Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Панкратьев, О бесконечных периодических фактор-группах гиперболических произведений, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:24:07

О БЕСКОНЕЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФАКТОР-ГРУППАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

А. Е. ПАНКРАТЬЕВ

Гиперболические группы были введены М. Громовым [1]. В работе [2] понятие гиперболическости обобщено на свободные произведения следующим образом.

Пусть $F = *_i G_i$ – свободное произведение конечного числа групп $G_i, i \in I$, и $H = \langle F \mid \mathcal{R} \rangle$ – некоторая фактор-группа группы F . Любое слово $w =_H 1$ представимо [3] в группе F в виде

$$(1) \quad w = \prod_{i=1}^{l_w} u_i r_i^{\varepsilon_i} u_i^{-1}, \quad r_i \in \mathcal{R}, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа H называется *гиперболическим произведением групп* $G_i, i \in I$, если $\max_{|w|=n} \min l_w \leq cn$ для некоторой константы c (минимум берется по всем возможным представлениям (1)). Здесь и далее длина слова (или элемента) $|w|$ понимается в смысле слоговой метрики, т.е. метрики свободного произведения [3].

Под *гиперболическими множителями* будем понимать подгруппы, являющиеся образами свободных множителей G_i при естественном гомоморфизме $F \rightarrow H$. Элемент гиперболического произведения, имеющий бесконечный порядок и не сопряженный с элементами гиперболических множителей, будем называть *свободным*.

Рассмотрим последовательность степеней произвольного свободного элемента $x \in H$ и обозначим через $\bar{x}_n$ кратчайший элемент в классе сопряженности $(x^n)^H$. Скажем, что гиперболическое произведение $H = \langle F \mid \mathcal{R} \rangle$ является *невыврожденным*, если в нем содержится по крайней мере один свободный элемент и для любого свободного элемента $x \in H$ длины элементов $\bar{x}_n$ не ограничены сверху при $n \rightarrow \infty$.

Граф Кэли $\mathcal{C}(H)$ строится над произведением $H = \langle F \mid \mathcal{R} \rangle$ как над группой с системой образующих $\mathcal{A}$, состоящей из всех элементов множителей: $\mathcal{A} = \bigcup_i G_i$.

ЛЕММА 1. Для любого слова W , представляющего (в слоговом алфавите) свободный элемент невыврожденного произведения H , существуют константы $\lambda_W > 0$ и $c_W \geq 0$ такие, что для любого t путь с меткой W^t является (λ_W, c_W) -квазигеодезическим в графе $\mathcal{C}(H)$.

ЛЕММА 2. Существует константа $d = d(H)$ такая, что любой класс сопряженности элементов конечного порядка невыврожденного гиперболического произведения H содержит элемент длины не больше d .

Подгруппу L гиперболического произведения $H = \langle F \mid \mathcal{R} \rangle$ назовем *элементарной*, если она является конечным расширением циклической группы $(\exists g \in L: |L : \langle g \rangle| < \infty)$.

Зафиксируем свободный элемент $g \in H$. *Элементаризатором элемента g* назовем множество $E(g)$ элементов группы H , сопряжение которыми сохраняет (или обращает) некоторую степень элемента g : $E(g) = \{x \in H \mid \exists n = n(x): xg^n x^{-1} = g^{\pm n}\}$. Легко видеть, что $E(g)$ является подгруппой в H , причем $E(g) \supset C_H(g) \supset \langle g \rangle$.

ЛЕММА 3. Пусть g – свободный элемент невыврожденного гиперболического произведения H . Тогда циклическая подгруппа $\langle g \rangle$ имеет конечный индекс в элементаризаторе $E(g)$.

Следующие утверждения обобщают результаты работы [4] на гиперболические произведения.

Пусть E_0 – максимальная элементарная подгруппа неэлементарного невыврожденного гиперболического произведения H , C – бесконечная циклическая нормальная подгруппа E_0 и M – некоторое подмножество элементов группы H , длины которых ограничены в совокупности.

ТЕОРЕМА. Во введенных обозначениях существует целое $m_0 = m_0(H, E_0, M)$ такое, что для любого $m \geq m_0$ существует фактор-группа H_1 группы H со следующими свойствами:

- (1) H_1 является неэлементарным невырожденным гиперболическим произведением;
- (2) естественный гомоморфизм $\varepsilon_1: H \rightarrow H_1$ инъективен на M ;
- (3) образ $\varepsilon_1(E_0)$ изоморфен фактор-группе E_0/C^m ;
- (4) любой элемент конечного порядка в H_1 является образом элемента конечного порядка в H или сопряжен с элементом из $\varepsilon_1(E_0)$;
- (5) $\text{Ker } \varepsilon_1$ не имеет кручения.

Фактор-группу свободного произведения групп назовем *слогово-периодической*, если любой элемент, имеющий в ней бесконечный порядок, принадлежит одному из свободных множителей. Если фактор-группа свободного произведения содержит бесконечное число элементов, не сопряженных с элементами свободных множителей, то будем называть ее *слогово-бесконечной*.

СЛЕДСТВИЕ. Любое неэлементарное невырожденное гиперболическое произведение H обладает *слогово-бесконечной* *слогово-периодической* фактор-группой H_1 .

В частности, для случая конечных (или периодических) гиперболических множителей мы получаем разнообразные примеры конечно-порожденных бесконечных периодических фактор-групп.

Автор выражает глубокую благодарность А.Ю. Ольшанскому за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gromov M. // Math. Sci. Res. Inst. Publ. 1987. V. 8. P. 75–263. [2] Панкратьев А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1999. №2. С. 9–13. [3] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. [4] Ol'shanskii A. Yu. // Internat. J. Algebra Comput. 1993. V. 3. №4. P. 365–409.

Принято редколлегией
23.08.1999