Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Многообразие ассоциативных колец не шпехтово, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:51:49

МНОГООБРАЗИЕ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ НЕ ШПЕХТОВО

А.В. Гришин

С конца 60-х годов и до недавнего времени в группах, алгебрах Ли и некоторых кольцах, близких к ассоциативным, были построены примеры объектов, не имеющих конечного базиса тождеств. С другой стороны, для ассоциативного случая (а также для некоторых других) был получен ряд положительных результатов весьма общего характера. Для конечных колец – теорема Львова–Крузе [1], [2] (см. также [3]), для алгебр над полем характеристики 0 – теорема Кемера [4], для T -пространств (некоторое обобщение T -идеалов) над полем нулевой характеристики, а также в частных случаях над полем характеристики $p > 0$ – результаты автора [5], [6]. На некотором этапе у ряда специалистов в PI -теории стало складываться впечатление, что в ассоциативном случае любая алгебра над достаточно “хорошим” кольцом (например, над полем или над кольцом целых чисел) имеет конечный базис тождеств. Однако это не так.

Прежде чем формулировать основной результат, приведем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть k – ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей, $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ – свободная счетнопорожденная ассоциативная k -алгебра. Назовем T -модулем алгебры F всякий ее k -подмодуль V , замкнутый относительно подстановок вместо переменных x_i произвольных элементов из алгебры F , в частности, если k – поле, то V – T -пространство, если $k = \mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, то V – T -группа. Если T -модуль V является в то же время идеалом, то он называется T -идеалом.

Цель настоящей работы – показать, что в свободной $\mathbb{Z}$ -алгебре $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ существуют бесконечные возрастающие цепочки T -идеалов. Кроме того, будет показано, что в относительно свободной алгебре $\mathbb{Z}\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle / ([x_1, [x_2, x_3]])^T$ существуют бесконечные возрастающие цепочки T -подгрупп. Будут даны явные конструкции. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть k – поле характеристики 2, $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ – свободная счетнопорожденная ассоциативная k -алгебра, Ω – T -идеал алгебры F , порожденный многочленом $[x_1, [x_2, x_3]]$. Тогда система S , состоящая из многочленов $f_n = x_1^2 \cdots x_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, порождает в относительно свободной алгебре F/Ω не конечно базизируемое T -пространство S^T .

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. (1) Рассмотрим сначала T -пространство $S^T + \Omega$ в свободной алгебре F . Достаточно показать, что для любого $n > 1$ многочлен f_n не лежит в T -пространстве $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}^T + \Omega$. Допустим противное. Легко видеть, что тогда можно считать, что многочлен f_n является суммой некоторого элемента из Ω и многочленов вида $g = h_1 \cdots h_r$, где $1 \leq r \leq n-1$, многочлен h_i либо равен квадрату полилинейного одночлена, либо имеет вид $uv + vu$, причем $\deg_{x_i} g = 2$ при $i = 1, \dots, n$.

Скажем, что g – квадратичный одночлен, если все h_i – квадраты полилинейных одночленов, причем хотя бы один из этих одночленов имеет степень ≥ 2 .

Скажем, что g – коммутаторный многочлен, если среди сомножителей h_i присутствуют многочлены вида $uv + vu$.

Предположение о том, что одночлен f_n принадлежит T -пространству $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}^T + \Omega$, равносильно тому, что f_n является суммой квадратичных одночленов, коммутаторных многочленов и элемента из Ω .

Для того чтобы привести это к противоречию, нам понадобится следующая вспомогательная коммутативная алгебра $A = k[\{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}]$, где коммутирующие между собой элементы a_{ij} удовлетворяют следующим соотношениям: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\alpha_{ij}^2 = 1$, $(1 + \alpha_{ij})(1 + \alpha_{il}) = 0$, $(1 + \alpha_{ij})(1 + \alpha_{kl}) = (1 + \alpha_{ik})(1 + \alpha_{jl})$, где i, j, k, l – попарно различные индексы.

(2) Рассмотрим теперь свободную счетнопорожденную алгебру $\Phi = A\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$, содержащую k -подалгебру F , в ней идеал I , порожденный элементами вида $x_i x_j + \alpha_{ij} x_j x_i$, и фактор-алгебру $\Phi_2 = \Phi/I$.

Вычисления в алгебре Φ_2 показывают, что

- а) в алгебре Φ_2 выполнено тождество $[x_1, [x_2, x_3]] = 0$;
- б) любой коммутаторный многочлен “исчезает” в алгебре Φ_2 ;
- в) образ одночлена f_n в алгебре Φ_2 не может быть представлен в виде суммы образов квадратичных одночленов.

Это и приводит к противоречию.

Следующее утверждение является некоторым техническим следствием (правда, нетривиальным) теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть k – поле характеристики 2. Тогда T -идеал, порожденный в свободной алгебре $k\langle x_1, \dots, x_i, \dots, y_1, y_2, z_1, z_2 \rangle$ множеством многочленов

$$g_0 = y_1^4 z_1^4 z_2^4 y_2^4 y_1^4 z_1^4 z_2^4 y_2^4, \quad g_n = y_1^4 z_1^4 x_1^2 \cdots x_n^2 z_2^4 y_2^4 y_1^4 z_1^4 x_{n+1}^2 \cdots x_{2n}^2 z_2^4 y_2^4,$$

где $n \in \mathbb{N}$, не является конечно порожденным.

Следствия. 1. Пусть A – коммутативное кольцо, имеющее сюръективный гомоморфизм на $\mathbb{Z}_2$ -алгебру с единицей (например, $A = \mathbb{Z}$). Тогда указанные в теоремах 1 и 2 многочлены порождают в алгебре $A\langle x_1, \dots, x_i, \dots, y_1, y_2, z_1, z_2 \rangle$ не конечнопорожденный T -идеал (T -модуль, T -группу).

2. Многообразие ассоциативных колец не шпехтово. Более того, многообразие ассоциативных ниль-колец индекса 32 не шпехтово.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Львов И. В. // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. С. 269–297. [2] Kruse B. I. // J. Algebra. 1973. V. 26. P. 298–318. [3] Латышев В. Н. // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 259–260. [4] Кемер А. Р. // Алгебра и логика. 1987. № 5. С. 597–641. [5] Гришин А. В. // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 3. С. 669–700. [6] Grishin A. V. // Proc. of the First International Moscow–Tainan Alg. Workshop (Tainan, 1994) / ed. Y. Fong et al. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 225–227.

Московский педагогический
государственный университет

Принято редколлегией
23.08.1999