). Во-вторых, в антисимметричной форме

$$q(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = (\mathcal{N}\mathcal{U}, \mathcal{D}\mathcal{V})_\Gamma - (\mathcal{D}\mathcal{U}, \mathcal{N}\mathcal{V})_\Gamma,$$

проистекающей из (1.2) и отвечающей за обсуждаемую ортогонализацию, возможна “переброска” производных

$$(2.60) \quad q(\partial \mathcal{U} / \partial x_1, \mathcal{V}) = -q(\mathcal{U}, \partial \mathcal{V} / \partial x_1)$$

(см. [84], [85]); здесь Γ – произвольная дуга, соединяющая берега разреза внутри угла (2.54), а сама формула (2.60) верна лишь для степенных решений $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Таким образом, достаточно соблюсти условия биортогональности для решений, отвечающих собственным числам на прямых $i\mathbb{R} - 1 \pm 1/2$, – формула (2.60) распространит их на все элементы базиса, достроенные при помощи интегрирования и дифференцирования вдоль трещины (по переменной x_1).

7. Задачи Соболева. В этом разделе показывается, как предшествующие результаты приспособляются к задачам с данными на внутренних подмногообразиях. Поскольку формулировки теорем практически не изменяются, ограничимся рассмотрением примеров, связанных с уравнениями четвертого порядка.

ПРИМЕР 2.24. Рассмотрим задачу Неймана для системы теории пластин, описанной в примере 1.14. Точки $x^1, \dots, x^M$ могут быть как угловыми, так и внутренними

(если все они лежат в Ω , то граница $\partial\Omega$ гладкая). Согласно (1.42) линеалы полиномов (2.20) и (2.15), (2.24) выглядят так:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_+(\mathcal{N}) &= \{(-c_0x_2, c_0x_1, 0) : c_0 \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{P}_0^\mu(\mathcal{N}) &= \{(c_1, c_2, C_1(x_1 - x_1^\mu) + C_2(x_2 - x_2^\mu)) : c_i, C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}, \\ \mathcal{P}_-(\mathcal{N}) &= \{(0, 0, C_0) : C_0 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

По теореме 2.13 оператор задачи $\mathcal{A}_\beta^{l,-1}$ с областью определения

$$(2.61) \quad \mathcal{D}_\beta^{l,-1}V(\Omega) = V_\beta^{l+1,0}(\Omega)^2 \times V_\beta^{l+2,1}(\Omega), \quad l \in \{2, 3, \dots\}, \quad \beta \in (l - \delta, l),$$

фредгольмов с нулевым индексом, а его ядро и коядро описываются при помощи линеала $\mathcal{P}_*(\mathcal{N})$ из (2.36). В случае $M = 1$ (множество иррегулярностей Υ состоит из одной точки x^1) получаем

$$(2.62) \quad \mathcal{P}_*(\mathcal{N}) = \{(c_1 - c_0x_2, c_2 + c_0x_1, C_1(x_1 - x_1^1) + C_2(x_2 - x_2^1)) : c_i, C_i \in \mathbb{R}\}.$$

Если точки $x^1, \dots, x^M$ лежат на прямой $\mathbb{L} = \{x : a_1x_1 + a_2x_2 = a_0\}$, то в (2.62) коэффициенты C_1 и C_2 связываются соотношением $a_2C_1 = a_1C_2$, т.е. размерность линеала уменьшается до четырех. Наконец, при наличии невырожденного треугольника с вершинами из Υ в (2.62) $C_1 = C_2 = 0$ и $\dim \mathcal{P}_*(\mathcal{N}) = 3$. Влияние геометрии на подпространства $\ker \mathcal{A}_\beta^{l,-1}$ и $\text{coker } \mathcal{A}_\beta^{l,-1}$ обусловлено постановкой условий Соболева $u_3(x) = 0$, $x \in \Upsilon$, означающих жесткое защемление пластины в точках $x^1, \dots, x^M$ и оказывающихся корректными в силу вложений $V_\beta^{l+2,1}(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ (см. (2.38) и (2.62)) и $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим задачу Дирихле для бигармонического уравнения

$$(2.63) \quad \Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \quad u(x) = \partial_\nu u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

и соответствующую задачу Соболева

$$(2.64) \quad \Delta^2 w(x) = f(x), \quad x \in \Omega \setminus \Upsilon; \quad w(x) = \partial_\nu w(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad w(x) = 0, \quad x \in \Upsilon,$$

где Ω — область с гладкой границей и $\Upsilon \subset \Omega$. Пусть сначала $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и для простоты $\Upsilon = \{O\}$, т.е. обе задачи связываются с теорией пластин Кирхгофа (см. далее пример 4.6 (2)). Если $f \in L_2(\Omega)$, то обобщенные постановки задач (2.63) и (2.64) приводят к их однозначной разрешимости соответственно на подпространствах

$$\begin{aligned}\mathring{H}^2(\Omega) &= \{u \in H^2(\Omega) : u = \partial_\nu u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}, \\ \mathring{H}^2(\Omega, O) &= \{w \in \mathring{H}^2(\Omega) : w(O) = 0\}.\end{aligned}$$

Связь решений u и w поясняется в следующих утверждениях.

ЛЕММА 2.25. 1) Функция Грина $G(\cdot, y)$ задачи (2.63) с особенностью в точке $y \in \Omega$ попадает в пространство $\mathring{H}^2(\Omega)$ и допускает представление

$$G(x, y) = G^0(x, y) - (8\pi)^{-1}|x - y|^2 \ln|x - y|,$$

причем регулярная часть G^0 гладко зависит от $x \in \bar{\Omega}$ и

$$G^0(y, y) = G(y, y) = \int_{\Omega} |\Delta_x G(x, y)|^2 dx > 0.$$

2) Решения $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$ и $w \in \mathring{H}^2(\Omega, O)$ задач (2.63) и (2.64) связаны равенством

$$(2.65) \quad w(x) = u(x) - G(O, O)^{-1}u(O)G(x, O).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.26 ([89]). 1) Неограниченный оператор $\mathbf{A}_0$ в $L_2(\Omega)$, заданный дифференциальным выражением Δ^2 и имеющий область определения

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}_0) = \{u \in H^4(\Omega) \cap \mathring{H}^2(\Omega) : \nabla_x^s u(0) = 0, \quad s = 0, 1, 2\},$$

является замкнутым и симметрическим, а область определения сопряженного оператора $\mathbf{A}_0^* = \Delta^2$ такова:

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}_0^*) = \left\{ u : u = u^0 + \sum_{k=0}^5 (a_k \chi V_k + b_k G_k), \right. \\ \left. u^0 \in \mathcal{D}(\mathbf{A}_0), \quad a = (a_0, \dots, a_5)^t, \quad b = (b_0, \dots, b_5)^t \in \mathbb{R}^6 \right\};$$

здесь $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ в окрестности точки O ,

$$V_0 = 1, \quad V_i(x) = x_i, \quad V_{2+i}(x) = 2^{-1/2}x_i^2 \quad (i = 1, 2), \quad V_5(x) = x_1 x_2, \\ G_k(x) = V_k(\nabla_y)G(x, y)|_{y=0}.$$

2) Пусть $\mathbb{R}^6 = \mathbf{N}^+ \oplus \mathbf{N}^0 \oplus \mathbf{N}^-$ – ортогональное разложение и $\mathbf{S}$ – симметрический обратимый оператор в $\mathbf{A}^0$. Сужение $\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}_0^*$ на линейал

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \{u \in \mathcal{D}(\mathbf{A}_0^*) : a = \mathbf{n}^+ + \mathbf{n}^0, \quad b = \mathbf{n}^- + \mathbf{S}\mathbf{n}^0, \quad \mathbf{n}^\theta \in \mathbf{N}^\theta, \quad \theta = 0, \pm\}$$

оказывается самосопряженным расширением оператора $\mathbf{A}_0$. Всякое самосопряженное расширение описывается указанным способом.

3) Расширение по Фридрихсу (т.е. $\mathbf{N}^+ = \mathbb{R}^6$, $\mathbf{N}^- = \mathbf{N}^0 = \{0\}^6$) отвечает задаче (2.63), а расширение, в котором $\mathbf{N}^+ = \{0\} \times \mathbb{R}^5$, $\mathbf{N}^- = \mathbb{R} \times \{0\}^5$ и $\mathbf{N}^0 = \{0\}^6$, – задаче Соболева (2.64).

По поводу техники самосопряженных расширений сошлемся на основополагающую работу [90], обзор [91] и статьи [68], [71], [85]. В последних рассматриваются расширения симметрических операторов в весовых классах и с помощью методов, разработанных в [40], [43], дается асимптотическое истолкование моделям сред с точечными дефектами (см. [91]–[93] и др.) и выводятся оценки их погрешностей.

Обсудим многомерную задачу Соболева (2.64). Если Υ – гладкий замкнутый контур внутри $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то задача обслуживается теоремой 2.13: оператор с областью определения $V_{\beta}^{l+2,1}(\Omega)$ является изоморфизмом при $l \geq 2$ и $\beta \in (l-1, l)$. Если же Υ – гладкая дуга с концами $x^{\pm}$, то нужный результат доставляет теорема 2.19. В качестве области определения берется пространство $V_{\beta, \beta^0}^{l+2,1}(\Omega, \Upsilon, x^{\pm})$, а оператор задачи (2.64) оказывается изоморфизмом в случае $l \geq 2$, $\beta \in (l-1, l)$ и $|\beta^0 - l| < 1/2$. Конкретные значения числам δ и δ^0 , фигурирующим в использованных теоремах и задающим границы изменения весовых индексов, придают предложение 2.21 (1) и

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.27. Пусть $\mathcal{L}$ – оператор-матрица (1.10). Собственные числа λ пучка (2.49), порожденного модельной задачей

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0(\nabla_x)u(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{K} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{L}_+}, \\ \nabla_x^s u_j(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{L}_+ = \{x : x_1 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n > 0\}, \\ s &< t_j - n/2, \quad j = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

удовлетворяют включениям $\operatorname{Re} \lambda \in \mathbb{Z}$ при четном n и $2 \operatorname{Re} \lambda \in \mathbb{Z}$ при нечетном n .

Разумеется, интересным является лишь случай $n < 2 \max t$. Доказательство достигается при помощи того же приема [84], который привел к предложению 2.22 (1). Возможны обобщения на задачи с условиями сопряжения (трансмиссии) на гиперплоскостях, содержащих луч $\mathbb{L}_+$ (ср. с [86]). Доступна и некоторая информация о собственных и присоединенных векторах, а для скалярных операторов в [79] найдены явные формулы.

Отметим, наконец, что разрешимость задач Соболева для общих систем и асимптотические свойства их решений изучались в [61], [83], [31; § 12.7].

§ 3. Краевые задачи в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность

1. Краевые задачи. Рассмотрим задачу

$$(3.1) \quad \mathcal{L}(x, \nabla_x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(3.2) \quad \mathcal{B}(x, \nabla_x)u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

в области Ω , имеющей несколько цилиндрических выходов на бесконечность. Как обычно, для $u, v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^T$ справедлива формула Грина (1.2) или (1.20) и пара $\{\mathcal{L}, a\}$ обладает полиномиальным свойством 1^0 , выдерживающим замораживание всюду в $\overline{\Omega}$. Коэффициенты дифференциальных операторов $\mathcal{L}(x, \nabla_x)$ и $\mathcal{B}(x, \nabla_x)$ гладкие. Уточним геометрические формы выходов. Введем цилиндры $\mathbb{Q}^\mu = \{(y^\mu, z^\mu) : y^\mu \in \omega^\mu, z^\mu \in \mathbb{R}\}$, где $\omega^\mu \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – области с гладкими границами $\partial\omega^\mu$ и компактными замыканиями $\overline{\omega^\mu}$, а $x^\mu = (y^\mu, z^\mu)$ – системы декартовых координат (свои для каждого $\mu = 1, \dots, M$). Предположим, что полуцилиндры $\mathbb{Q}_+^\mu = \{x^\mu \in \mathbb{Q}^\mu : z^\mu > 0\}$ дизъюнкты, а область Ω , имея гладкую $(n-1)$ -мерную границу $\partial\Omega$, совпадает вне шара $\mathbb{B}_R^n = \{x : |x| < R\}$ с объединением $\mathbb{Q}_+^1 \cup \dots \cup \mathbb{Q}_+^M$, причем торцы $\omega^\mu(0) = \{x^\mu \in \mathbb{Q}^\mu : z^\mu = 0\}$ погружены в $\Omega \cap \mathbb{B}_R^n$.

Пусть $\mathcal{L}^\mu(x^\mu, \nabla_{x^\mu})$ и $\mathcal{B}^\mu(x^\mu, \nabla_{x^\mu})$ — дифференциальные операторы из (3.1) и (3.2), суженные на $\mathbb{Q}_+^\mu \setminus \mathbb{B}_R^n$ и $\partial\mathbb{Q}_+^\mu \setminus \mathbb{B}_R^n$ (система x привязана к Ω , и поэтому дополнительно требуется переписать в координатах x^μ). Будем считать, что при $z^\mu \rightarrow +\infty$ эти операторы с экспоненциальной скоростью стабилизируются к операторам $L^\mu(y^\mu, \nabla_{y^\mu}, \partial_{z^\mu})$ и $B^\mu(y^\mu, \nabla_{y^\mu}, \partial_{z^\mu})$, т.е. для каждого из коэффициентов $b(y^\mu, z^\mu)$ выполняются соотношения

$$(3.3) \quad |\nabla_{x^\mu}^k [b(y^\mu, z^\mu) - b^\infty(y^\mu)]| \leq c_k \exp(-\gamma_\mu z^\mu),$$

где $\gamma_\mu > 0$ и $k = 0, 1, \dots$. Заменим ∂_{z^μ} на λ и получим аналогичный (2.10) полиномиальный пучок

$$(3.4) \quad \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}^\mu(\lambda) = \{L^\mu(y^\mu, \nabla_{y^\mu}, \lambda), B^\mu(y^\mu, \nabla_{y^\mu}, \lambda)\} : \mathcal{D}^l H(\omega^\mu) \rightarrow \mathcal{R}^l H(\omega^\mu, \partial\omega^\mu),$$

в котором векторные пространства $\mathcal{D}^l H(\cdot)$ и $\mathcal{R}^l H(\cdot)$ определены согласно (1.26) и (1.27).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В согласии с [94], [95], [20], [31; § 3.4] все излагаемые результаты приспособляются к той ситуации, когда коэффициенты $b(y^\mu, z^\mu)$ стабилизируются к периодическим функциям $z^\mu \mapsto b^\infty(y^\mu, z^\mu)$. Разумеется, при этом множества $\mathbb{Q}^\mu$ могут иметь периодически изменяющиеся сечения $\omega^\mu(z^\mu)$. Здесь мы пренебрегаем этим обобщением для упрощения формул, но еще вернемся к нему в п. 2 § 5.

