Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Е. Панов, Комбинаторные формулы для χ_y -рода полиориентированного квазиторического многообразия, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm215>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:31:49

**КОМБИНАТОРНЫЕ ФОРМУЛЫ
ДЛЯ χ_y -РОДА ПОЛИОРИЕНТИРОВАННОГО
КВАЗИТОРИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ**

Т. Е. ПАНОВ

Многообразия, введенные в [1], которые мы далее, следуя [2], [3], будем называть *квазиторическими*, представляют собой гладкие многообразия с действием компактного тора, для которых пространство орбит несет комбинаторную структуру простого многогранника. По своим топологическим и комбинаторным свойствам квазиторические многообразия аналогичны неособым алгебраическим *торическим многообразиям* [4], что и объясняет название. Квазиторические многообразия охватывают широкий класс многообразий (например, каждый класс комплексных кобордизмов содержит квазиторическое многообразие [5]). В [2], [6] квазиторические многообразия изучались в общем контексте “многообразий, определяемых простыми многогранниками”.

Выпуклый n -мерный многогранник P^n называется *простым*, если в каждой его вершине сходится n граней коразмерности 1 (или *гиперграней*). Простой многогранник P^n является n -мерным *многообразием с углами*. Пусть M^{2n} – компактное $2n$ -мерное многообразие с действием тора $T^n = \{(e^{2\pi i \varphi_1}, \dots, e^{2\pi i \varphi_n}) \in \mathbb{C}^n\}$, $\varphi_i \in \mathbb{R}$. M^{2n} называется *квазиторическим многообразием*, если действие T^n локально изоморфно стандартному диагональному действию T^n на $\mathbb{C}^n$, а пространство орбит диффеоморфно (как многообразие с углами) некоторому простому многограннику P^n (подробности см. в [1]).

Пусть M^{2n} – квазиторическое многообразие над P^n и $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ – множество гиперграней P^n , $m = \#\mathcal{F}$. Внутренность гиперграней F_i состоит из орбит с одномерным стабилизатором $G_{F_i} = \{(e^{2\pi i \lambda_{1i} \varphi}, \dots, e^{2\pi i \lambda_{ni} \varphi}) \in T^n\}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Таким образом определена *характеристическая функция* $\lambda: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}^n$, переводящая гипергрань F_i в вектор $\lambda_i = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni})^\top \in \mathbb{Z}^n$, определенный с точностью до знака, и $(n \times m)$ -матрица Λ со столбцами $\lambda(F_i)$. Каждая вершина p многогранника P^n есть пересечение n гиперграней: $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$. Пусть $\Lambda_{(p)} = \Lambda_{(i_1, \dots, i_n)}$ – минор Λ , образованный столбцами $i_1, \dots, i_n$. Тогда $\det \Lambda_{(p)} = \det(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) = \pm 1$. Векторы $\lambda_i = \lambda(F_i)$ будем называть *векторами гиперграней*.

При фиксированной ориентации тора T^n ориентация многообразия M^{2n} задается ориентацией P^n . Прообраз $\pi^{-1}(F_i)$ грани F_i при проекции $\pi: M^{2n} \rightarrow P^n$ на пространство орбит есть подмногообразие $M_i \subset M^{2n}$ коразмерности 2. Выбор знака вектора $\lambda(F_i)$ эквивалентен выбору ориентации (или комплексной структуры) в нормальном расслоении $\nu_i := \nu(M_i \subset M^{2n})$. Ориентация ν_i , в свою очередь, определяется однозначно, если ориентированы M^{2n} и M_i . Ориентированное квазиторическое многообразие M^{2n} с фиксированными ориентациями подмногообразий $M_i = \pi^{-1}(F_i)$ было названо в [3] *полиориентированным*. Ориентированное подмногообразие $M_i \subset M^{2n}$ коразмерности 2 задает комплексное одномерное расслоение σ_i над M^{2n} , которое ограничивается на ν_i над M_i . Следующая теорема, доказанная в [3], позволяет ввести на полиориентированном квазиторическом многообразии стабильно комплексную структуру.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место изоморфизм вещественных ориентированных $2t$ -расслоений: $\tau(M^{2n}) \oplus \mathbb{R}^{2(m-n)} \simeq \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_m$, где $\tau(M^{2n})$ – касательное расслоение, а $\mathbb{R}^{2(m-n)}$ – тривиальное $2(m-n)$ -расслоение над M^{2n} .*

Таким образом, ориентированный простой многогранник P^n и характеристическая матрица Λ не только определяют квазиторическое многообразие, но также выделяют его класс в кольце комплексных кобордизмов Ω_U .

