Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Объем многогранника Ньютона дискриминанта, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm213>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:47:03

ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКА НЬЮТОНА ДИСКРИМИНАНТА

С. Ю. ОРЕВКОВ

1. Формулировка результата. Пусть $D_n = D_n(x_0, \dots, x_n)$ – дискриминант, т.е. многочлен от $x_0, \dots, x_n$, обращающийся в ноль тогда и только тогда, когда многочлен $\sum_{k=0}^n x_k t^k$ имеет кратный корень. Пример: $D_2(a, b, c) = b^2 - 4ac$.

Многогранником Ньютона $\Delta(f)$ многочлена $f = \sum a_u x_1^{u_1} \dots x_N^{u_N}$, где $u = (u_1, \dots, u_N)$, называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^N$ множества $\{u \in \mathbb{Z}^N \mid a_u \neq 0\}$. Если $V \in \mathbb{R}^N$ – аффинная k -мерная плоскость такая, что ранг решетки $V \cap \mathbb{Z}^N$ равен k , то k -мерный объем vol_k на плоскости V будем нормировать так, чтобы объем фундаментального параллелепипеда решетки был равен единице.

Обозначим $\Delta(D_n)$ через Q_n . В силу очевидных однородности и квазиоднородности дискриминанта, Q_n лежит в $(n-1)$ -мерной плоскости

$$(1) \quad u_0 + \dots + u_n = 2(n-1), \quad u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n = n(n-1).$$

ТЕОРЕМА 1. $\text{vol}_{n-1} Q_n = 2^{n-1} n^{n-2} / n!$.

ТЕОРЕМА 2. $\text{vol}_{n-2} \Delta(\overline{D}_n) = (n+6) 2^{n-3} n^{n-5} / (n-2)!$ при $n \geq 3$, где $\overline{D}_n(y_0, \dots, y_{n-2})$ – дискриминант многочлена $t^n + y_{n-2}t^{n-2} + \dots + y_0$.

Пусть $A \subset \mathbb{Z}^d$ – множество из n точек, P_A – его выпуклая оболочка, $\dim P_A = d$. Следуя [1], обозначим через $\mathbf{C}^A$ пространство многочленов Лорана вида $\sum_{a \in A} x_a t^a$, где $t = (t_1, \dots, t_d)$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $t^a = t_1^{a_1} \dots t_d^{a_d}$, и определим дискриминант D_A как многочлен от n переменных $(x_a)_{a \in A}$ такой, что уравнение $D_A = 0$ задает гиперповерхность в $\mathbf{C}^A$, являющуюся замыканием множества всех многочленов f , для которых гиперповерхность $\{f = 0\}$ имеет особенность в торе $(\mathbf{C} \setminus 0)^d$. Соответственно, дискриминант E_A задает замыкание множества многочленов, имеющих вырожденное ограничение хотя бы на одну из граней P_A (подробности см. в [1]). Пусть $N = n - d - 1 = \dim \Delta(D_A) = \dim \Delta(E_A)$.

ТЕОРЕМА 3. $\text{vol}_N \Delta(E_A) > (\prod_{k=1}^d (k+1)^{i_k}) (N-c)! / N!$, где $c = i_0 - d - 1$ и i_k – число точек из A , являющихся внутренними точками k -мерных граней многогранника P_A .

СЛЕДСТВИЕ. Для любого d существуют $C_0(d), C_1(d) > 0$ такие, что $\log \text{vol} Q_{d,m} \geq C_0(d) + C_1(d)m^d$, где $Q_{d,m} = \Delta(D_A)$ для $A = \{a \in \mathbb{Z}^d \mid a_i \geq 0, \sum a_i \leq m\}$.