2. Экспоненциальные решения. Пусть λ — собственное число пучка $\mathfrak{A}^\mu$, а $\Phi^0, \dots, \Phi^{s-1}$ — соответствующая жорданова цепочка длиной s , т.е. собственный Φ^0 и присоединенные $\Phi^1, \dots, \Phi^{s-1}$ векторы удовлетворяют уравнениям

$$\mathfrak{A}^\mu(\lambda) \Phi^q = - \sum_{h=1}^q \frac{1}{h!} \frac{d^h \mathfrak{A}^\mu}{d\lambda^h}(\lambda) \Phi^{q-h}, \quad q = 0, \dots, s-1,$$

а уравнение с номером $q = s$ неразрешимо. Согласно [13], [83] указанные соотношения гарантируют, что функции

$$(3.5) \quad \mathcal{U}^{\mu q}(y, z) = \exp(\lambda z) \sum_{h=0}^q \frac{1}{h!} z^h \Phi^{q-h}(y), \quad q = 0, \dots, s-1,$$

являются решениями однородной модельной задачи $\{L^\mu, B^\mu\}$ в цилиндре $\mathbb{Q}^\mu$. Такие решения называем *экспоненциальными* даже в том случае, если $\lambda = 0$ и множитель $\exp(\lambda z)$ в (3.5) исчезает. Пусть P^μ — линейал полиномов, соотнесенный с $\{L^\mu, a^\mu\}$ в 1^0 . Так как коэффициенты операторов L^μ, B^μ и формы a^μ не зависят от z^μ , линейал $P^\mu(B^\mu)$ характерен тем, что

$$(3.6) \quad p \in P^\mu(B^\mu) \Rightarrow \partial p / \partial z^\mu \in P^\mu(B^\mu).$$

Отсюда вытекает, что в $P^\mu(B^\mu)$ имеется базис

$$(3.7) \quad \{p^{\mu ik} : i = 1, \dots, I_\mu, k = 0, \dots, \tau_{\mu i} - 1\},$$

подчиненный требованиям

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & p^{\mu i 0} \text{ не зависит от } z^\mu, \\ & \partial p^{\mu i k} / \partial z^\mu = p^{\mu i k-1} \text{ при } k = 1, \dots, \tau_{\mu i} - 1, i = 1, \dots, I_\mu. \end{aligned}$$

Нетрудно обнаружить, что в соответствии с (3.5) $\partial \mathcal{U}^{\mu q} / \partial z^\mu = \mathcal{U}^{\mu q-1}$ при $\lambda = 0$, а значит, по базису (3.7) можно построить собственные и присоединенные векторы пучка $\mathfrak{A}^\mu$, отвечающие $\lambda = 0$. Очередное утверждение показывает, что, как и в §2, такая операция достаточна для определения спектра пучка (3.4) в узкой полосе $\Pi^\mu = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \lambda| < \delta_\mu\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2 ([31; §5.4], [33]). *Существует $\delta_\mu > 0$, при котором верны следующие факты.*

- 1) *Если $\dim P^\mu(B^\mu) = 0$, то полоса Π^μ свободна от спектра пучка $\mathfrak{A}^\mu$.*
- 2) *Пусть подпространство $P^\mu(B^\mu)$ нетривиально и дополнительно форма a^μ подчинена условию 3⁰ или 4⁰. Тогда в полосе Π^μ расположено единственное собственное число $\lambda = 0$, частные алгебраические кратности которого равны $2\tau_{\mu 1}, \dots, 2\tau_{\mu I_\mu}$. Базис (3.7) можно выбрать так, чтобы жордановы цепочки, составленные из следов полиномов $p^{\mu i 0}(\cdot), p^{\mu i s}(\cdot, 0), \dots, p^{\mu i \tau_{\mu i}-1}(\cdot, 0)$, продолжались до длин $2\tau_{\mu i}$ и полученная таким образом система цепочек оказалась канонической.*

3. Оператор задачи в экспоненциальных весовых классах. Через $W_\beta^l(\Omega)$ обозначим пополнение $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|w; W_\beta^l(\Omega)\| = \|e_\beta w; H^l(\Omega)\|,$$

где e_β — гладкая положительная функция в $\overline{\Omega}$, совпадающая на $\mathbb{Q}_+^\mu \setminus \mathbb{B}_R^n$ с $\exp(\beta z^\mu)$; $\mu = 1, \dots, M$. Как и в (2.4)–(2.6), определяются следовое $W_\beta^{l-1/2}(\partial\Omega)$ и векторные $\mathcal{D}_\beta^l W(\Omega), \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega)$ весовые пространства. С задачей (3.1), (3.2) связывается отображение

$$(3.9) \quad \mathcal{A}_\beta^l = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}: \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega).$$

Если на прямой $i\mathbb{R} - \beta$ нет собственных чисел пучков $\mathfrak{A}^1, \dots, \mathfrak{A}^M$, то оператор (3.9) фредгольмов (см. [96], [13], [20], [31; §5.1]). Так как только тривиальный полином квадратично суммируем в Ω , благодаря полиномиальному свойству справедлива

ЛЕММА 3.3. *При $\beta \geq 0$ оператор $\mathcal{A}_\beta^l$ — мономорфизм, т.е. $\ker \mathcal{A}_\beta^l = \{0\}$.*

Аналоги утверждений 2.4 и 2.5 представлены, например, в [20], [31; §5.1]. Остается сформулировать результат.

ТЕОРЕМА 3.4 ([31; §5.4], [33]). 1) *В условиях предложения 3.2 (1), $\mu = 1, \dots, M$, оператор $\mathcal{A}_\beta^l$ задачи (3.1), (3.2) является изоморфизмом при $|\beta| < \delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_M\}$ и $l \geq \max t$.*

2) *Пусть в случае $\dim P^\mu(B^\mu) > 0$ выполнены условия предложения 3.2 (2) и $\pm\beta \in (0, \delta)$. Тогда операторы $\mathcal{A}_{\beta+}^l$ и $\mathcal{A}_{\beta-}^l$ суть фредгольмовы мономорфизм*

и эпиморфизм соответственно, т.е. $\dim \ker \mathcal{A}_{\beta+}^l = \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_{\beta-}^l = 0$. Подпространства $\operatorname{coker} \mathcal{A}_{\beta+}^l$ и $\ker \mathcal{A}_{\beta-}^l$ имеют одинаковые размерности τ , где

$$\tau = \tau_1 + \dots + \tau_M, \quad \tau_\mu = \tau_{\mu 1} + \dots + \tau_{\mu I_\mu}.$$

4. Пространства с отделенной асимптотикой. В условиях теоремы 3.4 (2)

$$\dim \ker \mathcal{A}_{\beta+}^l = 0, \quad \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_{\beta+}^l = \tau > 0,$$

и поэтому для построения фредгольмова оператора с нулевым индексом достаточно присоединить к $\mathcal{D}_{\beta+}^l W(\Omega)$ подходящее подпространство размерностью τ . Согласно предложению 3.2 (2) эту роль могут взять на себя полиномиальные линейалы $P^1(B^1), \dots, P^M(B^M)$, заведомо обладающие тем преимуществом, что они приводят к решениям u с конечной “энергией” $a(u, u; \Omega)$. Реализуем намеченное.

Пусть $\chi_\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ – срезающая функция, равная единице на $\mathbb{Q}_+^\mu \setminus \mathbb{B}_{2R}^n$ и имеющая носитель в $\overline{\mathbb{Q}_+^\mu} \setminus \mathbb{B}_R^n$. Умножим каждый полином $p \in P^\mu(B^\mu)$ на χ_μ и при $\beta > 0$ образуем пространство

$$\mathbf{D}_\beta^l W(\Omega) = \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega) \dot{+} \chi_1 P^1(B^1) \dot{+} \dots \dot{+} \chi_M P^M(B^M)$$

из функций, представимых в виде

$$(3.10) \quad u = \tilde{u} + \sum_* c_{\mu i q} \chi_\mu p^{\mu i q},$$

где $p^{\mu i q}$ – элементы базисов (3.7), $c_{\mu i q} \in \mathbb{C}$ и $\sum_*$ означает суммирование по $\mu = 1, \dots, M, i = 1, \dots, I_\mu$ и $q = 0, \dots, \tau_{\mu i} - 1$. Кроме того,

$$\|u; \mathbf{D}_\beta^l W(\Omega)\| = \left(\|\tilde{u}; \mathcal{D}_\beta^l W(\Omega)\|^2 + \sum_* |c_{\mu i q}|^2 \right)^{1/2},$$

а изменение базисов или срезающих функций, разумеется, не влияет на $\mathbf{D}_\beta^l W(\Omega)$ ни алгебраически, ни топологически.

Пусть $0 < \beta < \min\{\delta_\mu, \gamma_\mu \mid \mu = 1, \dots, M\}$, где γ_μ и δ_μ – положительные числа, взятые из условий стабилизации (3.3) и из предложения 3.2. Так как полиномы из $P^\mu(B^\mu)$ аннулируются модельным оператором $\{\mathcal{L}^\mu, \mathcal{B}^\mu\}$, нетрудно убедиться в том, что оператор задачи (3.1), (3.2),

$$(3.11) \quad \mathbf{A}_\beta^l: \mathbf{D}_\beta^l W(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega),$$

является непрерывным при $l \leq \max \mathbf{t}$. Теперь вычисление $\operatorname{Ind} \mathbf{A}_\beta^l$ и использование полиномиального свойства 1^0 дает нужный результат.

ТЕОРЕМА 3.5 ([33]). Пусть выполнены условия теоремы 3.4 (2). Тогда при указанных ограничениях на l и β (фредгольмов) оператор (3.11) имеет нулевой индекс, причем $\ker \mathbf{A}_\beta^l = \mathcal{P}(\mathcal{B})$ и $\operatorname{coker} \mathbf{A}_\beta^l = \{(p, \mathcal{T}p, \mathcal{N}'p) : p \in \mathcal{P}(\mathcal{B})\}$, где $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{p \in \mathcal{P} : \mathcal{B}p = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$, $\mathcal{P}$ – линейал полиномов из 1^0 , а для операторов простой структуры в формуле для ядра фигурирует пара $(p, \mathcal{T}p)$, отвечающая формуле Грина (1.7), а не тройка $(p, \mathcal{T}p, \mathcal{N}''p)$, возникшая согласно (1.19).

Во многих случаях особый интерес приобретает перечисление условий ортогональности, обеспечивающих существование решения задачи (3.1), (3.2), экспоненциально затухающего на бесконечности. Благодаря общим результатам [15] для этого достаточно описать подпространство $\mathcal{A}_{\beta-}^l$, уже встречавшееся в теореме 3.4 (2). Полиномиальное свойство дает полный (но тривиальный!) ответ лишь в ситуации теоремы 3.4 (1). Если же размерность ядра $\ker \mathcal{A}_{\beta-}^l$ положительна, то множество $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ не обязано исчерпывать это ядро, т.е. могут появляться решения однородной задачи (3.1), (3.2), растущие на бесконечности не быстрее $|x|^k$, но не являющиеся полиномами из $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ (отметим, что в силу леммы 5.4.9 [31] интеграл $a(u, u; \Omega)$ из (1.3) для таких решений расходится). Процедура их построения проста. Именно, линейная комбинация экспоненциальных решений (3.5) с $\lambda = 0$, сформированная при учете предложения 3.2 (2),

$$(3.12) \quad \mathcal{W}(x) = \sum_* c_{\mu i q + \tau_{\mu i}} \chi_\mu(x) \mathcal{U}^{\mu i q + \tau_{\mu i}}(x)$$

(ср. с (3.10)), подставляется в однородную задачу (3.1), (3.2) и отыскивается решение $w \in \mathbf{D}_\beta^l W(\Omega)$, компенсирующее образовавшуюся невязку $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} \in \mathcal{R}_\beta^l W(\Omega)$ (последнее включение верно потому, что экспоненциальные решения (3.5) аннулируются модельным оператором $\{\mathcal{L}^\mu, \mathcal{B}^\mu\}$ в $\mathbb{Q}$). Согласно теореме 3.5 количество условий разрешимости задачи для w равно $\dim \mathcal{P}(\mathcal{B})$ и потому в (3.12) остаются $\tau - \dim \mathcal{P}(\mathcal{B})$ свободных констант c , перебор которых и доставляет базис в ортогональном дополнении $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ до ядра $\ker \mathcal{A}_{\beta-}^l$. В несколько иной ситуации мы вернемся к этому вопросу в п. 2 § 5.

В заключение отметим, что предложение 1.5 устанавливает равенство $\ker \mathcal{A}_{\beta-}^l = \mathcal{P}(\mathcal{B})$ в том случае, когда оператор $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами имеет простую структуру, на границе $\partial\Omega$ назначены краевые условия Неймана $\mathcal{B} = \mathcal{N}$, а у области Ω есть лишь один выход на бесконечность.

5. Конкретные задачи. Рассмотрим ряд задач математической физики из п. 6 § 1, иллюстрирующих общие теоремы этого параграфа.

ПРИМЕР 3.6. Для трехмерной системы теории упругости базис (3.7), (3.8) в линейном жестких смещений (1.37) можно взять таким:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} p^{h,0} &= e^h, & p^{h,1}(y, z) &= ze^h - y_h e^3 \quad (h = 1, 2), \\ p^{3,0} &= e^3, & p^{4,0}(y) &= y_2 e^1 - y_1 e^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $I = 4$ и $\tau_1 = \tau_2 = 2$, $\tau_3 = \tau_4 = 1$. Экспоненциальные решения (3.5), в которых $\lambda = 0$ и $q = \tau_i, \dots, 2\tau_i - 1$, $i = 1, \dots, 4$, имеют смысл полей смещений, порождающих в сечениях цилиндра $\mathbb{Q} = \omega \times \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^3$ перерезывающие и продольную

силы и изгибающие и крутящий моменты (см. [97], [98] для изотропии и [31; §5.7] в общем случае). Условия существования решения $u \in W_{\beta^+}^{l+1}(\Omega)^3$, $\beta^+ \in (0, \delta)$, задачи Неймана в полуграниченной цилиндрической области Ω ,

$$(3.14) \quad (f, p)_\Omega + (g, p)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{N}),$$

интерпретируются как *самоуравновешенность* нагружения f, g . В случае условий Дирихле (зажатая поверхность) $\dim \mathcal{P}(\mathcal{D}) = 0$ и справедлива теорема 3.4 (1). Вместе с тем, существуют и другие краевые условия, приводящие к однозначно разрешимой в $W_{\beta^+}^{l+1}(\Omega)^3$ задаче при $\beta \in (-\delta, \delta)$. Пусть, к примеру, область Ω с одним или несколькими выходами на бесконечность не является областью вращения, а на поверхности $\partial\Omega$ назначены линеаризованные условия Синьорини (контакт без трения)

$$(3.15) \quad \nu \cdot u = 0, \quad \nu \times \sigma^{(\nu)}(u) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega$$

(см. формулы (2.42), (1.52) и пример 1.12). Ни один из полиномов (3.13) не удовлетворяет условиям (3.15) на $\partial\mathbb{Q}$, т.е. подпространства $P^\mu(B^\mu)$ и $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ тривиальны, а значит, выполняются условия предложения 3.2 (1) и теоремы 3.4 (1). Если же Ω — область вращения (т.е. $M = 1$ или $M = 2$, причем $\mathbb{Q}^\mu = \{x : r_\mu < |y| < R_\mu\}$), то упомянутые подпространства одномерные и содержат полином $p^{4,0}(y) = (y_2, -y_1, 0)^t$, поворот вокруг оси цилиндров.

В [33] показано, как результаты, полученные в §2 и §3, переносятся на случай не-самосопряженных оператор-матриц (1.34). В связи с этим обратимся к примеру 1.13.

ПРИМЕР 3.7. Рассмотрим систему уравнений теории электроупругости, снабженную краевыми условиями (2.58), (2.59). Так как электрический потенциал $\varphi = u_4$ удовлетворяет условиям Дирихле (2.59), возникает прежний линеал полиномов с базисом (3.13) (разумеется, p^{hq} дополняются нулевой четвертой компонентой). Следовательно, теоремы 3.4 (2) и 3.5 приводят к тем же заключениям, что и в обычной теории упругости. Если заменить (2.59) условиями Неймана $\partial_n \varphi(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, то за счет присоединения к базису (3.13) еще одного элемента $p^{5,0} = (0, 0, 0, 1)^t$ размерность каждого из встречающихся линеалов прирастает на единицу.

