Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, А. А. Кочурин, Высокомодовый параметрический резонанс в задаче о повышении устойчивости за счет вибраций упругих систем, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:27:22

ВЫСОКОМОДОВЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЗАДАЧЕ О ПОВЫШЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЗА СЧЕТ ВИБРАЦИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

Ю. С. Колесов, А. А. Кочурин

1. Данный вопрос впервые был поставлен в статье [1], а способ его решения – исследование устойчивости соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка, получающихся при проектировании на моды – собственные функции – с небольшими номерами. Ниже приводятся результаты исчерпывающего анализа, когда к рассмотрению привлекаются моды с произвольными номерами.

Для простоты изложения ограничимся краевой задачей

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \left(-\gamma^2 + \frac{\beta}{\varepsilon} \sin \frac{t}{\varepsilon} \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ (2) \quad & u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \end{aligned}$$

где ε – малый положительный параметр, коэффициент затухания $\alpha > 0$, постоянная $\gamma > 1$, параметр β – характеристика вибрационного воздействия. Следует обратить внимание на то, что при $\beta = 0$ на некотором числе младших мод имеем экспоненциальное возрастание решений. Ставится вопрос: можно ли за счет вибрационного воздействия добиться экспоненциального затухания всех решений краевой задачи (1), (2), начальные условия которых обладают стандартными условиями гладкости? В [1] ответ на этот вопрос считается положительным. Мы же покажем, что по тенденции он скорее отрицательный.

2. Привлекая метод Фурье, вместо краевой задачи (1), (2) получаем счетное число обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha \frac{du}{dt} + \left(-\gamma^2 + \frac{\beta}{\varepsilon} \sin \frac{t}{\varepsilon} \right) u + k^2 u = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть параметр γ таков, что

$$(4) \quad \gamma^2 < \frac{\beta^2}{2} + 1.$$

Тогда найдутся такие положительные постоянные ε_0 и m , M , где $m < M$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ экспоненциально затухают решения каждого из уравнений (3) с номерами $k \leq m/\varepsilon$ и $k \geq M/\varepsilon$.

3. Перейдем к случаю, когда

$$(5) \quad \frac{m}{\varepsilon} < k < \frac{M}{\varepsilon}.$$

Оказывается, что при ограничении (5) основной интерес представляют моды с номерами

$$(6) \quad k = \frac{1}{2\varepsilon} + \delta,$$

где зависящая от ε постоянная δ ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$. Дело в том, что на таких модах в уравнении (3) возможна параметрическая неустойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00549).

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$(7) \quad \frac{\beta^2}{4} > \alpha^2 + \frac{1}{4}.$$

Тогда найдется такое ε_0 , что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ некоторое конечное число уравнений (3), номера которых подчинены неравенствам (5), имеет экспоненциально растущие решения с не зависящим от ε показателем экспоненты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$(8) \quad |\beta| < 2\alpha.$$

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ экспоненциально затухают решения каждого из уравнений (3), номера которых подчинены оценкам (5).

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$(9) \quad \alpha^2 < \frac{\beta^2}{4} < \alpha^2 + \frac{1}{4}.$$

Тогда при стремлении ε к нулю чередуются свойства устойчивости и неустойчивости некоторых уравнений (3), номера которых подчинены неравенствам (5).

4. Достаточно просты доказательства всех сформулированных предложений. Их идейная суть такова. После перехода к медленному времени εt при небольших номерах k доказательство теоремы 1 сводится к применению алгоритма из [2]. Он же используется при больших номерах k , о которых идет речь в теореме 1. Наконец, до номеров порядка $1/\varepsilon$ утверждение теоремы “дотягивается” путем использования известной теоремы Ляпунова [3].

Доказательства остальных утверждений также опираются на описанный в [2] алгоритм.

Теперь об общем физическом выводе. Только при одновременном выполнении неравенств (4) и (8) реализуется классический феномен повышения устойчивости за счет вибраций. Следует также еще раз подчеркнуть, что в силу неравенства (8) в случае упругих систем он принципиально другой: повышение устойчивости не есть прямолинейное следствие увеличения амплитуды вибрационного воздействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Челомей В. Н. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 3. С. 345–347. [2] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995. [3] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их применения. М.: Наука, 1972.

Ярославский государственный университет

Принято редколлегией
23.08.1999