Это дает отрицательный ответ на вопрос Е.И. Шустина о том, существуют ли константы $B_0(d), B_1(d)$ такие, что $\log(N! \text{vol} Q_{d,m}) \leq B_0(d) + B_1(d)m^d$, где $N = C_{n+d}^d - d - 1 = \dim Q_{d,m}$. Положительный ответ давал бы ожидаемую верхнюю асимптотическую оценку числа жестких изотопических типов проективных вещественных гиперповерхностей степени m при $m \rightarrow \infty$ (того же порядка, что и нижняя оценка, вытекающая из построений методом Виро).

2. Обозначения. Для $k \in \mathbb{Z}$ положим $\overline{k} = \{1, \dots, k\}$ ($\overline{0} = \emptyset$). Через S_n обозначим симметрическую группу: $S_n = \{\sigma: \overline{n} \rightarrow \overline{n} \mid \sigma(\overline{n}) = \overline{n}\}$, через $\pi_n: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ – проекцию $(u_0, \dots, u_n) \mapsto (u_1, \dots, u_{n-1})$. Для конечного множества α обозначим через $\#\alpha$ его мощность и положим $C_\alpha^k = \{\beta \subset \alpha \mid \#\beta = k\}$ (тогда $\#C_\alpha^k = C_{\#\alpha}^k$ – биномиальный коэффициент). Для $\alpha \subset \mathbb{Z}$ обозначим через $\mu_\alpha: \{1, \dots, \#\alpha\} \rightarrow \alpha$ биекцию такую, что $\mu_\alpha(1) < \mu_\alpha(2) < \dots$. Буква m всегда будет обозначать $n-1$.

3. Q_n как вторичный многогранник. Согласно результату Гельфанда–Зелевинского–Капранова [1], Q_n комбинаторно эквивалентен m -кубу (напомним, что $m = n-1$), и его вершинами являются точки $\{q_\alpha\}_{\alpha \in \overline{m}}$, где координаты $(q_0^\alpha, \dots, q_N^\alpha)$ точки q_α определяются следующим образом. Если $\alpha = \{k_1, \dots, k_a\}$, $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_a < k_{a+1} = n$, $k_{-1} = 1$, $k_{a+2} = n-1$, то $q_k^\alpha = k_{i+1} - k_{i-1}$ при $k = k_i \in \alpha \cup \{0, n\}$, $q_k^\alpha = 0$ при $k \notin \alpha \cup \{0, n\}$.

4. Триангуляция перекошенного куба. Пусть $p_\alpha = (p_1^\alpha, \dots, p_N^\alpha)$ – точки в $\mathbb{R}^N$, индексированные подмножествами $\alpha \subset \overline{N}$, такие, что $p_i^\alpha > 0$ при $i \in \alpha$, $p_i^\alpha = 0$ при $i \notin \alpha$. Для $\sigma \in S_N$ обозначим через s_σ симплекс, натянутый на точки $p_{\sigma(\overline{k})}$, $k = 0, \dots, N$.

ЛЕММА 1. а) $\{s_\sigma\}_{\sigma \in S_N}$ – триангуляция некоторого (необязательно выпуклого) многогранника P , гомеоморфного кубу (значит, $\text{vol } P = \sum \text{vol } s_\sigma$).

б) Если выпуклая оболочка P' точек p_α комбинаторно эквивалентна кубу (т.е. для любого i все точки $\{p_\alpha\}_{i \in \alpha}$ лежат на одной $(N-1)$ -мерной грани многогранника P'), то $P' = P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проектируя из $p_{\overline{N}}$, зададим P индуктивно как объединение конусов над пересечениями с координатными гиперплоскостями.

Пример: если P – куб, то $s_\sigma = \{(x_1, \dots, x_N) \in P \mid x_{\sigma(1)} \geq x_{\sigma(2)} \geq \dots \geq x_{\sigma(N)}\}$.

5. Рекуррентное соотношение. Пусть $\{s_\sigma\}_{\sigma \in S_m}$ – триангуляция Q_n из п. 4.

