Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Неархимедовы полиэдральные разложения ультраравномерных пространств, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 06:32:21

НЕАРХИМЕДОВЫ ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ УЛЬТРАРАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С. В. Лютковский

Разложению топологических и равномерных пространств в виде пределов обратных спектров были посвящены работы [1], [2]. Данная работа посвящена исследованию вопроса о спектральной разложимости ультраравномерных пространств с полиэдрами над неархимедовыми локальными полями $L \supset \mathbb{Q}_p$ (см. о таких полях [3]).

Ультратметрическим пространством (X, ρ) называется множество X с метрикой ρ , удовлетворяющей неравенству $\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z); \rho(z, y)\} \forall x, y \text{ и } z \in X$. Ультравыравномерным называется равномерное пространство (X, K) с ультравыравмерностью K , удовлетворяющей условию $|x - z| < V'$, если $|y - z| < V'$ и $|y - x| < V$, где $V \subset V' \in K \forall x, y \text{ и } z \in X$ [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (1) Полиэдром P в $c_0(L, n)$ назовем дизъюнктное объединение симплексов s_j , $P = \bigsqcup_{j \in F} s_j$, F – множество, $s_j = B(c_0(L, m_j), x, r) = x + \pi_L^a B(c_0(L, m_j), 0, 1)$, где $m_j \leq n$, $a \in \mathbb{Z}$, $B(c_0(L, m), x, r) := \{y \in c_0(L, m) : \|x - y\| \leq r\}$; $c_0(L, m_j) \hookrightarrow c_0(L, n)$; $c_0(L, w) := \{x : x = (x_j : j \in \alpha), x_j \in L, \forall \varepsilon > 0 \text{ card}(j : |x_j|_L > \varepsilon) < \aleph_0\}$ – это банахово пространство над полем L с $\|x\| := \sup_j |x_j|$, α – ординал, $\text{card}(\alpha) = w$; $\dim(L, s_j) := m_j$. Для каждого L зафиксируем $\pi_L \in L$ такие, что $B(L, 0, 1^-) := \{y \in L : |x| < 1\} = \pi_L B(L, 0, 1)$, и такие аффинные преобразования. Полиэдр называется равномерным, если (i) $\sup\{\text{diam}(s_j) : j \in F\} < \infty$ и (ii) $\inf\{\text{dist}(s_j, s_i) : i \neq j\} > 0$. Введем p^j -подразделение симплексов (полиэдров) для $j \in \mathbb{N}$, т.е. разбиение каждого симплекса $B(c_0(L, m), x, r)$ в дизъюнктное объединение симплексов с радиусами, равными rp^{-j} . Размерностью полиэдра P назовем $\dim(L, P) := \sup\{\dim(L, s_j) : j \in F\}$. Полиэдр P над L называется локально конечномерным, если все симплексы s в P конечномерны над L . Для симплекса $s = B(c_0(L, m), x, r)$ L -границей ∂s назовем объединение всех его граней q коразмерности 1 над L в $c_0(L, m) := X$, т.е. $q = e + B'$, где B' – шар в $c_0(L, \text{card}(E)) := Y$, $\text{card}(A) = m$, $A \setminus E$ – одноэлементное множество, $E \subset A$, $X \ominus Y = L$, $Y \hookrightarrow X$. Для полиэдра P L -границей назовем $\partial P := \bigcup_{j \in F} \partial s_j$. Вершинами симплекса $s = B(c_0(L, m), 0, 1)$ назовем $\{x = (x_j) \in c_0(L, m) : x_j = 0 \text{ или } x_j = 1 \forall j \in A\}$. Для любого $E \subset A$ с $E \neq A$ и вершины e гранью симплекса s назовем подмножество $e + B(c_0(L, \text{card}(E)), 0, 1) \subset s$. Для произвольного симплекса грани и вершины определяются с помощью аффинного преобразования как образы граней и вершин единичного симплекса $B(c_0(L, m), 0, 1)$.

(2) Непрерывное отображение f множества $M \subset c_0(L, m)$ в полиэдр P назовем существенным, если не существует непрерывного $g : M \rightarrow P$, удовлетворяющего условиям (i)–(iii):

- (i) $g(M) \not\subset P$;
- (ii) имеется $M_0 \subset M$, $M_0 \neq M$ с $f(M) \cap \partial P = f(M_0) = g(M_0) \subset \partial P$ и $f|_{M_0} = g|_{M_0}$;
- (iii) если f линейно на $[x, y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in B(L, 0, 1)\} \subset M$, то g тоже линейно на $[x, y]$, если $f(x) \neq f(y)$, то $g(x) \neq g(y)$.