Как упоминалось в п. 1 §2, утверждения, опирающиеся на полное полиномиальное свойство $\mathcal{Z}^0$, могут быть приспособлены к некоторым операторам сложной структуры (1.14). Продолжим обсуждение системы Стокса, имея в виду теорему 3.5.

ПРИМЕР 3.8. 1) Для уравнений Стокса (1.45), (1.46) в цилиндре $\mathbb{Q} = \omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, снабженных условиями прилипания $u = 0$ на $\partial\mathbb{Q}$, получаем $\mathcal{P}(\mathcal{D}) = P(\mathcal{D}) = \{0\}^3 \times \mathbb{R}$, т.е. $\mathcal{U}^0(y, z) = (0, 0, 0, 1)^t$ — *постоянное давление*. Предложение 3.2 (2) при учете сказанного в примере 2.8 устанавливает, что $\varkappa = 2M$. Еще одно экспоненциальное решение (3.5) с $\lambda = 0$, $q = 1$ имеет вид

$$(3.16) \quad \mathcal{U}^1(y, z) = (0, 0, -\Psi(y), z)^t$$

и описывает *течение Пуазеля*. В (3.16) Ψ — решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона на сечении ω ,

$$-\Delta_y \Psi(y) = 1, \quad y \in \omega; \quad \Psi(y) = 0, \quad y \in \partial\omega.$$

2) Рассмотрим теперь в цилиндре $\mathbb{Q}$ краевую задачу (1.45), (1.46), (1.52), считая, что сечение ω не является кругом или кольцом. В этом случае условие $\nu \cdot u = 0$ на $\partial\mathbb{Q}$ исключает из $\mathcal{P} = \mathbb{R}^4$ постоянные поперечные составляющие, т.е. $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}) = \{(0, 0, c_3, c_4)^t : c_q \in \mathbb{R}\}$. Прямые вычисления показывают, что такие полиномы, *постоянные давление и продольное течение*, исчерпывают все экспоненциальные решения (3.5) при $\lambda = 0$, т.е. собственное число $\lambda = 0$ соответствующего пучка $\mathfrak{A}(\lambda)$ простое алгебраически и $\ker \mathfrak{A}(0) = P(\mathcal{B})$. Этот факт противоречит утверждению 3.2 (2) и объясняется отсутствием аналога полного полиномиального свойства 4⁰ при постановке условий свободной поверхности (1.52). В самом деле, операторы краевых условий $\mathcal{D}v = v$ и $\mathcal{N}u = \tau^{(\nu)}(u)$, проистекающие из формул Грина (1.48)–(1.50), не аннулируют полиномы $v = (0, 0, 1, 0)^t$ и $u = (0, 0, 0, 1)^t$ из $P(\mathcal{B})$, т.е. требование 4⁰ нельзя соблюсти даже при замене $\mathcal{N}$ на $\mathcal{D}$.

Если ω – область вращения, то к названным экспоненциальным решениям добавляется пара полиномов

$$\mathcal{W}^{30}(y) = (y_2, -y_1, 0, 0)^t, \quad \mathcal{W}^{31}(y, z) = (zy_2, -zy_1, 0, 0)^t,$$

порожденных жордановой цепочкой пучка $\mathfrak{A}$, имеющей длину 2 (ср. со сказанным в конце примера 3.6).

§ 4. Краевые задачи в тонких областях

1. Исходная и предельная задачи. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^{n-d}$ и $S \subset \mathbb{R}^d$ – области с компактными замыканиями и гладкими границами. Введем множества, зависящие от малого параметра $\varepsilon > 0$,

$$(4.1) \quad \omega_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^{n-d} : \eta = \varepsilon^{-1}y \in \omega\}, \quad \Omega(\varepsilon) = \omega_\varepsilon \times S.$$

Семейство областей $\{\Omega(\varepsilon)\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ называем *тонкой областью* и рассматриваем краевые задачи

$$(4.2) \quad \mathcal{L}(\varepsilon, x, \nabla_x)u(\varepsilon, x) = f(\varepsilon, x), \quad x \in \Omega(\varepsilon),$$

$$(4.3) \quad \mathcal{B}(\varepsilon, x, \nabla_x)u(\varepsilon, x) = g(\varepsilon, x), \quad x \in \Sigma(\varepsilon) = \partial\omega_\varepsilon \times S,$$

$$(4.4) \quad \mathcal{D}(\varepsilon, x, \nabla_x)u(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Gamma(\varepsilon) = \omega_\varepsilon \times \partial S.$$

Здесь $\mathcal{L}$ – оператор-матрица простой структуры, краевые условия (4.3) построены в соответствии с правилом (1.6), а $\mathcal{D}$ – система Дирихле из формулы Грина (1.2). Для оператора (1.10) краевые условия (4.4) эквивалентны таким:

$$(4.5) \quad \nabla_x^s u_k(\varepsilon, x) = 0, \quad x \in \Gamma(\varepsilon), \quad s = 0, \dots, t_k - 1, \quad k = 1, \dots, T.$$

Для упрощения изложения считаем, что операторы $\mathcal{L}_{jk}$, составляющие матрицу $\mathcal{L}$, и форма a имеют постоянные коэффициенты и являются однородными (т.е. $|\alpha| = t_j + t_k$ и $|\sigma| = t_j, |\gamma| = t_k$ в (1.1) и (1.3)). Форма a обладает полиномиальным свойством в полном объеме (см. 3⁰ и 4⁰). Благодаря сделанным допущениям это свойство конечно же выдерживает замораживание коэффициентов.

ПРИМЕР 4.1. Наиболее часто встречающиеся тонкие тела — *стержень* ($\omega \subset \mathbb{R}^2$, $S \subset \mathbb{R}^1$) и *пластина* ($\omega \subset \mathbb{R}^1$, $S \subset \mathbb{R}^2$); в гидродинамике такие геометрические формы ассоциируются с *капиллярными* и *пленочными* течениями. Сообразуясь с первой интерпретацией тонкой области $\Omega(\varepsilon)$, называем $\Sigma(\varepsilon)$ и $\Gamma(\varepsilon)$ *боковой поверхностью* и *торцом* соответственно. Кроме того, ω_ε и S — сечения, *поперечное* и *продольное*.

Умножим строку системы (4.2) с номером $j = 1, \dots, T$ на ε^{t_j} ; аналогично строка из (4.3) с номером $q = 1, \dots, m$ умножается на ε^{r_q} . Перейдем к “быстрым” переменным $\eta = \varepsilon^{-1}y$ (см. (4.1)) и заменим $u = (u_1, \dots, u_T)$ на $U = (U_1, \dots, U_T)$, где

$$(4.6) \quad U_k(\eta, z) = \varepsilon^{-t_k} u_k(y, z), \quad k = 1, \dots, T.$$

В результате таких преобразований операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ расщепляются в суммы (конечные!) по степеням малого параметра ε

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon^{\mathbf{t}} \mathcal{L}(\nabla_x) \varepsilon^{\mathbf{t}} &= \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h L^h(\nabla_\eta, \nabla_z), \\ \varepsilon^{\mathbf{r}} \mathcal{B}(\varepsilon, x, \nabla_x) \varepsilon^{\mathbf{t}} &= \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h B^h(\eta, \nabla_\eta, \nabla_z). \end{aligned}$$

Порядки операторов L^h и B^h относительно дифференцирования ∇_z не превосходят h . В частности,

$$(4.8) \quad L^0(\nabla_\eta) = \mathcal{L}(\nabla_\eta, 0),$$

а операторы $B^0(\eta, \nabla_\eta)$ (и $T^0(\eta, \nabla_\eta)$) находятся согласно прежнему правилу (1.6) по операторам $N^0(\eta, \nabla_\eta)$ и $D^0(\eta, \nabla_\eta)$, фигурирующим в формуле Грина вида (1.2), причем соответствующая форма a^0 получается из a при помощи подстановок $\nabla_y \mapsto \nabla_\eta$ и $\nabla_z \mapsto (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$.

Сделаем указанные замены в (4.2) и (4.3), а затем перейдем формально к $\varepsilon = 0$. В итоге возникнет *предельная* краевая задача на поперечном сечении ω , а зависимость от переменной $z \in S$ станет параметрической,

$$(4.9) \quad L^0(\nabla_\eta)U(\eta, z) = F(\eta, z), \quad \eta \in \omega; \quad B^0(\eta, \nabla_\eta)U(\eta, z) = G(\eta, z), \quad \eta \in \partial\omega.$$

Форма a^0 наследует полное полиномиальное свойство от a , причем аналогично (2.30) соответствующий линеал полиномов приобретает вид

$$(4.10) \quad P^0 = \{p(\eta) : p \in \mathcal{P}, p(y, z) \text{ не зависит от } z \in S\}.$$

Итак, можно воспользоваться теоремой 1.9.

ЛЕММА 4.2. *Задача (4.9) с правой частью $\{F, G\} \in \mathcal{R}^l H(\omega)$ имеет решение $U \in \mathcal{D}^l H(\omega)$ в том и только том случае, если*

$$(4.11) \quad (F, p)_\omega + (G, T^0 p)_{\partial\omega} = 0 \quad \forall p \in P^0(B^0).$$

Решение определено с точностью до слагаемого из линейала полиномов $P^0(B^0) = \{p \in P^0 : B^0 p = 0 \text{ на } \partial\omega\}$.

В лемме 4.2 речь шла об операторе $\mathfrak{A}_0^l : \mathcal{D}^l H(\omega) \rightarrow \mathcal{R}^l H(\omega)$ задачи (4.9). Далее индекс l не нужен и поэтому сократим обозначения:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= \{L^0(\nabla_\eta), B^0(\eta, \nabla_\eta)\}, \\ \mathfrak{A}_q(\nabla z) &= \{L^q(\nabla_\eta, \nabla z), B^q(\eta, \nabla_\eta, \nabla z)\}, \quad q = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

2. Квазицепочки. Пусть $\Phi^{1,0}, \dots, \Phi^{J,0}$ — ортонормированный в $L_2(\omega)^T$ базис в ядре $\ker \mathfrak{A}_0$ упомянутого оператора $\mathfrak{A}_0$. По лемме 4.2 пары $\{\Phi^{1,0}, T^0 \Phi^{1,0}\}, \dots, \{\Phi^{J,0}, T^0 \Phi^{J,0}\}$ образуют базис в подпространстве $\text{сокег } \mathfrak{A}_0$. Введем проектор π на образ $\text{Im } \mathfrak{A}_0$,

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}^l H(\omega) \ni \{f, g\} &\mapsto \pi\{f, g\} \\ &= \left\{ f - \sum_{j=1}^T \Phi^{j,0} [(f, \Phi^{j,0})_\omega + (g, T^0 \Phi^{j,0})_{\partial\omega}] , g \right\} \in \mathcal{R}^l H(\omega). \end{aligned}$$

Так как $(\Phi^{j,0}, \Phi^{k,0})_\omega = \delta_{j,k}$, имеем $\pi^2 = \pi$.

Заменяем в (4.12) градиент ∇_z точкой $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$. Следуя [30], дополним каждый элемент базиса до *квазицепочки*

$$(4.14) \quad \{\Phi^{j,0}, \Phi^{j,1}(\theta), \Phi^{j,2}(\theta), \dots\}, \quad j = 1, \dots, J,$$

соблюдая при этом следующие правила: во-первых, $\theta \mapsto \Phi^{j,q}(\theta)$ — однородный полином степени q , во-вторых, выполнены условия ортогональности

$$(4.15) \quad (\Phi^{j,q}(\theta), \Phi^{k,0})_\omega = 0, \quad j, k = 1, \dots, J, \quad q = 1, 2, \dots,$$

и, в-третьих, верны равенства

$$(4.16) \quad \mathfrak{A}_0 \Phi^{j,q}(\theta) = -\pi \sum_{i=1}^q \mathfrak{A}_i(\theta) \Phi^{j,q-i}(\theta), \quad q = 0, 1, \dots$$

Подчеркнем, что для краткости у $\Phi^{j,q}$ и $\mathfrak{A}_q$ опускаются аргументы η и ∇_η . В силу (4.13) правая часть формулы (4.16) удовлетворяет условиям разрешимости (4.11), т.е. лемма 4.2 гарантирует существование квазицепочек (4.14), подчиненных указанным требованиям. Подсчет степеней полиномов $\theta \mapsto \Phi^{j,q}(\theta)$ производится по индукции при учете сказанного о коэффициентах расщеплений (4.7).

Бесконечные квазицепочки (4.14) построены так, что выполняется формальное (асимптотическое) равенство

$$(4.17) \quad \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h \mathfrak{A}_h(\theta) \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \Phi^{j,p}(\theta) = \sum_{k=1}^T \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon^q \mathfrak{M}_{kj}^q(\theta) \{\Phi^{k,0}, 0\},$$

в котором

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}_{kj}^q(\theta) &= (\mathfrak{F}^{jq}(\theta), \Phi^{k,0})_{\omega} + (\mathfrak{G}^{jq}(\theta), T^0 \Phi^{k,0})_{\partial\omega}, \\ \{\mathfrak{F}^{jq}(\theta), \mathfrak{G}^{jq}(\theta)\} &= \sum_{i=1}^q \mathfrak{A}_i(\theta) \Phi^{j,q-i}(\theta). \end{aligned}$$

Члены суммы из правой части (4.17) лежат вне $\text{Im } \mathfrak{A}_0$ и поэтому не могут быть компенсированы при помощи решений предельной задачи (4.9) на *поперечном* сечении ω . Центральная идея построения асимптотики решения задачи (4.2)–(4.4) в тонкой области заключается в формировании из операторов $\mathfrak{M}_{kj}^q(\nabla_z)$ *результатирующей задачи на продольном сечении* S , за счет которой можно было бы добиться нужных ортогональностей и решить возникающие предельные задачи на ω полностью, без проецирования на $\text{Im } \mathfrak{A}_0$ В [44], [45], [30] исследование проводилось в значительно более общей ситуации (переменные коэффициенты, быстроосциллирующая граница и пр.). Сужение постановки задачи при планомерном использовании полиномиального свойства позволяет дать исчерпывающее описание асимптотических структур.

