Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, О явно заданных седловых поверхностях в сферическом пространстве, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:24:58

О ЯВНО ЗАДАННЫХ СЕДЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. БОРИСЕНКО

С. Н. Берштейн доказал, что явно заданная над всей плоскостью седловая поверхность в евклидовом пространстве E^3 , которая растет на бесконечности медленнее линейной, является цилиндром. С. Н. Берштейн доказал эту теорему для поверхностей класса C^2 [1], и на нерегулярный случай она обобщена в [2].

Гладкая класса C^1 поверхность F^2 в S^3 однозначно проектируется на большую сферу S_0^2 , если касательные большие сферы к F^2 не проходят через полярные к S_0^2 точки O_1, O_2 .

Соединим центр сферы S^3 в E^4 с точками поверхности F^2 лучами с началом в центре сферы. Мы получим трехмерную поверхность F^2 в E^4 . Явное задание поверхности F^2 в S^3 эквивалентно тому, что конус F^3 в E^4 в некоторой системе ортогональных координат является графиком функции $x_3 = f(x_1, x_2, x_3)$.

Поверхность F^2 в S^3 называется седловой, если на любой замкнутый спрямляемый контур $\mathcal{L}$, принадлежащий пересечению F^2 с произвольной большой сферой S^2 в S^3 , который лежит в открытой полусфере и деформируется по поверхности в точку, можно натянуть двумерную односвязную поверхность Q , содержащуюся в $F^2 \cap S^2$. Другими словами, от поверхности нельзя отрезать горбушку никакой большой сферой S^2 , т.е. на F^2 не существует областей с границей таких, чтобы лежала в открытой большой полусфере S^2 , а вся область – в одной из больших полусфер S^3 , на которые делится сфера S^3 большой сферой S^2 . В случае, если F есть регулярная поверхность класса C^2 , условие седлообразности эквивалентно тому, что гауссова кривизна F^2 не превосходит единицы. Справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть F – гладкая класса C^1 , явно заданная, седловая, компактная поверхность в сферическом пространстве S^3 . Тогда поверхность F является вполне геодезической большой сферой.

Для центрально-симметрических поверхностей она была доказана в [3]. Эта теорема является обобщением теоремы С. Н. Берштейна на сферическое пространство. Для регулярных поверхностей получаем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть F – регулярная класса C^2 , явно заданная, компактная поверхность в сферическом пространстве S^3 . Если гауссова кривизна поверхности F $K \leq 1$, то поверхность F является вполне геодезической большой сферой.

Это следствие было сформулировано в [4].

Нам кажется, что при ограничении на гауссову кривизну поверхности справедливо следующее предположение. Пусть F есть регулярная класса C^2 , вложенная, компактная поверхность в сферическом пространстве S^3 . Если гауссова кривизна поверхности F $0 < K \leq 1$, то F является вполне геодезической большой сферой.

Основой доказательства теорем является

ЛЕММА 1. Явно заданная, седловая гладкая класса C^1 компактная поверхность в сферическом пространстве S^3 содержит большую окружность обтекающего пространства, вдоль которой касательная плоскость одна и та же.

Фактически лемма доказана в [3], но там сформулировано, что поверхность содержит большую полуокружность, хотя фактически доказано, что содержит большую окружность.

Эта лемма является обобщением утверждения, доказанного для евклидова пространства А. И. Медяником [5].

ЛЕММА 2. Пусть F – явно заданная, седловая, гладкая класса C^1 компактная поверхность в сферическом пространстве S^3 . Если на поверхности F содержится большая окружность, вдоль которой касательная плоскость стационарна, то поверхность F является вполне геодезической большой сферой.

В [6] эта лемма (теорема 1) доказана с некоторыми неточностями, которые мы здесь исправляем, для регулярных класса C^2 и гауссовой кривизны $K \leq 1$ поверхностей.

Доказательство леммы 2. Сферическое изображение окружности S^1 лежит на полярной большой окружности. Из предположения однозначной проектируемости следует, что сферическое изображение поверхности F лежит в открытой полусфере. Поэтому сферическое изображение окружности S^1 не заполняет полностью полярной окружности. Отсюда следует, что найдется большая сфера S_0^2 , содержащая окружность S^1 , которая не является касательной сферой к поверхности F . Для определенности положим, что сфера S_0^2 лежит в плоскости переменных x_1, x_2, x_3 , а окружность S^1 – в плоскости x_1, x_2 .