Внутренность каждого ребра E_j (одномерной грани P^n) состоит из орбит с $(n-1)$ -мерным стабилизатором $G_{E_j} = \{(e^{2\pi i \varphi_1}, \dots, e^{2\pi i \varphi_n}) \in T^n : \mu_{1j} \varphi_1 + \dots + \mu_{nj} \varphi_n = 0\}$, определяемым примитивным (ко)вектором $\mu_j = (\mu_{1j}, \dots, \mu_{nj})^\top$. Мы назовем μ_j *вектором ребра E_j* ; он определен лишь с точностью до знака. Если $E_{j_1}, \dots, E_{j_n}$ – ребра, сходящиеся в одной вершине p , и $M_{(p)}$ – матрица со столбцами $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$, то $\det M_{(p)} = \det(\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}) = \pm 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00090).

Следующая лемма позволяет канонически “локально” выбирать знаки векторов ребер полиориентированного квазиторического многообразия.

ЛЕММА 2. *Знаки векторов ребер $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_n}$, сходящихся в вершине p многогранника P^n , можно выбрать так, что $M_{(p)}^T \cdot \Lambda_{(p)} = E$ (единичная матрица).*

Ориентация P^n определяет согласованный порядок ребер в каждой вершине, который в свою очередь фиксирует порядок векторов ребер в этой вершине.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Припишем вершине $p \in P^n$ знак $\sigma(p)$ по формуле $\sigma(p) = \det M_{(p)} = \det(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n})$, где $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_n}$ – векторы ребер, сходящихся в p .

ТЕОРЕМА 4. *Каждый примитивный вектор $\nu \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $\langle \mu_i, \nu \rangle \neq 0$ для всех векторов ребер μ_i , задает S^1 -действие на M^{2n} с изолированными неподвижными точками, соответствующими вершинам многогранника P^n . В касательном пространстве $T_p M^{2n}$ в неподвижной точке, соответствующей вершине $p = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, это действие индуцирует представление S^1 с весами $\langle \mu_{i_1}, \nu \rangle, \dots, \langle \mu_{i_n}, \nu \rangle$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для S^1 -действия на M^{2n} , определяемого вектором ν , введем индекс вершины $p = F_{i_1}^{n-1} \cap \dots \cap F_{i_n}^{n-1}$ по формуле $\text{ind}_\nu(p) = \{\#k : \langle \mu_{i_k}, \nu \rangle < 0\}$.

Применяя формулу Атьи–Хирцебруха [7] для χ_y -рода к S^1 -действию на M^{2n} , задаваемому теоремой 4, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть M^{2n} – полиориентированное квазиторическое многообразие и ν – вектор, описанный в теореме 4. Тогда $\chi_y(M^{2n}) = \sum_{p \in P^n} (-y)^{\text{ind}_\nu(p)} \sigma(p)$, где сумма берется по всем вершинам многогранника P^n .*

Частными случаями χ_y -рода являются n -е число Чженя $c_n[M^{2n}]$ ($y = -1$), сигнатура ($y = 1$) и род Тодда ($y = 0$). Для n -го числа Чженя теорема 6 дает $c_n[M^{2n}] = \sum_{p \in P^n} \sigma(p)$. В случае комплексного M^{2n} (например, если M^{2n} является торическим многообразием) мы имеем $\sigma(p) = 1$ для всех вершин $p \in P^n$, а $c_n[M^{2n}]$ равно эйлеровой характеристике $e(M^{2n})$. В общем случае эйлерова характеристика также равна числу вершин P^n , однако это число может отличаться от $c_n[M^{2n}]$.

В случае сигнатуры формулу, получаемую из теоремы 6 можно переписать в виде, который не зависит от стабильно комплексной структуры (т.е. от полиориентации) и определяется лишь ориентацией M^{2n} .

В случае рода Тодда формула из теоремы 6 становится неопределенной. Разрешение этой неопределенности приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 7. *Род Тодда полиориентированного квазиторического многообразия вычисляется как $\text{td}(M^{2n}) = \sum_{p \in P^n : \text{ind}_\nu(p)=0} \sigma(p)$ (сумма берется по всем вершинам индекса 0).*

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за стимулирующие обсуждения и рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Davis M., Januszkiewicz T. // Duke Math. J. 1991. V. 62. №2. P. 417–451. [2] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Труды МИРАН. 1999. Т. 225. С. 96–131. [3] Бухштабер В. М., Рэй Н. Tangential structures on toric manifolds and connected sums of polytopes // Preprint UMIST, Manchester, 1999. [4] Данилов В. И. // УМН. 1978. Т. 33. №2. С. 85–134. [5] Бухштабер В. М., Рай Н. // УМН. 1998. Т. 53. №2. С. 139–140. [6] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // УМН. 1998. Т. 53. №3. С. 195–196. [7] Hirzebruch F., Berger T., Jung R. Manifolds and Modular Forms. Bonn: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1994.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.08.1999