Цепочки (4.14) имеют *правильное строение*, если можно найти набор $\{\tau_1, \dots, \tau_J\}$ их *фиктивных полудлин*, выполнив при этом два условия: во-первых,

$$(4.19) \quad \mathfrak{M}_{kj}^q(\theta) = 0 \quad \text{при} \quad q < \tau_k + \tau_j; \quad j, k = 1, \dots, J, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}$$

и, во-вторых, $(J \times J)$ -матрица $\mathfrak{M}(\theta) = (\mathfrak{M}_{kj}^{\tau_k + \tau_j}(\theta))$ оказывается неособенной, т.е.

$$(4.20) \quad \det \mathfrak{M}(\theta) \neq 0 \quad \text{при} \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Если эти требования соблюдены, основной член асимптотики решения $u(\varepsilon, x)$ задачи (4.2)–(4.4) ищем как сумму

$$(4.21) \quad \mathcal{U}^0(\varepsilon, x) = \sum_{j=1}^J \varepsilon^{-\tau_j - \tau_{\max}} \sum_{q=0}^{\tau_j + \tau_{\max}} \varepsilon^{q + \mathbf{t}} \Phi^{j,q}(\eta, \nabla_z) v_j(z) + \varepsilon^{\mathbf{t}} U^0(\eta, z),$$

где $\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \dots, \tau_J\}$, а новая неизвестная функция $v = (v_1, \dots, v_J)^t$ предназначена для удовлетворения условий разрешимости (4.11) предельной задачи (4.9) для U^0 . Многие члены невязок, возникающих при подстановке (4.21) в (4.2) и (4.3), исчезают благодаря формулам (4.19). Для устранения первых ненулевых слагаемых

$$(4.22) \quad \varepsilon^{-\tau_{\max} + \tau_k} \mathfrak{M}_{kj}^{\tau_k + \tau_j}(\nabla_z) v_j(z) \{\Phi^{k,0}(\eta), 0\}$$

образуем *результатирующую систему*

$$(4.23) \quad \mathfrak{M}(\nabla_z)v(z) = \mathfrak{F}(z), \quad z \in S,$$

оказывающуюся эллиптической ввиду требования (4.20). В согласии с краевыми условиями (4.4) или (4.5) на торце $\Gamma(\varepsilon)$ тонкой области $\Omega(\varepsilon)$ снабдим систему (4.23) условиями Дирихле

$$(4.24) \quad \nabla_z^k v_j(z) = 0, \quad z \in \partial S, \quad k = 0, \dots, \tau_j - 1, \quad j = 1, \dots, J.$$

Осталось выписать выражения для компонент $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_J$ функции $\mathfrak{F}$. Предположим, что функции f и g в (4.2) и (4.3) допускают представления

$$(4.25) \quad f(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-\mathbf{t}} f^0(\eta, z) + \tilde{f}(\varepsilon, x), \quad g(\varepsilon, x) = \varepsilon^{-\mathbf{r}} g^0(\eta, z) + \tilde{g}(\varepsilon, x)$$

с малыми остатками $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$. В правую часть задачи (4.9) для U^0 поместим проекцию $\{F^0, G^0\} = \pi\{f^0, g^0\}$ и положим

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_j(z) &= 0 \quad \text{при} \quad \tau_j < \tau_{\max}, \\ \mathfrak{F}_j(z) &= (f^0(\cdot, z), \Phi^{j,0})_\omega + (g^0(\cdot, z), T^0 \Phi^{j,0})_{\partial\omega} \quad \text{при} \quad \tau_j = \tau_{\max}. \end{aligned}$$

Фрагменты проекции $(\mathbb{I} - \pi)\{f^0, g^0\}$, не упомянутые в (4.26), и члены (4.18) рядов (4.17), следующие за (4.22), учитываются при формировании младших асимптотических слагаемых. Обоснование главного члена (4.21) асимптотики и сопутствующие вопросы (разрешимость задачи (4.23), (4.24), оценки остатков в (4.25)) обсуждаются далее в п. 4.

3. Полиномиальное свойство и квазицепочки. Основные атрибуты результирующей системы (4.23) можно описать в терминах линеала полиномов

$$(4.27) \quad \mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{p(\eta, z) : p \in \mathcal{P}, \mathcal{B}(\varepsilon, x, \nabla_x)p(y, z) = 0, (y, z) \in \Sigma(\varepsilon)\}.$$

Зафиксируем точку $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ и положим

$$(4.28) \quad P^\theta(\mathcal{B}) = \{p(\eta, z) : \text{полином } p \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) \text{ зависит лишь от переменных } \eta \in \omega \text{ и } t = \theta_1 z_1 + \dots + \theta_d z_d \in \mathbb{R}\}.$$

Иными словами, “слой” $\omega \times \mathbb{R}^d$ представлен как объединение цилиндров $\mathbb{Q}^\theta = \omega \times \mathbb{R}$ с осями, проходящими через точки единичной сферы $\mathbb{S}^{d-1}$, и аналогично п. 2 §3 сооружено подпространство полиномов (4.28), обслуживающее модельную задачу $\{\mathcal{L}(\nabla_\eta, \theta \partial_t), \mathcal{B}(\eta, \nabla_\eta, \theta \partial_t)\}$ в $\mathbb{Q}^\theta$. Ясно, что $P^0(B^0) \subset P^\theta(\mathcal{B})$. Кроме того, подобно формуле (3.6) дифференцирование $\partial_t = \partial/\partial t$ не выводит полином из подпространства $P^\theta(\mathcal{B})$ и поэтому в нем можно найти базис

$$(4.29) \quad \{p_\theta^{i,k} : i = 1, \dots, J, k = 0, \dots, \tau_i(\theta) - 1\}$$

(ср. с (3.7) и (3.8)), характеризующийся тем, что

$$(4.30) \quad p_\theta^{i,0} \in P^0(B^0), \quad \partial_t p_\theta^{i,k} = p_\theta^{i,k}, \quad k = 1, \dots, \tau_i(\theta) - 1.$$

Ключевым является следующее предположение.

6⁰. Базисы (4.29), (4.30) можно выбрать так, чтобы числа $\tau_i = \tau_i(\theta)$ и полиномы $p_\theta^{i,0} = p_\theta^{i,0}$ не зависели от точки $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$.

ПРИМЕР 4.3. Рассмотрим систему уравнений теории упругости с краевыми условиями Неймана $\mathcal{B} = \mathcal{N}$ (см. пример 1.12), для которой $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ – шестимерный линеал жестких смещений (1.37).

1) В случае тонкого стержня $\Omega(\varepsilon) = \omega_\varepsilon \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ нужный базис в $P^\theta(\mathcal{N}) = \mathcal{P}(\mathcal{N})$ выглядит так:

$$(4.31) \quad \begin{aligned} p^{i,0} &= e^i, \quad p_\theta^{i,1}(y, \theta z) = \theta(ze^i - y_i e^3), \quad i = 1, 2, \\ p^{3,0} &= e^3, \quad p^{4,0}(y) = y_2 e^1 - y_1 e^2. \end{aligned}$$

Здесь $\theta = \pm 1$ – точка 0-мерной сферы $\mathbb{S}^0$. Таким образом, $J = 4$ и $\tau_1 = \tau_2 = 2$, $\tau_3 = \tau_4 = 1$.

2) Тонкую пластину обычно располагают горизонтально, что приводит к изменению ориентации осей по сравнению с использованной в (4.1). Именно, считается, что срединное сечение $\omega \subset \mathbb{R}^2$ пластины $\Omega(\varepsilon) = \omega \times S_\varepsilon$ лежит в плоскости с координатами $y = (y_1, y_2)$, а поперечное направление с ортом e^3 обозначается z (нужно в (4.1) переставить пары y, ω и z, S , а быструю переменную ввести так: $\zeta = \varepsilon^{-1}z \in S = (-1/2, 1/2)$). Подпространство $P^\theta(\mathcal{N})$ является четырехмерным и в новых обозначениях искомым базис при $\theta = (\theta_1, \theta_2) = |y|^{-1}y \in \mathbb{S}^1$ приобретает вид

$$(4.32) \quad \begin{aligned} p^{1,0} &= e^1, \quad p^{2,0} = e^2, \\ p^{3,0} &= e^3, \quad p^{3,1}(y, z) = e^3(\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2) - z(e^1 \theta_1 + e^2 \theta_2). \end{aligned}$$

В итоге $J = 3$ и $\tau_1 = \tau_2 = 1$, $\tau_3 = 2$.

Обсудим требование 6⁰. Оно не является ограничительным при $d = 1$, поскольку $\mathbb{S}^{d-1} = \{\pm 1\}$ и два возникающих случая $t = \pm z$ по существу не различаются. Более того, $\Omega(\varepsilon)$ – тонкий цилиндр и легко обнаружить как полную тождественность формул (4.29), (4.30) и (3.7), (3.8), так и аналогии в конструкциях систем жордановых цепочек (п. 2 §3) и квазицепочек (4.17). Именно, если взять базис $\{p^{j,k} : j = 1, \dots, J, k = 0, \dots, \tau_j - 1\}$, назначенный предложением 3.2 (2) для линеала $P^{(+1)}(\mathcal{B})$, то соответствующая каноническая система жордановых цепочек окажется ничем иным, как системой квазицепочек ($\theta = +1$) с блочно диагональной матрицей $\mathfrak{M}(+1)$.

При $d > 1$ ситуация осложняется тем, что элементы квазицепочек обязаны быть полиномами переменных $\theta_1, \dots, \theta_d$ – в противном случае не удастся образовать дифференциальный оператор $\mathfrak{M}(\nabla_z)$. Предложение 3.2 (2) доставляет систему жордановых цепочек в каждой из точек $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, но, разумеется, с неконтролируемой зависимостью от θ . Требование 5⁰ устраняет θ из основных характеристик системы (собственные векторы и частные нулевые кратности) и, тем самым, позволяет построить по индукции квазицепочки (4.14) с нужными свойствами.

ТЕОРЕМА 4.4 ([30]). Пусть в дополнение к 3⁰ и 4⁰ выполнено требование 6⁰. Тогда существует система квазицепочек $\{\Phi^{j,q}(\eta, \theta) : j = 1, \dots, J, q = 0, 1, \dots\}$ с правильной структурой, порожденной фиктивными полудлинами $\tau_1, \dots, \tau_J$. Если $z \mapsto v_j(z)$ – полином степени не выше $\tau_j - 1$, то сумма

$$(4.33) \quad \Phi^{j,0}(\eta)v_j(z) + \Phi^{j,1}(\eta, \nabla_z)v_j(z) + \dots + \Phi^{j,\tau_j-1}(\eta, \nabla_z)v_j(z)$$

является полиномом из линеала $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ (см. (4.27)). Результирующая система (4.23) оказывается эллиптической и формально самосопряженной, а ее размеры $J \times J$ и порядки элементов $\text{ord } \mathfrak{M}_{kj}(\nabla_z) = \tau_k + \tau_j$ находятся по базису (4.29), (4.30) в линеале полиномов $P^\theta(\mathcal{B})$ из (4.28).

Все известные автору стационарные задачи математической физики в тонких областях характерны тем, что результирующая задача наследует полиномиальное свойство от исходной. Вопрос о справедливости такого утверждения для *общих краевых задач* (4.2)–(4.4) остается открытым.

ПРИМЕР 4.5. В условиях, описанных перед примером 2.8, утверждения этого параграфа сохраняют силу и для оператор-матриц с усложненной структурой (1.14). Поэтому правомочно применить теорему 4.4 к задачам Стокса о тонких течениях, пленочных и капиллярных. Так как линеалы $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ и $P^\theta(\mathcal{D})$ во всех случаях совпадают с $\{0\}^3 \times \mathbb{R}$ (постоянное давление), требование 5^0 очевидно и $J = 1$, $\tau_1 = 1$. Результирующее скалярное уравнение второго порядка называется уравнением Рейнольдса (см. [99], [100] для $n = 3$, $d = 2$ и [101] для $n = 3$, $d = 1$).

В теории тонких пластин, упругих или электропроводящих, предельные задачи (4.9) упрощаются до обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и потому допускают явные решения. Это обстоятельство позволило создать в [45] *компьютерную программу, производящую редукцию размерности* и вычисляющую результирующие задачи для произвольных систем уравнений второго порядка. Благодаря полиномиальному свойству и матричной записи (1.10) систем в настоящее время упомянутая программа существенно усовершенствована (совместно с О. В. Мотыгиным) и вся процедура сведена к простым алгебраическим операциям над матрицами. Приведем некоторые результаты вычислений.

ПРИМЕР 4.6. 1) Рассмотрим систему уравнений пьезоупругости (пример 1.13) с краевыми условиями Неймана на основаниях $\Sigma^\pm(\varepsilon) = \omega \times \{\pm\varepsilon/2\}$ пластины $\Omega(\varepsilon) = \omega \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2) \subset \mathbb{R}^3$. Для того чтобы записать результирующую систему в компактной форме, переставим столбцы в матрице $\Lambda(\xi)$ из (1.40) и положим

$$(4.34) \quad \Lambda(\xi)^t = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \alpha\xi_2 & 0 & 0 & \alpha\xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 & 0 & 0 & \alpha\xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\xi_1 & \alpha\xi_2 & \xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Соответствующим образом видоизменяется и (числовая) матрица Q , которую теперь удобно разбить на блоки Q_{11} , Q_{22} и $Q_{12} = Q_{21}^t$ размерами 5×5 , 4×4 и 5×4 . Введем еще матрицы

$$(4.35) \quad \mathfrak{L}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \alpha\xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\xi_1^2 & \alpha\xi_2^2 & \xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(4.36) \quad \mathfrak{V}(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^{-1}\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^{-1}\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^{-1}\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathfrak{M}(\nabla_y)$ результирующей системы принимает вид $\mathfrak{L}(-\nabla_y)^t \mathfrak{Q} \mathfrak{L}(\nabla_y)$, а (8×8) -матрица $\mathfrak{Q}$ находится по формуле

$$(4.37) \quad \mathfrak{Q} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathfrak{Y}(\zeta)^t (Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21}) \mathfrak{Y}(\zeta)^t d\zeta$$

(разумеется, интегрирование по ζ выполнить нетрудно). Матрицы (4.34) и (4.35) алгебраически комплекты. По-прежнему выгоден переход к комплексной форме записи (1.34) – после введения мнимого электрического потенциала $i\varphi$ результирующая задача наследует полиномиальное свойство от исходного оператора $\mathfrak{Q}$, и заключения о ее разрешимости делаются на основе теоремы 1.9 и предложения 1.11.

2) Если на основаниях пластины $\Sigma^\pm(\varepsilon)$ назначить краевые условия (2.58), (2.59), то результирующая система уменьшается до размеров 6×6 . При этом у матриц (4.35) и (4.36) сохраняются лишь три верхних строки и исчезают четвертый и пятый столбцы (иными словами, $\mathfrak{L}(\xi)$ превращается в матрицу $\mathfrak{L}'(\xi)$, определенную согласно (1.41)). Кроме того, блоки Q_{11} , Q_{22} и $Q_{12} = Q_{21}^t$ урезаются до размеров 3×3 путем вычеркивания “лишних” нижних строк и правых столбцов. Наконец, после вычисления интеграла (4.37) находим (6×6) -матрицу $\mathfrak{Q}'$ (усеченную матрицу $\mathfrak{Q}$), которая оказывается блочно-диагональной

$$(4.38) \quad \mathfrak{Q}' = \text{diag} \left\{ \mathbf{Q}, \frac{1}{6} \mathbf{Q} \right\}, \quad \mathbf{Q} = Q'_{11} - Q'_{12} (Q'_{22})^{-1} Q'_{21}.$$

Итак, условия Дирихле (2.59) устраняют электрический потенциал φ из асимптотических конструкций и возникающая результирующая система не отличается от упоминавшейся в примере 1.14. Матрицы $\mathfrak{L}'(\xi)$ и $\mathfrak{Q}'$ из оператора $\mathfrak{M}'(\nabla_y) = \mathfrak{L}'(-\nabla_y)^t \mathfrak{Q}' \mathfrak{L}'(\nabla_y)$, описывающего деформацию тонкой упругой пластины, определяются по формулам (1.41) и (4.38), где (3×3) -матрицы Q'_{11} , Q'_{22} , Q'_{12} состояются из упругих модулей A_{jk} (элементов (6×6) -матрицы Гука, фигурировавшей в примере 1.12) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{55} & A_{54} & A_{53} \\ A_{45} & A_{44} & A_{43} \\ A_{35} & A_{34} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{15} & A_{14} & A_{13} \\ A_{25} & A_{24} & A_{23} \\ A_{65} & A_{64} & A_{63} \end{pmatrix}.$$

При различных ограничениях на симметрию упругих свойств подобные (4.38) формулы выводились в рамках технической теории пластин, основанной на классических гипотезах Кирхгофа (см. [102], [103] и др.) или путем формального асимптотического анализа (см. [104], [105] и др.). Результаты, приведенные в следующем разделе, доставляют обоснование асимптотических представлений и тем самым подтверждают справедливость гипотез Кирхгофа. Неожиданным является то, что ввиду блочной структуры матрицы $\mathfrak{Q}'$ из (4.38) без каких-либо предположений о симметрии результирующая задача распадается на две независимых, описывающих плоское напряженное состояние (вектор (w_1, w_2)) и изгиб пластины (скаляр w_3). В изотропном случае (см. (1.39)) первая задача содержит двумерную систему Ламе с постоянными μ и $\lambda' = 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}$, а вторая – бигармонический оператор $D\Delta^2$, где $D = \mu(\lambda + \mu)[6(\lambda + 2\mu)]^{-1}$ – приведенная цилиндрическая жесткость пластины.