В окрестности окружности S^1 нет других точек пересечения сферы S_0^2 и поверхности F . Любая другая компонента пересечения, если она есть, является регулярной кривой, гомеоморфной окружности. Компонента пересечения лежит в открытой полусфере сферы S_0^2 . Пусть γ – одна из компонент пересечения, F^+ – область на поверхности F с границей γ , лежащая в полупространстве $x_0 > 0$.

Осуществим геодезическое отображение полусферы $x_0 > 0$ на евклидово пространство $x_0 = 1$. Образ поверхности – поверхность $\tilde{F}^+$ – задается следующими уравнениями:

$$x = \frac{x_1(u, v)}{x_0(u, v)}, \quad y = \frac{x_2(u, v)}{x_0(u, v)}, \quad z = \frac{x_3(u, v)}{x_0(u, v)},$$

где $x_i = x_i(u, v)$ ($i = 0, \dots, 3$) – компоненты радиуса-вектора поверхности F . Так как кривая γ лежит в плоскости $x_0 = 0$ и на кривой γ $x_3 > c > 0$, то при уходе точек поверхности на бесконечность $z \rightarrow \infty$. Значит, от поверхности $\tilde{F}^+$ можно отрезать горбушку. Но из свойств геодезического отображения следует, что тогда и от поверхности F^+ можно отрезать горбушку, и она не является седлообразной. Мы пришли к противоречию. Итак, сфера S_0^2 пересекает поверхность F только по большой окружности S^1 . Пусть поверхность $\tilde{F}^+$ является геодезическим образом поверхности F^+ , ограниченной большой окружностью S^1 и лежащей в полусфере $x_0 > 0$. Оценим, как уходит поверхность $\tilde{F}^+$ на бесконечность. Заметим, что если точка на F^+ приближается к окружности S^1 , то $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 1$, $x_3 \rightarrow 0$, $x_0 \rightarrow 0$, причем $x_3 > 0$, $x_0 > 0$ в области F^+ . Касательная плоскость к поверхности F^+ в точках окружности S^1 одна и та же, ее уравнение $a_0 x_0 - a_3 x_3 = 0$, $a_0 \cdot a_3 > 0$, $a_0^2 + a_3^2 = 1$. Ее образом при геодезическом отображении будет плоскость $z = c = \text{const} > 0$, которая параллельна координатной плоскости x, y . Координаты точек поверхности F^+ удовлетворяют уравнению $n_0 x_0 + n_3 x_3 + n_1 x_1 + n_2 x_2 = 0$, где $n_i, x_i = x_i(u, v)$ ($i = 0, \dots, 3$) соответственно координаты вектора единичной нормали к F^+ и координаты точек поверхности. При стремлении точек к окружности S^1 $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$, $n_0 \rightarrow a_0$, $n_3 \rightarrow a_3$. Отсюда следует, что при стремлении точек поверхности $\tilde{F}^+$ на бесконечность $z \rightarrow c > 0$, т.е. поверхность стремится к плоскости $z = c$.

Пусть функция на поверхности $\tilde{F}^+$ $f = z(u, v)$ принимает в некоторых точках значения меньше c . Тогда в некоторой точке P_0 она достигает минимума $c_0 < c$. Касательная плоскость в этой точке есть плоскость $z = c_0 < c$, поверхность лежит по одну сторону этой плоскости. Мы можем от поверхности F^+ отрезать горбушку. Это противоречит седлообразности $\tilde{F}^+$. Аналогично функция $f = z(u, v)$ не может принимать значения, большие c . Отсюда следует, что поверхность $\tilde{F}^+$ является плоскостью $z = \text{const}$. Из свойств геодезического отображения следует, что поверхность F^+ есть большая вполне геодезическая полусфера. Применим те же рассуждения к компоненте поверхности F , которая лежит в полусфере $x_3 < 0$. Мы получим, что поверхность F является объединением двух вполне геодезических полусфер. Из гладкости F следует, что поверхность F является вполне геодезической большой сферой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берштейн С. Н. Усиление теоремы о поверхностях отрицательной кривизны // Собрание сочинений. Т. 3, 1960. С. 368. [2] Адельсон-Вельский Г. М. // Докл. АН СССР. 1945. Т. 49. № 6. [3] Борисенко А. А. // Матем. сб. 1981. Т. 114 (156). № 3. С. 336–354. [4] Борисенко А. А. // Матем. сб. 1977. Т. 104 (146). № 4. С. 559–576. [5] Медяник А. И. // Укр. геом. сб. Харьков. 1966. № 2. С. 52–58. [6] Борисенко А. А. // Укр. геом. сб. Харьков. 1975. № 18. С. 25–27.

Принято редколлегией
23.08.1999