Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Штогрин, Неизгибаемость квадрильяжа кренделя, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:00:14

НЕИЗГИБАЕМОСТЬ КВАДРИЛЬЯЖА КРЕНДЕЛЯ

М. И. ШТОГРИН

Основные понятия и определения, использованные ниже, даны в работах [1], [2], в которых была доказана решеточность и неизгибаемость квадрильяжа $\mathbb{Q}^2$, гомеоморфного сфере или тору, квадрильяжно отображенного в $\mathbb{R}^3$ с погружением реберного остова квадрильяжа $\mathbb{Q}^2$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbb{Q}^2$ – произвольный квадрильяж кренделя. Тогда любое квадрильяжное отображение $f: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, при котором реберный остов $\mathbb{Q}^2$ погружен в $\mathbb{R}^3$, решеточно.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы образ квадрильяжа кренделя $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^3$ неизгибает.

В работе [2] определен граф стыковки, разбивающий поверхность квадрильяжа $\mathbb{Q}^2$ на связанные компоненты, называемые *гранями*. Каждая грань принадлежит своей кубической решетке и имеет не менее 4 сторон. В каждой вершине сходятся не менее 4 граней. Для разбиения поверхности на эти грани по формуле Эйлера имеем неравенство $4\chi \leq -N$, где

$$N = \sum (q-4)v_q + \sum (n-4)z_n.$$

Так как на продолжении каждого ребра графа стыковки имеется вершина валентности не менее 5, а все выходящие из нее ребра графа стыковки разно направлены (в силу погружения реберного остова $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^3$), то $N \geq (5-4)6 = 6$. Для сферы или тора этой оценки более чем достаточно, см. [2]. Для кренделя ниже будет дана более сильная оценка $N \geq 9$.

ЛЕММА. Пусть в точке O сходятся пять разно направленных отрезков, записанных в циклической последовательности. Пусть плоский угол между любыми двумя соседними отрезками последовательности равен $\pi/2$. И пусть двугранный угол между любыми двумя смежными по общей стороне прямоугольниками, построенными на соседних отрезках, не равен $\pi/2$. Тогда вершина любого прямоугольника, противоположная вершине O , не совпадает с концом любого из данных пяти отрезков.

Введем обозначения: (OA, OB, OC, OD, OE) – циклическая последовательность отрезков, удовлетворяющих условиям леммы, M – вершина построенного на отрезках OA и OB прямоугольника, противоположная вершине O . Так как отрезки разно направлены, то их концы лежат в разных точках пространства. Точка M не совпадает с O, A, B , как четвертая вершина прямоугольника $OAMB$. Ребро OC прямоугольника, смежного с $OAMB$ по стороне OB , перпендикулярно OB , и поэтому M не совпадает с C . Аналогично, M не совпадает с E . Предположим, что M совпадает с D . Тогда OM совпадает с OD и ввиду $OC \perp OD$ получим $OC \perp OM$. Но $OC \perp OB$, поэтому OC перпендикулярно плоскости треугольника $\triangle OBM$, в которой лежит OA . Поэтому $OC \perp OA$. Двугранный угол между прямоугольниками, смежными по стороне OB , измеряется плоским углом $\widehat{AOC}$, равным $\pi/2$. Это противоречит условию леммы. Следовательно, M не может совпадать с D . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вершины M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 фигурирующих в лемме прямоугольников, противоположные O , расположены по меньшей мере в 3 различных точках пространства.

В самом деле, вершины M_i и M_j смежных по стороне двух прямоугольников не совпадают, так как иначе две их стороны, перпендикулярные общей стороне, оказались бы одинаково направленными, что противоречило бы условиям леммы. Так как среди любых 3 из данных 5 прямоугольников всегда найдутся 2 прямоугольника, смежные по общей стороне, то никакие 3 из 5 точек M_k не могут находиться в одной и той же точке пространства. Ввиду этого в одной точке пространства может находиться не более 2 из 5 точек M_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Справедливость леммы не нарушится, если в формулировке леммы вместо пяти разно направленных отрезков взять шесть.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00010).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathbb{Q}^2$ – квадрильяж двумерной поверхности произвольного рода. Пусть при квадрильяжном отображении $f: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ реберный остов $\mathbb{Q}^2$ погружен в $\mathbb{R}^3$. И пусть граф стыковки не пуст. Тогда $N \geq 9$.

1. Пусть $\vartheta_q \geq 1$ при некотором $q \geq 7$. Тогда на продолжении каждого ребра в связке из q ребер есть вершина валентности (степени) не менее 5. Поэтому $N \geq (5-4)7 + (7-4)1 = 10$.

2. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 7$, $\vartheta_6 \geq 2$. Тогда $\vartheta_5 \neq 0$ и $N \geq (5-4)5 + (6-4)2 = 9$.

3. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 7$, $\vartheta_6 = 1$, $z_n \geq 1$ при некотором $n \geq 5$. Тогда $\vartheta_5 \neq 0$ и $N \geq (5-4)6 + (6-4)1 + (5-4)1 = 9$.

4. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 7$, $\vartheta_6 = 1$, $z_n = 0$ при всех $n \geq 5$. Тогда каждая грань ограничена прямоугольником и $\vartheta_4 = 0$ (иначе у двух граней угол при 4-валентной вершине равнялся бы π , у них число сторон превысило бы 4, что противоречило бы предположению). Следовательно, все вершины лишь 6- и 5-валентные. Связка из 6 ребер графа стыковки удовлетворяет лемме, с учетом замечания 2. Поэтому $N \geq (5-4)7 + (6-4)1 = 9$.

5. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 6$, $z_n \geq 1$ при некотором $n \geq 7$. Тогда $\vartheta_5 \neq 0$ и $N \geq (5-4)6 + (7-4)1 = 9$.

6. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 6$, $z_n = 0$ при всех $n \geq 7$, $z_6 \geq 2$. Тогда $\vartheta_5 \neq 0$ и $N \geq (5-4)6 + (6-4)2 = 10$.

7. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 6$, $z_n = 0$ при всех $n \geq 7$, $z_6 = 1$ и $z_5 \geq 1$. Тогда $\vartheta_5 \neq 0$ и $N \geq (5-4)6 + (5-4)1 + (6-4)1 = 9$.

8. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 6$, $z_n = 0$ при всех $n \geq 7$, $z_6 = 1$ и $z_5 = 0$. Тогда $\vartheta_4 = 0$ (иначе у двух граней угол при 4-валентной вершине был бы равен π , две грани имели бы более четырех сторон, что противоречило бы предположению). Следовательно, все вершины 5-валентные. Возьмем вершину 6-сторонней грани (она лежит в кубической решетке), в которой ее стороны составляют угол $\pi/2$. Связка из пяти ребер с этой вершиной удовлетворяет лемме. В качестве вершины M возьмем вершину одного из четырех прямоугольников, которые лежат на краю своих граней. Получим $N \geq (5-4)7 + (6-4)1 = 9$.

9. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 6$, $z_n = 0$ при всех $n \geq 6$, $\vartheta_4 \geq 2$. Тогда $z_5 \geq 4$ (с каждой 4-валентной вершиной инцидентны по два 5-сторонника), $\vartheta_5 \neq 0$. Поэтому $N \geq (5-4)6 + (5-4)4 = 10$.

10. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 6$, $z_n = 0$ при всех $n \geq 6$, $\vartheta_4 = 1$. Тогда $z_5 = 2$. Кроме $\vartheta_4 = 1$ все остальные вершины 5-валентные. В 4-валентной вершине сходятся два 4-сторонника и два 5-сторонника. Циклическая последовательность радиусов звезды $St O$, направленных вдоль ребер графа стыковки в 4-валентной вершине O , имеет вид $(i, j, -j, -i)$. Эти радиусы разбивают звезду $St O$ на 4 сектора (O, i, j) , $(O, j, -j)$, $(O, -j, -i)$, $(O, -i, i)$. Каждый сектор расположен в своей грани. Один 4-сторонник имеет 5-валентные вершины $xi, yj, xi + yj$. Другой 4-сторонник имеет 5-валентные вершины $-ui, -vj, -ui - vj$. Один из 5-сторонников прибавляет две свои 5-валентные вершины $xi + w(j \cos \gamma + k \sin \gamma)$ и $-ui + w(j \cos \gamma + k \sin \gamma)$. Здесь $x, y, u, v, w \in \mathbb{N}$. Поэтому $N \geq (5-4)8 + (5-4)2 = 10$. Или же $N \geq 9$, как в п. 8.

11. Пусть $\vartheta_q = 0$ при всех $q \geq 6$, $z_n = 0$ при всех $n \geq 6$, $\vartheta_4 = 0$. Тогда $\vartheta_5 \neq 0$, $z_5 = 0$, и в силу замечания 1 имеем $N \geq (5-4)9 = 9$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Так как непустой граф стыковки имеет вершину, в которой сходятся не менее 5 его ребер (т.е. всегда существует $q \geq 5$), то для $q \geq 4$ и $n \geq 4$ в пп. 1–11 перечислены все мыслимые возможности. Поэтому для поверхности любого рода имеет место оценка $N \geq 9$. Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу предложения при $\chi = -2$ соотношение $4\chi \leq -N$ невозможно. Следовательно, при $\chi = -2$ граф стыковки пуст. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долбиллин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. // Докл. АН. 1997. Т. 354. № 4. С. 443–445. [2] Долбиллин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. // УМН. 1999. Т. 54. № 4. С. 167–168.