4. Весовое неравенство Корна и обоснование асимптотики. Пусть $\mathcal{L}$ – оператор (1.10). Благодаря условиям Дирихле (4.4), соотношениям (1.12) и предложению 1.11 выполняется оценка

$$(4.39) \quad a(u, u; \Omega(\varepsilon)) \geq c(\varepsilon) \|u; \mathcal{D}^0 H(\Omega(\varepsilon))\|^2.$$

Величина $c(\varepsilon) > 0$ зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$, и для оправдания асимптотических конструкций в общей ситуации требуется уточнить и саму оценку (4.39), и структуру квазицепочек $\{\Phi^{j,q}\}$. Пусть существуют такие целые положительные числа $h_1, \dots, h_T$, что для любой функции $u \in \mathcal{D}^0 H(\Omega(\varepsilon))$, подчиненной условиям Дирихле (4.5), справедливо *весовое неравенство Корна*

$$(4.40) \quad a(u, u; \Omega(\varepsilon)) \geq c |u|^2,$$

в котором постоянная $c > 0$ не зависит от u и $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$(4.41) \quad |u| = \left(\sum_{k=1}^T \sum_{|\sigma|+|\gamma| \leq t_k} \varepsilon^{2(h_k - t_k + |\sigma|)} \|d_\varepsilon^{|\gamma| - h_k} \nabla_y^\sigma \nabla_z^\gamma u_k; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2 \right)^{1/2},$$

а $d_\varepsilon(z) = \varepsilon + \text{dist}\{z, \partial S\}$ – весовой множитель. Предположим еще, что после перенумерации компонент и цепочек (упорядочения чисел в наборах $\{h_1, \dots, h_T\}$ и $\{\tau_1, \dots, \tau_J\}$) оказалось, что

$$(4.42) \quad s_\mu = \tau_{1+J\mu-1} = \dots = \tau_{J\mu} = h_{1+T\mu-1} = \dots = h_{T\mu}, \quad \mu = 1, \dots, m, \\ s_1 < s_2 < \dots < s_m,$$

(где $0 = J^0 < J^1 < \dots < J^m = J$ и $0 = T^0 < T^1 < \dots < T^m = T$) и, кроме того, справедливы равенства

$$(4.43) \quad \Phi_k^{j,q}(\eta, \theta) = 0 \quad \text{при} \quad h_k < \tau_j, \quad q < \tau_j - h_k.$$

Подчеркнем, что согласно (4.42) наборы $\{\tau_1, \dots, \tau_J\}$, $\{h_1, \dots, h_T\}$ и $\{s_1, \dots, s_m\}$ совпадают как множества.

ЛЕММА 4.7 ([30]). При сделанных предположениях (4.42), (4.41) результирующая задача (4.23), (4.24) имеет единственное решение $v \in H^{l+\tau_1}(S) \times \dots \times H^{l+\tau_J}(S)$ при любой правой части $\mathfrak{F} \in H^{l-\tau_1}(S) \times \dots \times H^{l-\tau_J}(S)$, $l \geq \tau_{\max}$, и справедлива соответствующая оценка $\|v; \cdot\| \leq c \|\mathfrak{F}; \cdot\|$.

ТЕОРЕМА 4.8 ([30]). Пусть в дополнение к сформулированным требованиям краевые условия (4.3) однородные, функция f^0 из представления (4.25) гладкая на $\overline{\omega} \times \overline{S}$, а для остатка $\tilde{f}$ верно неравенство

$$(4.44) \quad \sum_{j=1}^T \varepsilon^{t_j - h_j} \|d_\varepsilon^{h_j} \tilde{f}_j; L_2(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_0 \varepsilon^{\delta_0 + (n-d)/2},$$

где постоянная c_0 не зависит от ε , а δ_0 – некоторое положительное число. Тогда решение и исходной задачи (4.23), (4.24) в тонкой области $\Omega(\varepsilon)$ и асимптотическое приближение (4.21), построенное по решению в результирующей задачи (4.23), (4.24), связаны соотношением

$$(4.45) \quad \|u - \mathcal{U}\| \leq c_\delta \varepsilon^{\delta + (n-d)/2},$$

где $\|\cdot\|$ – норма (4.41), постоянная c_δ не зависит от $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\delta > 0$ – малое число.

Условие $g = 0$ введено для упрощения формулы (4.44), но его нетрудно соблюсти за счет подходящего продолжения правой части краевого условия (4.3) на $\Omega(\varepsilon)$. Сформулированные здесь результаты получены в [30] при менее ограничительных предположениях, в частности, для задач с быстроосциллирующими коэффициентами. Кроме того, в [30], [45], [106] рассматривались задачи, для которых результирующая система содержит малый параметр $\varepsilon^{1/q}$ ($q > 1$) при старших производных (типичная ситуация в теории оболочек); в [106] найдена весовая норма $\|\cdot\|$ в неравенстве Корна (4.40), позволяющая вывести аналогичную (4.45) оценку.

ПРИМЕР 4.9. 1) В задаче о деформации упругой пластины $s_1 = 1, s_2 = 1, m = 1$ и $T^1 = J^1 = 2$, причем равенства (4.43) верны в силу (4.32). Формула (4.33) восстанавливает все жесткие смещения (1.37) по полиномам $v = (v_1, v_2, v_3)$ из линейала (1.42), отвечающего результирующей системе. Неравенство Корна (4.40) с $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ и $h_1 = h_2 = 1, h_3 = 2$ доказано в [37] (см. также [107], [45]). Прием из примера 1.13 позволяет приспособить это неравенство и к задачам электроупругости.

2) Сформулированные требования не выполняются для упругого стержня, так как в (4.31) начальные элементы $p^{1,0} = \Phi^{1,0}$ и $p^{2,0} = \Phi^{2,0}$ квазицепочек с длинами 2 имеют ненулевыми те же компоненты, что и полином $p^{4,0}(\eta) = \Phi^{4,0}(\eta)$, возглавляющий цепочку с полудлиной 1. Неравенство Корна (4.40) с весовой нормой (4.41), содержащей показатели $t_1 = t_2 = t_3$ и $h_1 = h_2 = 2, h_3 = 1$, проверено в [37], однако обоснование теории тонких стержней удалось провести в [55] лишь при “улучшении” нормы (4.41), полученном при учете результатов [34], [108]. Помимо интегральных в [55] выведены поточечные (в классах Гёльдера) оценки разности истинного решения и его асимптотического приближения, найденного в рамках одномерной модели, но дополненного пограничными слоями.

§ 5. Пограничные слои для тонких областей и их сочленений

1. Обсуждение. Процедура построения асимптотики, описанная в предыдущем параграфе, позволяет в принципе построить асимптотический ряд для решения $u(\varepsilon, y, z)$ задачи (4.2)–(4.4)

$$(5.1) \quad \varepsilon^0 \mathcal{U}^0(\varepsilon^{-1}y, z) + \varepsilon^1 \mathcal{U}^1(\varepsilon^{-1}y, z) + \dots + \varepsilon^k \mathcal{U}^k(\varepsilon^{-1}y, z) + \dots,$$

где $\mathcal{U}^k(\eta, z)$ – конгломерат (4.21), содержащий решения v^k и U^k результирующей (4.23), (4.24) и предельной (4.9) задач. Ряд (5.1) формально удовлетворяет соотношениям (4.2) и (4.3), однако его нельзя рассматривать как приближенное решение задачи в $\Omega(\varepsilon)$. Дело в том, что условие Дирихле (4.4) на торце $\Gamma(\varepsilon)$ может быть выполнено

разве лишь случайно: постановка неоднородных краевых условий (4.24) для результирующей системы $\mathfrak{M}(\nabla_z)v^k = 0$ в S компенсирует в (4.4) невязки специального вида, но слагаемое U^k в $\mathscr{U}^k$ может быть произвольно. Как известно (см. [109]–[114], [44], [43; гл. 15, 16] и др.), полное устранение невязок на торцевых поверхностях осуществляется посредством построения пограничного слоя. Соответствующая предельная краевая задача в полужилиндре $\mathbb{Q}_+ = \omega \times \mathbb{R}_+$ возникает после перехода к $\varepsilon = 0$ в задаче (4.2)–(4.4), записанной при помощи быстрых переменных

$$\eta = \varepsilon^{-1}y, \quad \zeta = -\varepsilon^{-1}\nu,$$

где $|\nu| = \text{dist}\{z, \partial S\}$ и $\nu > 0$ вне S . Имея в виду запросы теории осреднения краевых задач с быстроосциллирующими коэффициентами (см. [47]–[51] и др.), в следующем разделе мы включаем в рассмотрение дифференциальные операторы с периодически коэффициентами и квазицилиндры, имеющие переменное (также периодическое) сечение.

Другие геометрические формы, связанные с явлением пограничного слоя, возникают при изучении сочленений сингулярно вырождающихся областей с различными предельными размерностями (см. [115]–[125] и др.). В п. 3 рассматриваются краевые задачи на объединении полупространства $\mathbb{R}_+^n$ и полужилиндре $\mathbb{Q}_- = \omega \times (-\infty, 0]$. При этом допускаются дифференциальные операторы с кусочно постоянными коэффициентами, требующие постановки естественных условий сопряжения (трансмиссии) на поверхности $\omega(0) = \partial\mathbb{R}_+^n \cap \partial\mathbb{Q}_-$.

В этом параграфе рассматриваются системы уравнений второго порядка. Такое ограничение позволяет максимально упростить формулировки всех утверждений. Разумеется, оно не является принципиальным и при помощи тех же соображений, что и в §2 и §3, теоремы без особого труда приспособляются к произвольным операторам-матрицам $\mathcal{L}(x, \nabla_x)$ с простой или (при обычных дополнительных предположениях) усложненной структурой. Последнее демонстрируется на примере системы Стокса.

2. Квазицилиндрические области. Пусть S – ячейка периодичности, порождающая квазицилиндр $\mathbb{Q}$ с периодически изменяющимся сечением $\omega(t) = \{x \in \mathbb{Q} : z = t\}$. Иными словами, ограниченная область S расположена в слое $\{x = (y, z) : y \in \mathbb{R}^{n-1}, 0 < z < 1\}$ и замыкание $\overline{\mathbb{Q}}$ совпадает с объединением сдвигов ячейки $\overline{S}_m = \{x : (y, z - m) \in \overline{S}\}$, $m \in \{0, \pm 1, \dots\}$. Предполагаем, что $\mathbb{Q}$ – область с гладкой $(n - 1)$ -мерной границей $\partial\mathbb{Q}$. Матрицу-функцию A из формулы (1.10) для $\mathcal{L}(x, \nabla_x)$ считаем гладкой и дополнительно 1-периодической по переменной z . Элементы $\Lambda_{hk}(\nabla_x)$ алгебраически комлектной матрицы $\Lambda(\nabla_x)$ из той же формулы суть дифференциальные операторы первого порядка с постоянными коэффициентами, т.е. $\text{ord } \mathcal{L}_{jk} = 2$ и $t_1 = \dots = t_T = 1$. В силу предложений 1.5 и 1.6 соответствующая квадратичная форма (1.11) обладает полиномиальными свойствами 1^0-4^0 с линейалом $\mathscr{P}$.

На множестве $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} : z > 0\}$ с боковой поверхностью $\Sigma = \partial\mathbb{Q} \setminus \omega(0)$ рассмотрим краевую задачу

$$(5.2) \quad \mathcal{L}(x, \nabla_x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \equiv \mathbb{Q}_+,$$

$$(5.3) \quad \mathcal{B}(x, \nabla_x)u(x) = g(x), \quad x \in \Sigma,$$

$$(5.4) \quad \mathcal{B}^\#(x, \nabla_x)u(x) = g^\#(x), \quad x \in \Sigma^\# \equiv \omega(0).$$

Граничные операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^\#$ составлены по правилу (1.6), но способы отбора строк матриц $\mathcal{D} = \mathbb{I}_T$ и $\mathcal{N}$ (см. (1.13)) могут различаться для боковой поверхности Σ и торца $\Sigma^\#$. Порядки элементов $\mathcal{B}_{jk}$ и $\mathcal{B}_{jk}^\#$ обозначаем $r_j + t_k$ и $r_j^\# + t_k$ соответственно; так как $t_k = 1$, имеем $r_j \leq 0$ и $r_j^\# \leq 0$. Под $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^\#$ подразумеваем парные с $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^\#$ операторы в формуле Грина вида (1.7).

Граница $\partial\mathbb{Q}_+$ имеет две особенности – бесконечно удаленную точку и ребро $\Upsilon = \partial\omega(0)$ размерностью $d = n - 2$ (требования из п. 2 §2 обеспечиваются следующим условием: для любой точки $x^0 \in \Upsilon$ раствор двугранного угла, образованного $\Pi^\# = \{x : z = 0\}$ и гиперплоскостью $\Pi(x^0)$, касательной к $\partial\mathbb{Q}$ в x^0 , принадлежит интервалу $(0, \pi)$). Каждая из названных особенностей привносит в норму свой весовой множитель, экспоненциальный и степенной соответственно. Положим $\rho_0(x) = \min\{1, \text{dist}(x, \Upsilon)\}$ и при $l \geq 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ введем пространство $W_{\beta, \gamma}^l(\Omega, \Upsilon)$ как пополнение $C_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus \Upsilon)$ по норме

$$(5.5) \quad \|w; \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^l(\Omega, \Upsilon)\| = \left(\sum_{k=0}^l \|\rho_0^{\beta-l+k} \exp(\gamma|z|) \nabla_x^k w; L_2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_{\beta, \gamma}^l$ задачи (5.2)–(5.4),

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1}(\Omega)^T &= \mathcal{D}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega) \ni u \mapsto \mathcal{A}_{\beta, \gamma}^l u = (\mathcal{L}u, \mathcal{B}u, \mathcal{B}^\#u) \\ &= (f, g, g^\#) \in \mathcal{R}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega) = \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l-1}(\Omega)^T \times \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l-\mathbf{r}-1/2}(\Sigma) \times \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l-\mathbf{r}^\#-1/2}(\Sigma'). \end{aligned}$$

Нормы в следовых пространствах $\mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l-1/2}(\Sigma)$ и т.п. вводятся подобно (2.4), а под $\mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l-\mathbf{r}-1/2}(\Sigma)$ и т.п. подразумеваются аналоги последних произведений в (2.6), причем $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_T)$ и $\mathbf{r}^\# = (r_1^\#, \dots, r_T^\#)$. Ясно, что отображение (5.6) непрерывно при $l \in \{1, 2, \dots\}$ и всех $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ограничения на весовые показатели β и γ , обеспечивающие фредгольмовость оператора $\mathcal{A}_{\beta, \gamma}^l$, находятся посредством локальных рассуждений. Поэтому границы для показателя β устанавливаются на основе материала п. 2–4 §2. Кроме того, теория эллиптических задач с периодическими коэффициентами (см. [94], [95], [126], [127], [31; §3.4, §5.1]) приспособливает результаты из §3 к рассматриваемой задаче и доставляет допустимые значения индекса γ . Наконец, полиномиальное свойство используется обычным способом. Для окончательных формулировок понадобится ряд обозначений.

