Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Новиков, Уровни квазипериодических функций на плоскости и гамильтоновы системы, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:46:13

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

УРОВНИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
НА ПЛОСКОСТИ И ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

С. П. Новиков

Квазипериодической функцией в $\mathbb{R}^n$ с $n+k$ периодами называется ограничение периодической функции $f(x)$ $n+k$ переменных на n -мерное подпространство ℓ $f_\ell(y) = f(x(y))$. Пусть все периоды равны 1, $T^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k}/\mathbb{Z}^{n+k}$.

ТЕОРЕМА 1. *Зададим на торе T^4 функцию Морса и два рациональных направления гиперплоскостей $\ell_1, \ell_2 \in S^3$ (пусть ℓ_1 — это $\{x^4 = c\}$). Существуют непустые окрестности V_1, V_2 этих направлений в S^3 такие, что: для любой пары $\ell'_1 \in V_1, \ell'_2 \in V_2$ связанные компоненты уровня $f_{\ell'}(y^1, y^2) = \text{const}$ на плоскостях $\{\ell'_1 = b_1, \ell'_2 = b_2\} = \ell'$ либо компактны, либо лежат между двумя параллельными прямыми на плоскости в полосе конечной ширины. При малом изменении параметров (ℓ'_1, ℓ'_2, a) это направление варьируется внутри одной целочисленной 3-плоскости в $\mathbb{R}^4$.*

Рассмотрим неособый уровень $M_a^3: \{f(x) = a\}$. Удалим из него все неособые компактные (т.е. замкнутые в $\mathbb{R}^2$) компоненты сечений $\{\ell'_1 = b_1, \ell'_2 = b_2\} = \ell'$. Границу оставшегося тела заклеим семейством 2-дисков в плоскостях $\mathbb{R}_{\ell'}^2$, границы которых — это замкнутые сепаратриссы. Получаем замкнутое многообразие $\widetilde{M}_a^3 = \bigcup_i M_{ai}^3 \subset T^4$. Компоненты M_{ai}^3 мы назовем *носителями открытых траекторий*, где $\sum_i [M_{ai}^3] = 0$ в $H^3(T^4, \mathbb{Z})$.

ТЕОРЕМА 2. *Все носители открытых траекторий общего положения имеют общий с точностью до знака ненулевой неделимый класс гомологий $(\pm Z_a) \in H_3(T^4, \mathbb{Z})$, стабильный при малых возмущениях параметров. Он полностью определяет направление полосы в теореме 1. Все компоненты M_{ai}^3 это образы тора T^3 .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $n = 2, k = 1$ был подробно исследован, начиная с 1982 г. (см. [1]). Основные топологические трудности были преодолены позднее — см. [2], [3], физические результаты о тензоре проводимости в сильных магнитных полях получены в [4].

Вывод: При $n = 2, k = 1, 2$ доказана своеобразная “целочисленная” топологическая полная интегрируемость гамильтоновой системы с однозначным гамильтонианом $f(x)$ на T^{n+k} , где скобка Пуассона — постоянная ранга 2, с аннигиляторами $\{\ell'_1 = b_1, \dots, \ell'_k = b_k\}$. Для 1-форм $[df] \neq 0$ в $H^1(T^{n+k}, \mathbb{R})$ ситуация тривиальна и неинтересна.

Теоремы доказаны для всюду плотной открытой области направлений $l'_j \in V_j \subset S^{n+k-1}$, $j = 1, \dots, k$, $k = 2$, $n = 2$. Верны ли теоремы 1, 2 для множества полной меры? При $k \geq 3$ последнее утверждение заведомо неверно, хотя для малой окрестности рациональных точек аналог возможен.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТАКОВА. Выбираем a так, что форма dx^4 морсовская на M_a^3 . На любом неособом слое $x^4 = c$ двумерное направление $\ell_1 \cap \ell'_2$ удовлетворяет условиям [2] на T_c^3 , для поверхности Ферми $M_{ac}^2 \{f = a, x^4 = c\}$. Траектории либо компактны (замкнуты в $\mathbb{R}_c^3$), либо открыты и лежат в ручке рода $g = 1$ на поверхности с компактной сепаратрисной границей. Запониw эту границу диском D_c^2 в плоскости $\ell_1 \cap \ell'_2 \subset \mathbb{R}_c^3$, мы имеем замкнутый тор $T_c^2 \subset T_c^3$, класс гомологий которого $(\pm Z_{a,c}) \in H_2(T_c^3, \mathbb{Z})$ отличен от нуля, локально стабилен и не зависит от траектории. Меняя параметр c мы встречаем следующие виды бифуркаций общего положения (и обратные к ним):

- а) Два тора $T_{c,1}^2$ и $T_{c,2}^2$ сливаются, – тор поворачивает обратно, оставляя “хвост” из компактных траекторий. Это происходит в некритической точке c .
- б) Один тор T_c^2 подходит к критической точке индекса 2 при $c = c_0$ функции x^4 на $M_a^3 \subset T^4$.

Случай а) полностью аналогичен подходу изнутри к границе зоны устойчивости (см. [3; с. 25]): Путь общего положения проходит точку границы и попадает в область компактных траекторий. Этот аргумент без изменений работает и в нашем случае. В случае б) на уровнях $c_0 - \varepsilon$ есть 1-циклы и на торе $T_{c_0-\varepsilon}^2$, сжимающийся в точку при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если $[u_\varepsilon] \neq 0$ в $H_1(T_{c_0-\varepsilon}^2)$, то после перестройки тор $T_{c_0-\varepsilon}^2$ переходит в сферу $S_{c_0+\varepsilon}^2$. Но этого не может быть, так как $[T_{c_0-\varepsilon}^2] \neq 0$ в $H_2(T_c^3)$. Поэтому u_ε гомотопна нулю на торе $T_{c_0-\varepsilon}^2$. На уровне $c_0 + \varepsilon$ образуется пара $T_{c_0+\varepsilon}^2 \cup S_{c_0+\varepsilon}^2$, причем сфера покрыта компактными орбитами. Возмутим теперь направление ℓ_1 ; ввиду устойчивости, эти “хвосты” и для $\ell'_1 \cap \ell'_2$ покрыты компактными траекториями. Движение тора T_c^2 замечает после отсекаания компактных орбит тор $T^3 \subset T^4$. Из этого вытекают теоремы 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С. П. // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49. [2] Зорич А. В. // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 161–162. [3] Дынников И. А. // УМН. 1999. Т. 54. № 1. С. 21–60. [4] Новиков С. П., Мальцев А. Я. // УФН. 1998. Т. 168. № 3. С. 249–258.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН;
University of Maryland
E-mail: novikov@ipst.umd.edu

Принято редколлегией
23.08.1999