Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Дюбина, Пример скорости ухода на бесконечность для случайного блуждания по группе, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:09:41

ПРИМЕР СКОРОСТИ УХОДА НА БЕСКОНЕЧНОСТЬ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ПО ГРУППЕ

А. Г. ДЮБИНА

Как растет средняя длина слова при случайном блуждании по группе? Часто порядок роста линейный, в частности, это так для любой неабелевой группы. Если же рост более медленный, чем линейный, во многих примерах он асимптотически равен $\sqrt{n}$ — например, в любой абелевой группе. Группа аффинных преобразований диадической прямой имеет экспоненциальный рост, но средняя длина тоже растет как $\sqrt{n}$. Оказывается, что, тем не менее, есть и другие возможности для среднего роста:

ТЕОРЕМА 1. *В сплетении $\mathbb{Z}^2 \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ существуют такие образующие, что для определяемого ими простого случайного блуждания*

$$E_{\mu^{*n}}[l] \asymp \frac{n}{\ln n}.$$

Здесь l — длина в словарной метрике, а μ — мера, равномерно распределенная на выбранных образующих и обратных к ним.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать две леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *размахом* случайного блуждания количество различных элементов группы, посещенных за первые n шагов ($n \geq 0$). Обозначим размах через R_n .

ЛЕММА 1. *Рассмотрим простое симметричное случайное блуждание на $\mathbb{Z}^2$. Тогда*

$$E[R_n] \sim \frac{\pi n}{\ln n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_n(0, 0)$ — это вероятность того, что в момент n блуждание впервые возвращается в 0. Пусть φ_k — случайная величина, принимающая значение 1, если на k -м шаге блуждание попадает в ранее не посещенную точку, и 0 иначе. Тогда

$$E[\varphi_k] = 1 - \sum_{j=1}^k F_j(0, 0)$$

[2; § 4, доказательство теоремы 1]. Пусть T — время первого возвращения в 0. Тогда

$$1 - \sum_{j=1}^k F_j(0, 0) = \Pr[T > k].$$

Но для простого двумерного случайного блуждания

$$\Pr[T > n] \sim \frac{\pi}{\ln n}$$

[2; § 16, пример 1]. Поэтому

$$E[\varphi_k] \sim \frac{\pi}{\ln k}.$$

Тогда

$$E[R_n] = \sum_{i=1}^n E[\varphi_i] \sim \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{\ln i} \sim \frac{\pi n}{\ln n}.$$

ЛЕММА 2. Пусть A – конечно-порожденная группа, пусть $a_1, \dots, a_k$ – ее образующие, а δ – это образующая $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Рассмотрим на $B = A \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ меру, равномерно распределенную на образующих

$$(a_i, e), (a_i, \chi(\delta)), (e, \chi(\delta))(a_i, e), (e, \chi(\delta))(a_i, e)(e, \chi(\delta))$$

(где $\chi(\delta)$ – функция из A в B такая, что $\chi(\delta)(e) = \delta$, $\chi(\delta)(x) = e$ при $x \neq e$). Тогда

$$\frac{1}{4} \mathbb{E}[R_n^A] \leq \mathbb{E}_{\mu^{*n}}[l] \leq 2 \mathbb{E}[R_n^A].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе неравенство следует из того, что

$$l_B(g) \leq 2R_n^A,$$

где g – элемент, посещенный на n -м шаге блуждания, а R_n^A – размах проекции траектории на A .

Для доказательства первого неравенства подсчитаем условное математическое ожидание

$$\mathbb{E}_{\mu^{*n}}[l \mid R_n^A = R].$$

Пусть $g = (a, f)$ ($a \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Пусть S_n – это количество элементов в носителе f . Тогда $l_B(g) \geq \frac{1}{2}S_n$, так как умножение на любой из рассматриваемых образующих изменяет значение функции не более чем в двух точках. Заметим, что

$$\mathbb{E}[S_n^B \mid R_n^A = R] = \frac{1}{2}R.$$

Действительно, заметим, что в каждом из R посещенных элементов группы A значение функции f с вероятностью $\frac{1}{2}$ равно δ . Поэтому

$$\mathbb{E}_{\mu^{*n}}[l \mid R_n^A = R] \leq \frac{1}{4}R,$$

откуда следует первое неравенство леммы. Приведем теперь без доказательства серию примеров, реализующих степенные асимптотики.

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим группы, определяемые рекуррентно:

$$G_1 = \mathbb{Z}; \quad G_{i+1} = \mathbb{Z} \wr G_i.$$

В G_k существуют такие образующие, что для определяемого ими простого случайного блуждания

$$\mathbb{E}_{\mu^{*n}}[l] \asymp n^{\frac{2^k-1}{2^k}}.$$

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вершик А. М. // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1999. Т. 256. С. 5–18. [2] Spitzer F. Principles of Random Walk. Princeton: Van Nostrand, 1964.

Принято редколлегией
23.08.1999