Введем подпространства полиномов

$$(5.7) \quad \begin{aligned} P(\mathcal{B}) &= \{p \in \mathcal{P} : \mathcal{B}p = 0 \text{ на } \Sigma\}, \\ \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\#) &= \{p \in P(\mathcal{B}) : \mathcal{B}_p^\# = 0 \text{ на } \Sigma^\#\}, \\ P_0(x^0) &= \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') : p = \text{const}\}, \quad x^0 \in \Upsilon. \end{aligned}$$

Линеал $P(\mathcal{B})$ играет роль линеала $P^\mu(B^\mu)$ из предложения 3.2 – он будет присоединен к пространству $\mathcal{D}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$ при обработке асимптотики на бесконечности. Подпространство $\mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ содержит все решения однородной задачи (5.2)–(5.4) с конечной

энергией $a(u, u; \Omega)$. Наконец, $P_0(x^0)$ – линеал (2.33), обслуживающий модельную задачу в угле $\mathbb{K}^0$ (двумерном конусе; см. п. 2 § 2) и отделяемый в асимптотике (2.45) решения вблизи ребра. Ясно, что $P_0 = P_0(x^0)$ не зависит от точки x^0 , т.е. заведомо обладает свойствами, постулированными в п. 4 § 2. Видимые упрощения в определениях (5.7) стали возможными благодаря следующим фактам: во-первых, согласно предложению 1.6 линеал $\mathcal{P}$ сохраняется при замораживании коэффициентов, во-вторых, в (2.33) полиномы обобщенной степени $\deg\{p; \mathbf{t}\} = -(n-d)/2$ оказываются постоянными (так как $t_j = 1$ и $d = n-2$) и, в-третьих, в качестве граничного оператора Дирихле взята единичная матрица $\mathbb{I}_T$. Если воспользоваться приемом (1.38) и заменить $\mathbb{I}_T$ произвольной унитарной матрицей-функцией $\mathcal{U}$, то линеалы $P(x^0)$, вообще говоря, могут приобрести зависимость от x^0 .

Далее считаем, что

$$(5.8) \quad l \geq 1, \quad \gamma \in (0, \delta), \quad \beta \in (l - \delta^0, l).$$

Аналогично (2.45) и (3.10) составим пространство $\mathbf{D}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$ из функций, допускающих представление

$$(5.9) \quad u = \mathfrak{C}k + \chi_\infty p + \tilde{u},$$

где $\tilde{u} \in \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1}(\Omega)^T$, $p \in P(\mathcal{B})$ и k – (векторная) функция из класса $H^{l-\beta}(\Upsilon)^T$ со значениями в P_0 . Кроме того, в (5.9) $\mathfrak{C}$ – оператор продолжения с ребра Υ на область $\Omega = \mathbb{Q}_+$, введенный в п. 4 § 2, а $\chi_\infty \in C^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция, $\chi_\infty(z) = 1$ при $z > 2$ и $\chi_\infty(z) = 0$ при $z < 1$. По аналогии с § 2 и § 3 норма в $\mathbf{D}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$ определяется естественным образом при отождествлении этого пространства с прямым произведением

$$(5.10) \quad H^{l-\beta}(\Upsilon)^{\dim P_0} \times \mathbb{C}^{\dim P(\mathcal{B})} \times \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1}(\Omega)^T \ni (k, p, \tilde{u}).$$

Решения $u \in \mathbf{D}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$ характерны тем, то для них конечен интеграл энергии $a(u, u; \mathbb{Q}_+)$. Разумеется, сложное описание (5.9), (5.10) пространства упрощается в конкретных ситуациях, когда первые сомножители из (5.10) большей частью исчезают.

ТЕОРЕМА 5.1. Положительные δ и δ^0 можно выбрать так, чтобы при ограничениях (5.8) оператор задачи (5.2)–(5.4),

$$(5.11) \quad \mathbf{A}_{\beta, \gamma}^l = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{B}^\#\} : \mathbf{D}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega),$$

стал фредгольмовым с нулевым индексом. При этом $\ker \mathbf{A}_{\beta, \gamma}^l = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\#)$, а условиями существования решения $u \in \mathbf{D}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$ задачи с правой частью $(f, g, g^\#) \in \mathcal{R}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$ служат равенства

$$(5.12) \quad (f, p)_\Omega + (g, \mathcal{T}p)_\Sigma + (g^\#, \mathcal{T}^\#p)_{\Sigma'} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\#).$$

В случае краевых условий Неймана $\mathcal{B} = \mathcal{N}$, $\mathcal{B}^\# = \mathcal{N}$ можно использовать пространство $\mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1, 0}(\Omega)$ со ступенчатой весовой нормой

$$(5.13) \quad \|w; \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1, 0}(\Omega, \Upsilon)\| = \left(\sum_{k=0}^{l+1} \|\rho_0^{\beta-l-1+k+\delta_{k,0}} \exp(\gamma|z|) \nabla_x^k w; L_2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}$$

(поскольку $s = 0$, в (2.38) $\Theta(s-k)$ заменяется на $\delta_{k,0}$). Связь между пространствами $\mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1, 0}(\Omega)^T$ и $\mathbf{D}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$ обнаруживается при помощи леммы 2.16.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. При ограничениях (5.8) с малыми положительными δ и δ^0 оператор задачи Неймана

$$\{\mathcal{L}, \mathcal{N}\}: \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1, 0}(\Omega, \Upsilon)^T \rightarrow \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l-1}(\Omega, \Upsilon)^T \times \mathcal{W}_{\omega, \gamma}^{l-1/2}(\partial\Omega, \Upsilon)^T$$

оказывается фредгольмовым мономорфизмом, причем условия разрешимости задачи принимают вид (3.14).

При постановке условий Дирихле хотя бы на части границы $\partial\Omega$ многие из подпространств полиномов становятся тривиальными (ср. с замечанием 2.15).

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{D}$ на боковой поверхности Σ и, значит, $\mathbf{r} = 0$. Тогда оператор (5.6) задачи (5.2)–(5.4) оказывается изоморфизмом при

$$(5.14) \quad l \geq 1, \quad |\gamma| < \delta, \quad |\beta - l| < \delta^0.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Если $\mathcal{B}^\# = \mathcal{D}^\#$ на $\Sigma^\#$ и $\mathbf{r}^\# = 0$, то $\dim P(x^0) = 0$, $k = 0$ в (5.9), а задача (5.2)–(5.4) с правой частью $(f, g, g^\#) \in \mathcal{R}_{\beta, \gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$, где

$$(5.15) \quad l \geq 1, \quad \gamma \in (0, \delta), \quad |\beta - l| < \delta^0,$$

имеет единственное решение, представимое в виде $u = \chi_\infty p + \tilde{u}$, причем $p \in P(\mathcal{B})$ и $\tilde{u} \in \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1}(\Omega)^T$. Иными словами, задаче с условиями Дирихле на торце $\Sigma^\#$ сопоставлены операторы $\mathbf{A}_{\beta, \gamma}^l$ из (5.11) и $\mathcal{A}_{\beta, \gamma}^l$ из (5.6), которые являются соответственно изоморфизмом при условии (5.8) и фредгольмовым мономорфизмом при условии (5.15); наконец, $\dim \text{coker } \mathcal{A}_{\beta, \gamma}^l = \dim P(\mathcal{B})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. В теории осреднения (см. [47]–[51] и др.) пограничный слой зачастую описывается решениями задач в призме $\Omega = \{x = (x', x_n) \in \omega \times \mathbb{R} : x_n > F(x')\}$ с криволинейным основанием Σ' ; здесь $\omega = \{x' : |x_j| < h_j\}$ и F – гладкая функция, $2h_j$ -периодическая относительно x_j , $j = 1, \dots, n-1$. На противоположных гранях выставляются условия периодичности, делающие все ребра на $\partial\Omega$ фиктивными: задачу можно решать в классе $\mathfrak{W}_\gamma^l(\Omega)$, полученном пополнением по норме $\|\exp(\gamma x_n)w; H^l(\Omega)\|$ подпространства $2h_j$ -периодических функций из $C_0^\infty(\overline{\Omega})$. В линейном пространстве P^ω , играющем роль $\mathcal{P}(\mathcal{B})$, сохраняются те полиномы из $\mathcal{P}$, которые зависят только от переменной x_n (в задачах теории упругости P^ω состоит из постоянных векторов). Предыдущие рассуждения применимы и к “периодической” задаче (5.2), (5.4) с правой частью

$$(f, g^\#) \in \mathfrak{W}_\gamma^{l-1}(\Omega)^T \times \prod_{q=1}^T \mathfrak{H}^{l-r_q+1/2}(\Sigma^\#),$$

где $l \geq 1$, $\gamma \in (0, \delta)$, а $\mathfrak{H}^s(\Sigma^\#)$ – подпространство $2h_j$ -периодических функций из $H^s(\Sigma^\#)$. Названная задача имеет решение u , представимое в виде суммы $\tilde{u} + \tilde{p} \in \mathfrak{W}_\gamma^{l+1}(\Omega)^T \dot{+} P^\omega$, тогда и только тогда, когда

$$(f, p)_\Omega + (g^\#, \mathcal{T}^\# p)_{\Sigma'} = 0 \quad \forall p \in P^\omega(\mathcal{B}^\#) = \{p \in P^\omega : \mathcal{B}^\# p = 0 \text{ на } \Sigma^\#\}.$$

Само решение определено с точностью до слагаемого из $P^\omega(\mathcal{B}^\#)$.

ПРИМЕР 5.6. Приведем результаты для трехмерной системы Стокса, не обслуживаемой теоремой 5.1 по формальным причинам.

1) При постановке условий прилипания

$$(5.16) \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

единственным полиномиальным решением однородных уравнений Стокса остается $(0, 0, 0, c)$ (постоянное давление). Поэтому условия существования решения $\mathbf{u} = (u, u') \in \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1}(\Omega, \Upsilon)^3 \times \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^l(\Omega, \Upsilon)$ задачи (1.45), (1.46), (5.16) с правой частью $(f, f') \in \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l-1}(\Omega, \Upsilon)^3 \times \mathcal{W}_{\beta, \gamma}^l(\Omega, \Upsilon)$ (индексы подчинены (5.15)) приобретают вид $(f', 1)_\Omega = 0$. В указанном классе экспоненциально затухающих вектор-функций решение $\mathbf{u}$ единственно.

2) Рассмотрим систему (1.45), (1.46) с условиями периодичности в призме Ω , описанной в замечании 5.5, и поставим на основании краевое условие

$$(5.17) \quad u(x) = g(x), \quad x \in \Sigma'.$$

Как и в примере 3.8 (2), сформулированная задача не обладает полиномиальным свойством в полном объеме, т.е. жордановы цепочки соответствующего пучка не описываются предложением 3.2 (2). Впрочем, базис в линейном пространстве экспоненциальных решений (3.5), отвечающих $\lambda = 0$, находится прямыми вычислениями,

$$\mathcal{U}^{i,0} = \mathbf{e}^i, \quad \mathcal{U}^{i,1}(x) = x_3 \mathbf{e}^i \quad (i = 1, 2), \quad \mathcal{U}^{3,0} = \mathbf{e}^3, \quad \mathcal{U}^{4,0} = \mathbf{e}^4;$$

здесь $\mathbf{e}^j = (\delta_{j,1}, \dots, \delta_{j,4})$. Повторяя обычные рассуждения, заключаем, что задача (1.45), (1.46), (5.17) с правой частью

$$(f, f', g) \in \mathfrak{W}_{\beta, \gamma}^{l-1}(\Omega)^3 \times \mathfrak{W}_{\beta, \gamma}^l(\Omega) \times \mathfrak{H}^{l+3/2}(\Sigma^\#)^3$$

(индексы подчинены (5.15)) имеет единственное решение в пространстве $(\mathfrak{W}_{\beta, \gamma}^{l+1}(\Omega) \dot{+} \mathbb{R})^3 \times \mathbf{W}_{\beta, \gamma}^l(\Omega)$. Это решение убывает при $x_s \rightarrow +\infty$ с экспоненциальной скоростью при выполнении трех условий ортогональности, устраняющих постоянное слагаемое из вектора скоростей,

$$(5.18) \quad \begin{aligned} (f, Z^i)_\Omega + (f', Z^{i'})_\Omega - (g, \nu Z^{i'} + \partial_\nu Z^i)_{\Sigma'} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ (f', 1)_\Omega - (g, \nu) &= 0. \end{aligned}$$

Вектор $\mathbf{Z}^i = (Z^i, Z^{i'})$ из (5.18) удовлетворяет однородной задаче (1.45), (1.46), (5.17) и может быть представлен в виде $\mathcal{U}^{i,1} + \mathfrak{Z}^i$, где $\mathfrak{Z}^i$ – решение указанного выше типа при $f = 0, f' = 0$ и $g(x) = -\mathbf{e}^i x_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. В примере 5.6 (2) продемонстрирован общий способ вывода условий экспоненциального затухания решения задачи (5.2)–(5.4). Именно, функции p из левой части (5.12) следует разрешить быть не только полиномом, но и любым решением однородной задачи (5.2)–(5.4), растущим при $x_n \rightarrow +\infty$ не быстрее степени x_n . Упомянутые решения Z ищутся как суммы $\mathcal{U} + \mathfrak{Z}$, где $\mathcal{U}$ – экспоненциальное решение (3.5) при $\lambda = 0$ (или аналогичное решение Флоке в случае квазицилиндра) и $\mathfrak{Z} \in \mathbf{D}_{\beta,\gamma}^l \mathcal{W}(\Omega)$ – решение задачи (5.2)–(5.4) с $f = 0, g = 0$ и $g' = -\mathcal{U}$. Для существования и нетривиальности Z нужно дополнительно потребовать, чтобы $\mathcal{U} \notin \mathcal{P}(\mathcal{B})$ и

$$(5.19) \quad 0 = q(\mathcal{U}, p) = (\mathcal{N}\mathcal{U}, \mathcal{D}p)_{\omega(t)} - (\mathcal{D}\mathcal{U}, \mathcal{N}p)_{\omega(t)} \quad \forall p \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$$

(сечение $\omega(t)$ произвольно). Возникшая антилинейная форма q подобна той, которая фигурировала в (2.60). В силу предложения 1.5 вычитаемое в (5.19) равно нулю.