ЛЕММА 2. $\text{vol } \pi_n(s_\sigma) = (\prod_{k=1}^{n-1} q_{\sigma(k)}^{\sigma(\overline{k})}) / (n-1)!$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\pi_n(q_{\sigma(\overline{0})}) = \pi_n(q_\emptyset) = 0$. Поэтому $m! \text{vol } \pi_n(s_\sigma) = |\det A_\sigma|$, где A_σ – матрица, составленная из векторов $\{q_{\sigma(k)}^{\sigma(\overline{k})}\}_{k \in \overline{m}}$, записанных по столбцам. Остается заметить, что в $\sigma(k)$ -й строке на k -м месте стоит $q_{\sigma(k)}^{\sigma(\overline{k})}$, а слева от него нули.

ЛЕММА 3. $v_n = n \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} v_k v_{n-k}$, где $v_1 = 1$, $v_n = (n-1)! \text{vol } \pi_n(Q_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из лемм 1 и 2, если $\sum_{\sigma \in S_m}$ представить в виде $\sum_{k \in \overline{m}} \sum_{\sigma \in S_m^k}$, где $S_m^k = \{\sigma \mid \sigma(1) = k\}$, а затем внутреннюю сумму заменить на трехкратную сумму, отвечающую биекции $C_{\overline{m} \setminus \{1\}}^{k-1} \times S_{k-1} \times S_{m-k} \rightarrow S_m^k$, $(\alpha, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma$, где $\sigma(1) = k$, $\sigma(i) = \mu_\alpha(\sigma(i))$ при $i < k$, $\sigma(i) = \mu_{\overline{m} \setminus (\alpha \cup \{k\})}(\sigma_2(i-k))$ при $i > k$.

6. Тождество. Биномиальное тождество Абеля можно записать в таком виде [2; п. 1.2.7]: $\alpha\beta \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+k)^{k-1} (\beta+n-k)^{n-k-1} = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta+n)^{n-1}$. Подставляя $\beta = -\alpha$, деля на α^2 и переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k^{k-1} (n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

7. Доказательство теорем. Из (2) и леммы 3 индукцией получаем $v_n = 2^{n-1} n^{n-2}$. Пусть V – плоскость, заданная уравнениями (1). Разрешая (1) относительно u_0 , u_1 , получаем биекцию $j_n: \mathbb{Z}^{n-1} \rightarrow V \cap \mathbb{Z}^{n+1}$, причем $|\det(j_n \pi_n)| = n$, поэтому $n \text{vol } Q_n = \text{vol } \pi_n(Q_n) = v_n / (n-1)!$. Теорема 1 доказана. Теорема 2 доказывается аналогично: пользуясь рекуррентным соотношением $\overline{v}_n = n \sum_{k=2}^{n-1} C_{n-3}^{k-2} \overline{v}_k v_{n-k}$, находим $\overline{v}_n = (n+6) 2^{n-3} n^{n-4}$, где $\overline{v}_n / (n-2)!$ – объем проекции $\Delta(\overline{D}_n)$ на плоскость $y_n = 0$.

Теорема 3 вытекает из леммы 1 а). Согласно [1], $\Delta(E_A)$ является выпуклой оболочкой точек в $\mathbb{R}^A$, соответствующих триангуляциям многогранника P_A . Пусть V – множество вершин P_A ($i_0 = \#V$). Для каждого $\alpha \subset A \setminus V$ возьмем любую триангуляцию, для которой $\alpha \cup V$ является множеством вершин. Соответствующие им точки $\{q_\alpha\} \subset \mathbb{R}^A$ лежат на M -мерной плоскости ($M = N - c = \#A \setminus V$) и удовлетворяют условиям леммы 1 а). Поэтому на них можно натянуть $M!$ симплексов, объем каждого из которых $\geq \prod (k+1)^{i_k} / M!$ (это следует из описания Q_A , приведенного в [1] и леммы 2). Точки $\{q_\alpha\}$ лежат на M -мерном сечении Q_A ($\dim Q_A = N$), и это дает $M! / N!$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinskii A. V. Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994. [2] Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990.