Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Полякова, Дальнейшие свойства категорий P_d и S_d , *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 02:36:55

ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА КАТЕГОРИЙ P_d И S_d

Ю. М. Полякова

Данная работа, являющаяся продолжением работы [1], посвящена более подробному изучению свойств категорий P_d и S_d двумерных d -лог-терминальных пар, где $d \in \mathbb{Q}$, $0 \leq d \leq 1$, а также предельных категорий P_{Lim} и S_{Lim} . Объекты этих категорий обобщают лог-терминальные пары из классической лог-теории (см. [2]). Определения всех используемых в работе понятий можно найти в [1]. Автор выражает благодарность профессору В. А. Исковских за постановку задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть T – предбирациональная категория.

1) Введем множество $\text{Min}(T)$ минимальных объектов категории T как:

$$\text{Min}(T) := \{V \in \text{Ob } T \text{ такие, что не существует } V' \in \text{Ob } T, V \underset{T}{>} V'\}.$$

2) Для $V \in \text{Ob } T$ введем множество $M_T(V)$, минимизаций V в T как:

$$M_T(V) := \{(Y, \pi) \text{ такие, что } Y \in \text{Min}(T), \pi \in \text{Mor } T, \pi: V \rightarrow Y\}.$$

3) Пусть S – некоторая подкатегория в T , $V \in \text{Ob } T$. Введем множество $N_{T,S}(V)$, минимальных разрешений V в S как:

$$N_{T,S}(V) := \text{Min}(B_1(V, S)).$$

4) Пусть категория T бирациональна, $\gamma \in \text{Mor } \tilde{T}$. Введем множество $L_T(\gamma)$ минимальных разрешений в S морфизма γ как:

$$L_T(\gamma) := K_T(\gamma) \cap \text{Min}(B_2(T)).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть T – одна из категорий P , S , P_d , S_d , P_{Lim} , S_{Lim} , S^N или S_d^N . Тогда множество минимизаций любого объекта категории $B_k(\text{Ob } P, T)$ состоит из одного элемента.

СЛЕДСТВИЯ. Пусть T – одна из категорий S , S_d при $d < 1$ или S_{Lim} . Тогда, согласно [1], T бирациональна и справедливы следующие утверждения.

1) Если $\gamma \in \text{Mor } \tilde{T}$, то множество $L_T(\gamma)$ минимальных разрешений γ состоит из одного элемента.

2) Если $(V, C) \in \text{Ob } T$, то множество $N_{T,T^N}(V, C)$ минимальных разрешений (V, C) в T^N , называемое множеством минимальных разрешений особенностей пары (V, C) и обозначаемое далее $N_T(V, C)$ состоит из одного элемента. Если $(V, C) \in \text{Ob } S_d$ ($(V, C) \in \text{Ob } S_{\text{Lim}}$), то $N_{S_d}(V, C) = N_S(V, C)$ ($N_{S_{\text{Lim}}}(V, C) = N_S(V, C)$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть T – одна из категорий S_d при $\frac{5}{6} < d < 1$ или S_{Lim} , и $(V, C) \in \text{Min}(S^N) = \text{Min}(T^N)$ (согласно [1], категории S^N и T^N совпадают). Тогда множество $M_T(V, C)$ состоит из одного элемента $((Y, C^Y), \varphi)$ и $N_T(Y, C^Y) = ((V, C), \varphi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть T – бирациональная категория. Введем категорию $\tilde{T}^M$, как полную подкатегорию в $\tilde{T}$, определяемую условием: $\text{Ob } \tilde{T}^M = \text{Min}(T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть T – одна из категорий S , S_d при $d < 1$ или S_{Lim} .

1) Согласно следствию 2) теоремы 1, можно ввести *функторы разрешения особенностей* $N'_T: T \rightarrow S^N \sim T^N$ и $\tilde{N}'_T: \tilde{T} \rightarrow \tilde{S}^N \sim \tilde{T}^N$.

Пусть $(V, C) \in \text{Ob } T = \text{Ob } \tilde{T}$ и $\{(W, C^W), \varphi\} = N_T(V, C)$. Положим:

$$N'_T(V, C) := (W, C^W), \\ \tilde{N}'_T(V, C) := (W, C^W).$$

Тогда на морфизмах категорий T и $\tilde{T}$ функторы N'_T и $\tilde{N}'_T$ будут определяться естественным образом. Доказательства корректности этих определений очевидны.

2) Согласно теореме 2, можно ввести *функтор минимизации* $\tilde{M}'_T: \tilde{S}^{NM} \rightarrow \tilde{T}^M$.

Пусть $(V, C) \in \text{Ob } \tilde{S}^{NM}$ и $M_T(V, C) = \{(Y, C^Y), \varphi\}$. Положим:

$$\tilde{M}'_T(V, C) := (Y, C^Y)$$

Тогда определение функтора $\tilde{M}'_T$ на морфизмах $\tilde{T}$ и проверка корректности определения, как и выше, естественны и не составляют труда.

ТЕОРЕМА 3. Функторы N'_T и $\tilde{N}'_T$ являются полными. Функтор $\tilde{M}'_T$ является строгим и полным и задает вложение категории $\tilde{S}^{NM}$ в $\tilde{T}^M$ в качестве полной подкатегории $\tilde{T}_N^M \sim \tilde{S}^{NM}$. Ограничение $\tilde{N}'_T$ на $\tilde{T}_N^M$ является функтором, обратным к $\tilde{M}'_T$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко проверяется, что категория $\tilde{T}_N^M$ не совпадает с $\tilde{T}^M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть T – предбирациональная категория, Θ, Ω – некоторые подмножества в $\text{Ob } T$ такие, что $\Theta \subset \Omega$. Тогда *подмножество Θ называется замкнутым в Ω* , если любой элемент V из Ω , для которого существует $(W, \varphi, \varphi') \in \text{Min}(B_2(\Theta, T))$ с $W \underset{T}{\geq} V$, обязан принадлежать Θ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть Θ – некоторое подмножество в $\text{Min}(S^N)$, T – одна из категорий S_d при $\frac{5}{6} < d < 1$ или S_{Lim} . Тогда Θ замкнуто в $\text{Min}(S^N)$ тогда и только тогда, когда подмножество $M'_T(\Theta)$ замкнуто в $\text{Min}(T)$. В частности, множество $\text{Ob } \tilde{T}_N^M$ замкнуто в $\text{Min}(T)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Полякова Ю. М. // УМН. 1999. Т. 54. № 4. С. 177–178. [2] Kavamata Y., Matsuda K., Masuki K. // Adv. Stud. Pure Math., Alg. Geom., Sendai / ed. T. Oda. V. 10, 1985. P. 283–360.