3. Сочленение полупространства и усеченного цилиндра. Пусть $\Omega = \mathbb{R}_+^n \cup \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ – цилиндр $\{(y^-, z^-) : y^- \in \omega\}$ с сечением $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, имеющим компактное замыкание и гладкую границу. Будем считать, что ось z^- цилиндра не параллельна границе полупространства и положим

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= \mathbb{R}_+^n, \quad \Sigma_+ = \partial\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{\mathbb{Q}}; \quad \Gamma = \mathbb{Q} \cap \partial\mathbb{R}_+^n = \partial\mathbb{R}_+^n \setminus \overline{\Sigma}_+; \\ \Omega_- &= \mathbb{Q} \setminus \overline{\mathbb{R}_+^n}, \quad \Sigma_- = \partial\mathbb{Q} \setminus \overline{\mathbb{R}_+^n}; \quad \Upsilon = \partial\mathbb{Q} \cap \partial\mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения

$$(5.20) \quad \mathcal{L}^\pm(\nabla_x)u^\pm(x) = f^\pm(x), \quad x \in \Omega_\pm,$$

и краевые условия

$$(5.21) \quad \mathcal{B}^\pm(x, \nabla_x)u^\pm(x) = g^\pm(x), \quad x \in \Sigma_\pm,$$

дополним естественными условиями сопряжения (трансмиссии)

$$(5.22) \quad u^+(x) = x^-(x), \quad \mathcal{N}^+(x, \nabla_x)u^+(x) - \mathcal{N}^-(x, \nabla_x)u^-(x) = g^0(x), \quad x \in \Gamma.$$

Под $u^\pm$ и т.п. подразумеваем сужение функции u и т.п. на $\Omega_\pm$. Точно так же $\mathcal{L}$ – оператор (1.10) с кусочно постоянной матрицей A , совпадающей с $A^\pm$ на $\Omega_\pm$; порядки $\text{ord } \mathcal{L}_{jk}$ элементов равны двум. Граничные операторы $\mathcal{B}^\pm$ построены по правилу (1.6) из операторов $\mathcal{N}^\pm$ и $\mathcal{D}^\pm = \mathbb{I}_T$, но, вообще говоря, разными способами на $\Sigma_\pm$; $\mathcal{N}^\pm$ заданы формулой (1.13) с $A = A^\pm$.

На границе $\partial\Omega$ расположены особенности трех типов: ребро Υ и два выхода на бесконечность, конический Ω_+ и цилиндрический Ω_- . Соответственно в нормы функциональных пространств будут помещены три весовых множителя $\rho_0(x) = \min\{1, \text{dist}(x, \Upsilon)\}$ и $\rho_+(x) = \max\{1, |x|\}$, $\rho_-(x) = \exp(z^-)$. Норма в пространстве $\mathcal{W}_{\beta,\gamma}^l(\Omega_-, \Upsilon)$ уже была введена в (5.5) (обращаем внимание на показатель $\gamma|z| = -\gamma z^- \cos(z, z^-)$ в экспоненте). Определим пространство $\mathcal{V}_{\beta,\sigma}^l(\Omega_+, \Upsilon)$ как пополнение $C_0^\infty(\overline{\Omega}_+ \setminus \Upsilon)$ по норме

$$(5.23) \quad \|v; \mathcal{V}_{\beta,\sigma}^l(\Omega_+, \Upsilon)\| = \left(\sum_{k=0}^l \|\rho_0^{\beta-l+k} \rho_+^{\sigma-l+k} \nabla_x v; L_2(\Omega_+)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Подчеркнем, что индексы β в (5.5) и (5.23) одинаковы.

Составим пространство $\mathcal{D}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon)$ из таких функций u , что их сужения $u^+ \in \mathcal{V}_{\beta,\sigma}^{l+1}(\Omega_+)^T$ и $u^- \in \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l+1}(\Omega_-)^T$ совпадают на Γ . Кроме того, $(f, g, g^0) \in \mathcal{R}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon, \Gamma)$, если $g^0 \in V_{\beta}^{l+1/2}(\Gamma)^T$, а сужения (f^+, g^+) и (f^-, g^-) принадлежат соответственно произведениям

$$\mathcal{V}_{\beta,\sigma}^{l-1}(\Omega_+)^T \times \prod_{q=1}^T \mathcal{V}_{\beta,\sigma}^{l-r_q^+-1/2}(\Sigma_+), \quad \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l-1}(\Omega_-)^T \times \prod_{q=1}^T \mathcal{W}_{\beta,\gamma}^{l-r_q^--1/2}(\Sigma_-).$$

С задачами (5.20)–(5.22) свяжем отображение

$$(5.24) \quad \mathcal{A}_{\beta,\gamma,\sigma}^l: \mathcal{D}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon) \rightarrow \mathcal{R}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon, \Gamma),$$

непрерывное при любых $l \in \{1, 2, \dots\}$ и $\beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$.

Введем используемые далее подпространства полиномов

$$\begin{aligned} P(\mathcal{B}^{\pm}) &= \{p \in \mathcal{P} : \mathcal{B}^{\pm} p = 0 \text{ на } \Sigma_{\pm}\}, \\ P^0(\mathcal{B}^+) &= \{p \in P(\mathcal{B}^+) : p = \text{const}\}, \\ P_0(x^0) &= P^0(\mathcal{B}^+) \cap P(\mathcal{B}^-), \quad x^0 \in \Upsilon. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу предложения 1.6 линеал $\mathcal{P}$ одинаков для $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^-$. Остается верным сказанное в п. 2 о линеале $P_0 \equiv P_0(x^0)$ (см. комментарий к (5.7)). Подпространство $P^0(\mathcal{B}^+)$ будет востребовано лишь в случае $n = 2$.

Пусть индексы l и β, γ подчинены (5.8). Расширим область определения оператора задачи (5.20)–(5.22) и включим в $\mathbf{D}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega)$ функции u , допускающие представление (5.9), в котором $\tilde{u} \in \mathcal{D}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega)$, $p \in P(\mathcal{B}_-)$, k – вектор-функция из класса $H^{l-\beta}(\Upsilon)^T$ со значениями в P_0 , а $\chi_{\infty} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ – срезка, $\chi_{\infty}(x) = 1$ при $z < -2$ и $\chi_{\infty}(x) = 0$ при $z > -1$. Подчеркнем, что элементы пространства $\mathbf{D}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega)$ по-прежнему удовлетворяют первому из условий сопряжения (5.22), а значит, оператор задачи (5.20)–(5.22), реализуемый как отображение

$$(5.25) \quad \mathbf{A}_{\beta,\gamma,\sigma}^l: \mathbf{D}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon) \rightarrow \mathcal{R}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon, \Gamma),$$

сохраняет непрерывность при ограничениях (5.8). Более того, появление условий (5.22) никак не сказывается на применяемой схеме исследования операторов задач, поскольку, как проверено в [128], результаты теории краевых задач в областях с кусочно гладкой границей без каких-либо изменений переносятся на задачи с условиями сопряжения (трансмиссии).

Аналогично (5.10) норма в $\mathbf{D}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon)$ определяется при отождествлении этого пространства с прямым произведением

$$H^{l-\beta}(\Upsilon)^{\dim P_0} \times \mathbb{C}^{\dim P(\mathcal{B}^-)} \times \mathcal{D}_{\beta,\gamma,\sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon) \ni (k, p, \tilde{u}).$$

ТЕОРЕМА 5.8. 1) Пусть $n \geq 3$, причем выполнены требования (5.8) и

$$(5.26) \quad |\sigma - l| < \delta^+,$$

где $\delta^+ = -1 + n/2$. Тогда оператор (5.25) задачи (5.20)–(5.22) есть изоморфизм.

2) Пусть $n = 2$, причем выполнены требования (5.8) и

$$(5.27) \quad \sigma \in (l, l + \delta^+),$$

где $\delta^+ = 1$. Задача (5.20)–(5.22) с правой частью $(f, g, g^0) \in \mathcal{R}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon, \Gamma)$ имеет единственное решение u , представимое в виде $u = \chi_+ p + \hat{u}$, где p – столбец из $P^0(\mathcal{B}^+) \subset \mathbb{C}^T$, $\hat{u} \in \mathbf{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon)$ и $\chi_+ \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – срезка, равная единице в $\mathbb{R}_+^n$ при $|x| > 2R$ и нулю при $|x| < -1$ или $|x| < R$ (R – радиус шара в $\mathbb{R}^{n-1}$, содержащего Γ). Справедлива оценка

$$\|p; \mathbb{C}^T\| + \|\hat{u}; \mathbf{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon)\| \leq c\|(f, g, g^0); \mathcal{R}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon, \Gamma)\|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. В (5.26) и (5.27) границы изменения весового индекса σ установлены в соответствии с предложением 2.21 (2) (в случае $\mathcal{B}^+ = \mathcal{D}$ они могут быть расширены; см. далее следствия 5.10 и 5.11). Согласно следствию 2.4 для любого конуса $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, существует такое $\delta > 0$, что полоса (2.13), $\mu = +$, свободна от спектра пучка $\mathfrak{A}^+$, порожденного задачей $\{\mathcal{L}^+, \mathcal{B}^+\}$ в $\mathbb{K}^+$. Поэтому теорема 5.8 (1) остается в силе при замене $\mathbb{R}_+^n$ на $\mathbb{K}^+$. Благодаря предложению 2.3 теорема 5.8 (2) сохраняется для сочленения полуполосы $\mathbb{Q}_-$ с произвольным углом $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{R}^2$, но число δ^+ в (5.27) может уменьшиться (ср. предложение 2.22).

Уточним теорему 5.8 при постановке на Σ_+ или Σ_- условий Дирихле, которые делают тривиальным подпространство P_0 и тем самым устраняют из (5.9) асимптотический член $\mathfrak{C}k$, отделенный около ребра Υ .

СЛЕДСТВИЕ 5.10. Пусть $\mathcal{B}^- = \mathcal{D}$ и $\delta^+ = -1 + n/2$ в случае $\mathcal{B}^+ \neq \mathcal{D}$, $n \geq 3$ или $\delta^+ = n/2$ в случае $\mathcal{B}^+ = \mathcal{D}$, $n \geq 2$. Тогда найдутся такие $\delta^0 > 0$ и $\delta > 0$, что при ограничениях (5.14) и (5.26) оператор (5.24) задачи (5.20)–(5.22) – изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 5.11. Пусть $\mathcal{B}^+ = \mathcal{D}$ и $\delta^+ = n/2$, $n \geq 2$. Тогда при условиях (5.26) и (5.15) с некоторыми $\delta, \delta^0 > 0$ задача (5.20)–(5.22) с правой частью $(f, g, g^0) \in \mathcal{R}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon, \Gamma)$ имеет единственное решение u , представимое в виде

$$(5.28) \quad u = \chi_\infty p + \tilde{u},$$

где $\tilde{u} \in \mathcal{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon)$, $p \in P(\mathcal{B}^-)$, а χ_∞ – срезка, введенная перед (5.25). Справедливо неравенство

$$(5.29) \quad \|p; P(\mathcal{B}^-)\| + \|\tilde{u}; \mathcal{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon)\| \leq c\|(f, g, g^0); \mathcal{R}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_{\pm}, \Upsilon, \Gamma)\|,$$

причем линейал $P(\mathcal{B}^-)$ отождествляется с $\mathbb{C}^{\tau_-}$, где $\tau_- = \dim P(\mathcal{B}^-)$. Отображение (5.24) – фредгольмов мономорфизм с коядром размерности τ_- .

Если $\mathcal{L}$ – оператор с постоянными коэффициентами ($A^+ = A^-$), то условия (5.22) не нужны и составные нормы (5.5), (5.23) в $\Omega_{\pm}$ заменяются единой нормой в Ω с тремя весовыми множителями ρ_0 и $\rho_{\pm}$; соответствующее пространство обозначаем $\mathcal{W}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega, \Upsilon)$, и это – единственное изменение, требующееся в приведенных утверждениях. Упомянем задачу Стокса, у которой такие же свойства, как и отмеченные в следствии 5.11.

ПРИМЕР 5.12. При $n = 2, 3$ оператор задачи (1.45), (1.46), (5.16) порождает изоморфизм

$$\mathcal{W}_{\beta, \gamma, \sigma}^{l+1}(\Omega)^n \times (\mathcal{W}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega) \dot{+} \chi_\infty \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{W}_{\beta, \gamma, \sigma}^{l-1}(\Omega)^n \times \mathcal{W}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega) \times \mathcal{W}_{\beta, \gamma, \sigma}^{l+3/2}(\partial\Omega)$$

при условиях (5.15) и $|\sigma - l| < n/2$. Подчеркнем, что постоянное давление отделяется в асимптотику только на цилиндрическом выходе и в отличие от примера 5.6 (1) оно не принадлежит ядру оператора, так как $1 \notin \mathcal{V}_{\beta, \sigma}^l(\Omega_+)$ при $\sigma > l - n/2$.

Обратимся к случаю $\mathcal{B}^- = \mathcal{D}$, $\mathcal{B}^+ \neq \mathcal{D}$ и $n = 2$, не охваченному следствием 5.10. Пусть $p^1, \dots, p^{\tau_+}$ – базис в линейале $P^0(\mathcal{B}^+) \subset \mathbb{C}^T$. Предложение 2.3 указывает такие степенные решения (2.16) модельной задачи на полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$:

$$(5.30) \quad \mathcal{U}^{j,0} = p^j, \quad \mathcal{U}^{j,1}(x) = p^j \ln|x| + \Phi^{j,1}(\varphi), \quad j = 1, \dots, \tau_+.$$

Постоянные векторы из (5.30) формируют асимптотику решения u , а при помощи логарифмических строятся решения Z^j однородной задачи, которые фигурируют в условиях ортогональности, обеспечивающих затухание решения u в коническом выходе Ω_+ . Как будет продемонстрировано далее, в плоской задаче Неймана названные группы решений $\mathcal{U}^{j,0}$ и $\mathcal{U}^{j,1}$ обмениваются ролями; в частности, $Z^j = \mathcal{U}^{j,0} \equiv \mathbf{e}^j$ в Ω . В очередном утверждении для простоты ограничимся рассмотрением условий Неймана на Σ_+ , но переход к смешанным краевым условиям несложен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.13. Пусть $n = 2$ и $\mathcal{B}^- = \mathcal{D}$, $\mathcal{B}^+ = \mathcal{N}^+$. Существуют такие $\delta^0, \delta > 0$, что при выполнении (5.14) и (5.27) задача (5.20)–(5.22) имеет единственное решение

$$(5.31) \quad u = \chi_+ p + \tilde{u},$$

где $p \in \mathbb{C}^T$ и $\tilde{u} \in \mathcal{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_\pm, \Upsilon)$, причем верна подобная (5.29) оценка. Решение u принадлежит $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_\pm, \Upsilon)$ (затухает при $\gamma \geq 0$) в том и только том случае, если

$$(5.32) \quad (f, Z^j)_\Omega + (g^+, Z^j)_{\Sigma_+} - (g^-, \mathcal{N}^- Z^j)_{\Sigma_-} + (g^0, Z^j)_\Gamma = 0, \quad j = 1, \dots, T.$$

Функции $Z^j = \chi_+ \mathbf{e}^j + \mathcal{Z}^j$ удовлетворяют однородным соотношениям (5.20)–(5.22), т.е. $\mathcal{Z}^j$ – решение вида (5.31), компенсирующее невязки слагаемого $\chi_+ \mathbf{e}^j = \chi_+(\delta_{1,j}, \dots, \delta_{T,j})$ в уравнении (5.2) на Ω_+ и в краевом условии (5.21) на Σ_+ .

Для задачи Неймана возможно использование ступенчатых весовых норм, обсуждавшихся в п. 3 §2. В (5.13) уже было введено соответствующее пространство $\mathcal{W}_{\beta, \gamma}^{l+1,0}(\Omega_-, \Upsilon)$, а норма в $\mathcal{V}_{\beta, \sigma}^{l+1,0}(\Omega_+, \Upsilon)$ получается из (5.23) заменой показателей $\beta - l + k$ и $\sigma - l + k$ на $\beta - l - 1 + k + \delta_{k,0}$ и $\sigma - l - 1 + k$ ($k = 0, \dots, l+1$). Как и ранее, из этих пространств сооружается область определения $\mathcal{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^{l,-1}(\Sigma_\pm, \Upsilon)$ оператора задачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.14. Пусть $\mathcal{B}^\pm = \mathcal{N}^\pm$ и $(f, g, g^0) \in \mathcal{R}_{\beta, \gamma, \sigma}^l(\Omega_\pm, \Upsilon, \Gamma)$. В ограничениях (5.8) на индексы l и β, γ найдутся такие $\delta^0 > 0$ и $\delta > 0$, что справедливы следующие утверждения.