(3) Пусть $f : M \rightarrow P$ и $g : M \rightarrow P$ – непрерывные отображения, где M – множество, а P – полиэдр, тогда g называется допустимой модификацией f , если выполнены условия (i)–(iii):

- (i) из $a \in M$ и $f(a) \in s$ следует, что $g(a) \in s$, где s – симплекс из P ;
- (ii) если $x, y \in M$, $[x, y] \subset M$ и $f : [x, y] \rightarrow P$ линейно, то $g : [x, y] \rightarrow P$ тоже линейно; если $f(x) \neq f(y)$, то $g(x) \neq g(y)$;
- (iii) $f(\partial M) = g(\partial M)$.

(4) Пусть $X = \lim\{X_i, f_j^i, E\}$ – разложение X в предел обратного спектра полиэдров X_i над L . Оно называется (а) неприводимым, если для любого открытого $V \subset X$ существует конечное подмножество $E(V) \subset E$ такое, что $\{X_i, f_j^i, E(V)\}$ – неприводимое полиэдральное представление пространства V , т.е. $f_j^i : X_i \rightarrow X_j$ – неприводимы и сюръективны $\forall i \geq j \in E(V)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (X, K) – полное ультраравномерное пространство. Тогда существует неприводимое нормальное разложение (X, K) в предел обратного спектра $S = \{P_i, f_j^i, E\}$ равномерных полиэдров P над L , причем $\lim S$ равномерно изоморфен (X, K) ; в частности, для ультраметрического (X, ρ) спектр S является обратной последовательностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Собственное p^j -подразделение комплекса K^a над L называется нормальным. Наименьший открыто-замкнутый подкомплекс комплекса K^a , содержащий $X \subset K^a$, называется полиэдральной окрестностью или открыто-замкнутой звездой множества X относительно K^a и обозначается $K^a X$. Для комплексов K_1^a и K_2^a их соединение $K_1^a \circ K_2^a$ определено в $c_0(L, w(K_1^a)) \oplus c_0(L, w(K_2^a)) \oplus L$ аналогично классическому случаю с заменой $\{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ на $B(L, 0, 1) = [0, 1] \subset L$, где $K_j^a \hookrightarrow c_0(L, w(K_j^a))$. Отображение $h: K \rightarrow N$ называется линейным относительно комплексов K^a и N^a , если оно симплициально для соответствующих полиэдров. Комплекс K^a назовем равномерным, если соответствующий ему полиэдр над L является равномерным. Здесь $\dim(L, K^a)$ может быть бесконечной. Абсолютный полиэдральный спектр называется равномерным сверху, если полиэдры P удовлетворяют условию (i) из определения 1(1).

ТЕОРЕМА 4. Каждое ультраравномерное пространство (X, K) имеет неприводимое абсолютное (нормальное и равномерное сверху) полиэдральное представление $T := \{X_\beta, f_\alpha^\beta, U\}$ над L , то есть для любого $Y \subset (X, K)$ существует направленное подмножество $U(Y) \subset U$ такое, что Y гомеоморфно (равномерно изоморфно соответственно) $\lim T$. Более того, в качестве абсолютного полиэдрального представления (не обязательно равномерного) могут быть выбраны локально конечномерные X_β над L .

ТЕОРЕМА 5. Ультраравномерное пространство (X, K) гомеоморфно $\lim S$ с вещественно полными конечномерными над L полиэдрами P_i и неприводимым нормальным обратным спектром $S = \{P_i, f_j^i, F\}$ тогда и только тогда, когда X вещественно полно.

Доказательства этих теорем даны в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Isbell J. R. // Indag. Math. Ser. A. 1961. V. 23. № 1. P. 242–248. [2] Козловский И. М. // Труды ММО. 1979. Т. 40. С. 83–119. [3] van Rooij A. C. M. Non-Archimedean Functional Analysis. New York: Dekker, 1978. [4] Ludkovsky S. V. // Preprint IHES/M/97/90. Inst. Haut. Étud. Sci., 1997.