1) При $n \geq 3$ и $|\sigma - l| < -1 + n/2$ задача Неймана (5.20)–(5.22) имеет единственное решение u , представимое в виде (5.28), где $p \in P(\mathcal{B}^-)$, и $\tilde{u} \in \mathcal{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^{l, -1}(\Omega_\pm, \Upsilon)$, и удовлетворяющее аналогичному (5.29) неравенству.

2) Если $n = 2$ и $\sigma \in (l, l + 1)$, то условиями существования решения u задачи Неймана (5.20)–(5.22), допускающего представление (5.28) с $p \in P(\mathcal{B}^-)$ и $\tilde{u} \in \mathcal{D}_{\beta, \gamma, \sigma}^{l, -1}(\Omega_\pm, \Upsilon)$, служат равенства

$$(5.33) \quad (f_j, 1)_\Omega + (g_j, 1)_{\partial\Omega} + (g_j^0, 1)_\Gamma = 0, \quad j = 1, \dots, T.$$

Такое решение единственно и для него выполняется подобная (5.29) оценка.

В отличие от задачи Стокса (пример 5.12) свойства задач теории упругости, обеспечиваемые предложениями 5.13 и 5.14, зависят от размерности $n = 2, 3$. Именно, решения плоских задач затухают в угловом выходе на бесконечность лишь при дополнительных требованиях (5.32) или (5.33). Это обстоятельство находит свое отражение в алгоритме [120] построения асимптотики решений задач на соединениях областей различных предельных размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. 1, 2 // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. № 4. P. 623–723; 1964. V. 17. № 1. P. 35–92.
- [2] Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса–Л. Ниренберга. 1, 2 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 3. С. 665–706; // Труды МИАН. 1966. V. 92. P. 233–297.
- [3] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1964.
- [4] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–160.
- [5] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
- [6] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Матем. сб. 1969. Т. 78. № 3. С. 446–472.
- [7] Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
- [8] Roitberg Ya. A. Elliptic Boundary Value Problems in the Spaces of Distributions. Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [9] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
- [10] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
- [11] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [12] Nečas J. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Paris: Masson, 1967.
- [13] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
- [14] Кондратьев В. А. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 10. С. 1831–1843.
- [15] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. V. 76. P. 29–60.

- [16] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // *Math. Nachr.* 1978. Т. 81. С. 25–82.
- [17] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // *УМН.* 1983. Т. 38. №2. С. 3–76.
- [18] Grisvard P. *Elliptic Problems in Non-Smooth Domains*. London: Pitman, 1985.
- [19] Dauge M. *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*. Berlin: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Math. V. 1341.)
- [20] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*. М.: Наука, 1991.
- [21] Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J. *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*. Providence: Amer. Math. Soc., 1997.
- [22] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Об эллиптических краевых задачах в областях с кусочно гладкой границей // *Труды симп. по мех. сплош. сред и родственным пробл. анализа*. Т. 1. Тбилиси: Мецниереба, 1973. С. 171–181.
- [23] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Эллиптические краевые задачи на многообразиях с особенностями // *Проблемы матем. анализа*. Вып. 6. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. С. 85–142.
- [24] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. L_p -оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // *Труды ММО.* 1978. Т. 37. С. 49–93.
- [25] Назаров С. А., Шойхет Б. А. Коэрцитивные оценки в весовых пространствах решений задач теории упругости и теории ползучести в области с двумерной трещиной // *Изв. АН АрмССР. Мех.* 1983. Т. 36. №4. С. 12–25.
- [26] Назаров С. А. Оценки вблизи ребра решения задачи Неймана для эллиптической системы // *Вестник ЛГУ.* 1988. №1. С. 37–42.
- [27] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в областях с кусочно гладкой границей // *Труды ЛМО.* 1990. Т. 1. С. 174–211.
- [28] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Весовые пространства с неоднородными нормами и краевые задачи в областях с коническими точками // *Elliptische Differentialgleichung (Meeting, Rostock, 1977)*. Rostock: Wilhelm-Pieck-Univ., 1978. P. 161–189.
- [29] Назаров С. А. Метод Вишика–Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 1. Задача в конусе; 3. Задача с вырождением в конической точке // *Сиб. матем. журн.* 1981. Т. 22. №4. С. 142–163; 1984. Т. 25. №6. С. 106–115.
- [30] Назаров С. А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // *Алгебра и анализ.* 1995. Т. 7. №5. С. 1–92.
- [31] Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
- [32] Назаров С. А. Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // *Проблемы матем. анализа*. Вып. 16. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. С. 167–192.
- [33] Назаров С. А. Несамосопряженные эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность // *Зап. науч. семин. ПОМИ.* 1997. Т. 249. С. 212–231.
- [34] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // *УМН.* 1988. Т. 43. №5. С. 55–98.
- [35] Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Hardy's and Korn's type inequalities and their applications // *Rend. Mat. Appl. (7)*. 1990. V. 10. P. 641–666.
- [36] Solonnikov V. A. Stokes and Navier–Stokes equations in domains with noncompact boundaries // *Nonlinear PDE and Their Appl. Collège de France Seminar.* 1989. V. 4. P. 240–349.
- [37] Назаров С. А. Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // *Вестник СПбГУ.* 1992. №8. С. 19–24.
- [38] Назаров С. А. Весовые неравенства Корна на параболоидальных областях // *Матем. заметки.* 1997. Т. 6. №5. С. 751–765.
- [39] Ван Дайк М. *Методы возмущений в механике жидкости*. М.: Мир, 1967.

- [40] Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.
- [41] Leguillon D., Sanches-Palencia E. Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity. Paris: Masson, 1987.
- [42] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [43] Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. V. 1, 2. Berlin: Akademie-Verlag, 1990, 1991.
- [44] Назаров С. А. Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестник ЛГУ. 1982. №7. С. 65–68.
- [45] Леора С. Н., Назаров С. А., Проскура А. В. Вывод предельных уравнений для эллиптических задач в тонких областях при помощи ЭВМ // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1986. Т. 26. №7. С. 1032–1048.
- [46] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [47] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North Holland, 1978.
- [48] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
- [49] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
- [50] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [51] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
- [52] Ройтберг И. Я., Ройтберг Я. А. Формула Грина для общих эллиптических граничных задач для систем структуры Дуглиса–Ниренберга // Докл. РАН. 1998. Т. 359. №6. С. 739–743.
- [53] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
- [54] Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1972.
- [55] Назаров С. А. Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы матем. анализа. Вып. 17. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. С. 101–152.
- [56] Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988.
- [57] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
- [58] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
- [59] Novotny A. Viscous multipolar Fluids. Physical background and mathematical theory // Fortschr. Phys. 1992. V. 40. №5. P. 445–517.
- [60] Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические краевые задачи в областях типа внешности пика // Проблемы матем. анализа. Вып. 9. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. С. 105–148.
- [61] Стернин Б. Ю. Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды ММО. 1966. Т. 15. С. 346–382.
- [62] Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
- [63] Costabel M., Dauge M. Computation of corner singularities in linear elasticity // Lecture Notes in Pure Appl. Math. 1994. V. 167. P. 59–68.
- [64] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи с условиями излучения на ребрах границы // Матем. сб. 1992. Т. 183. №10. С. 13–44.
- [65] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Самосопряженные задачи с условиями излучения на ребрах границы // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №3. С. 196–225.

- [66] Никишкин В. А. Особенности решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка в окрестности ребра // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1979. №2. С. 51–62.
- [67] Maz'ja V. G., Rosmann J. Über die Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Umgebung von Kanten // Math. Nachr. 1988. V. 138. P. 27–53.
- [68] Назаров С. А. Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в весовых функциональных пространствах // Матем. сб. 1988. Т. 137. №2. С. 224–241.
- [69] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Самосопряженные эллиптические задачи: операторы рассеяния и поляризации на ребрах границы // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. №4. С. 157–186.
- [70] Назаров С. А. Фредгольмовость оператора краевой задачи с условиями на ребре границы типа условий Чаплыгина–Жуковского–Кутта // Функц. анализ и его прил. 1997. Т. 31. №3. С. 44–56.
- [71] Назаров С. А. Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сшиваемых разложений // Труды СПбМО. 1996. Т. 5. С. 112–183.
- [72] Назаров С. А., Полякова О. Р. Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе // Труды ММО. 1996. Т. 57. С. 16–75.
- [73] Nazarov S. A. On the two-dimensional aperture problem for Navier–Stokes equations // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1996. V. 323. P. 699–703.
- [74] Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. №4. P. 526, 528.
- [75] Solonnikov V. A. On the Stokes equations in domains with nonsmooth boundaries and on a viscous incompressible flow with a free surface // Nonlinear PDE and Their Appl. Collège de France Semin. 1980/81. V. 3. P. 340–423.
- [76] Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Об особенностях решений задачи Дирихле во внешности тонкого конуса // Матем. сб. 1983. Т. 122. №4. С. 435–456.
- [77] Мазья В. Г., Назаров С. А. Об особенностях решений задачи Неймана в конической точке // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. №3. С. 52–63.
- [78] Мовчан Н. В., Назаров С. А. Асимптотика показателей сингулярностей для угловых в плане трещин // Вестник ЛГУ. 1990. №15. С. 34–38.
- [79] Козлов В. А., Мазья В. Г. О спектре операторного пучка, порожденного задачей Дирихле в конусе // Матем. сб. 1991. Т. 182. №5. С. 638–660.
- [80] Козлов В. А., Мазья В. Г. Спектральные свойства операторных пучков, порожденных эллиптическими краевыми задачами в конусе // Функц. анализ и его прил. 1988. Т. 22. №2. С. 38–46.
- [81] Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Schwab C. On singularities of solutions to the Dirichlet problem of hydrodynamics near the vertex of a cone // J. Reine Angew. Math. 1994. V. 456. P. 65–97.
- [82] Kozlov V. A., Maz'ya V. G. Singularities in solutions to mathematical physics problems in nonsmooth domains // Partial Differential Equations and Functional Analysis. In memory of P. Grisvard. Proceedings of conference, 1994. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 174–206.
- [83] Pazy A. Asymptotic expansion of solution of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 24. P. 193–218.
- [84] Назаров С. А. Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. Т. 1, 1990. С. 17–31.
- [85] Камоцкий И. В., Назаров С. А. Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов // Труды СПбМО. 1998. Т. 6. С. 151–212.
- [86] Назаров С. А. Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // Прикл. матем. мех. 1998. Т. 62. №3. С. 489–502.
- [87] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
- [88] Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
- [89] Карпешина Ю. Е., Павлов Б. С. Взаимодействие нулевого радиуса для бигармонического и полигармонического уравнений // Матем. заметки. 1986. Т. 40. №1. С. 49–59.

- [90] Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. №5. С. 1011–1014.
- [91] Павлов Б. С. Теория расширений и явно решаемые модели // УМН. 1987. Т. 42. №6. С. 99–132.
- [92] Демков Ю. Н., Островский В. Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.
- [93] Канаун С. К., Левин В. М. Метод эффективного поля в механике композиционных материалов. Петрозаводск: Изд-во ПГУ, 1993.
- [94] Назаров С. А. Эллиптические краевые задачи с периодическими коэффициентами в цилиндре // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №1. С. 101–112.
- [95] Назаров С. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач с периодическими коэффициентами // Вестник ЛГУ. 1985. №15. С. 16–22.
- [96] Agmon S., Nirenberg L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16. P. 121–239.
- [97] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
- [98] Арутюнян Н. Х., Мовчан А. Б., Назаров С. А. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболаидальными и цилиндрическими включениями или полостями // Успехи механики. 1987. №4. С. 3–91.
- [99] Bayada C., Chambat M. The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation: a mathematical proof // Appl. Math. Optim. 1986. V. 14. P. 73–93.
- [100] Назаров С. А. Асимптотика решения задачи Навье–Стокса о течении тонкого слоя жидкости // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. №2. С. 131–144.
- [101] Назаров С. А., Пилецкас К. И. Рейнольдсово течение жидкости в тонком трехмерном канале // Литов. матем. сб. 1990. Т. 30. №4. С. 772–783.
- [102] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
- [103] Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987.
- [104] Зорин И. С. Операторное представление системы Ламе и предельные краевые задачи теории тонких плит // Вестник ЛГУ. 1987. №22. С. 108.
- [105] Sanchez-Palencia E. Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 2. 1990. V. 311. P. 909–916.
- [106] Назаров С. А. Асимптотика решений эллиптической краевой задачи в тонкой области // Проблемы матем. анализа. Вып. 11. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. С. 191–208.
- [107] Шойхет Б. А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикл. матем. мех. 1973. Т. 37. №5. С. 913–924.
- [108] Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G. Korn's inequalities for frame structures and junctions with sharp estimates for the constants // Asymptotic Anal. 1994. V. 8. P. 1–14.
- [109] Friedrichs K. O., Dressler R. F. A boundary-layer theory for elastic plates // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. №1. P. 1–33.
- [110] Гольденвейзер А. Л. Теория упругих оболочек. М.: Наука, 1965.
- [111] Gregory R. D., Wan F. V. Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory // J. Elasticity. 1984. V. 14. №1. P. 27–64.
- [112] Зорин И. С., Назаров С. А. Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикл. матем. мех. 1989. Т. 53. №4. С. 642–650.
- [113] Dauge M., Gruais I. Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encadrée // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 321. P. 375–380.
- [114] Dauge M., Djurdjevic I., Rössle A. Full asymptotic expansions for thin elastic free plates // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1998. V. 326. P. 1243–1248.
- [115] Ciarlet P. G. Plates junctions in elastic microstructures. Paris: Masson, 1990.
- [116] Le Dret H. Problèmes variationnels dans les multi-domaines, modelisation des jonctions et applications. Paris: Masson, 1991.
- [117] Panassenko G. P. Asymptotic analysis of bar systems. 1, 2 // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. №3. P. 325–353; 1996. V. 4. №1. P. 37–116.
- [118] Argatov I. I., Nazarov S. A. Junction problem of shashlik (skewer) type // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1993. V. 316. P. 1329–1334.

- [119] Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure // *Asymptotic Anal.* 1994. V. 8. P. 105–143.
- [120] Назаров С. А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей // *Труды семин. им. И.Г. Петровского. Вып. 18. М. Изд-во МГУ, 1995. С. 3–78.*
- [121] Nazarov S. A. Junction problems of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1.* 1995. V. 320. P. 1419–1424.
- [122] Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // *Asymptotic Anal.* 1995. V. 11. P. 343–415.
- [123] Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотический анализ на соединениях областей различных предельных размерностей. Тело, пронзенное тонким стержнем // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1996. Т. 60. №1. С. 3–36.
- [124] Назаров С. А. Асимптотика решений задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкими отростками // *Докл. РАН.* 1997. Т. 352. №4. С. 458–461.
- [125] Мельник Т. А., Назаров С. А. Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа “густого гребешка” // *Труды семин. им. И.Г. Петровского. Вып. 19. М.: Изд-во МГУ, 1997. С. 138–173.*
- [126] Кучмент П. А. О теории Флоке для параболических и эллиптических граничных задач в цилиндре // *Докл. АН СССР.* 1981. Т. 258. №2. С. 269–273.
- [127] Кучмент П. А. Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // *УМН.* 1982. Т. 37. №4. С. 3–52.
- [128] Nicaise S., Sändig A.-M. General interface problems. 1, 2 // *Math. Methods Appl. Sci.* 1994. V. 17. P. 395–450.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: serna@snark.ipme.ru

Поступила в редакцию
15.04.1999