Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Сидоренко, О формулах регуляризованных следов, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:28:12

О ФОРМУЛАХ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

С. В. Сидоренко

Полученные И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [1] формулы регуляризованных следов для обыкновенных дифференциальных операторов с граничными условиями Штурма–Лиувилля послужили источником разнообразных обобщений. Одно из них связано с получением формул регуляризованных следов для абстрактных линейных операторов и интенсивно развивалось в статьях В. А. Садовниченко и его учеников [2]–[5]. К этому направлению исследований примыкает данная статья.

Пусть H – комплексное гильбертово пространство и задан положительно определенный самосопряженный линейный дискретный оператор

$$T: D(T) \subset H \rightarrow H.$$

Его собственные значения $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ и (учитывающая их кратность) асимптотика

$$(1) \quad \lambda_n = C_0 n^\alpha + O(n^\beta), \quad n \geq 1,$$

где $C_0 > 0$, $\alpha > 1$, $0 \leq \beta \leq \alpha$. Рассматривается также случай асимптотики вида

$$(2) \quad \lambda_n = C_0 n^\alpha + o(n^\alpha).$$

Пусть V – линейный оператор, принадлежащий банахову пространству $L(H)$ линейных ограниченных операторов, действующих в H . Рассмотрим линейный оператор вида

$$T - V: D(T) \subset H \rightarrow H,$$

где оператор T считается невозмущенным оператором, а оператор V – возмущением, которое может быть несамосопряженным оператором.

Представим спектр $\sigma(T)$ оператора T (см., например, [6]) в виде объединения

$$(3) \quad \sigma(T) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$$

взаимно непересекающихся конечных множеств σ_k , $k \geq 1$, причем это разбиение строится по наперед заданным числам $b > 0$, $\rho \geq 1$. А именно, существует последовательность (r_n) неотрицательных чисел со следующими свойствами:

$$(4) \quad \begin{aligned} b n^{\rho\alpha} &\leq r_{2n-1} < r_{2n} \leq b(n+1)^{\rho\alpha}, \quad n \geq 1, \quad r_0 = 0; \\ r_{2n} - r_{2n-1} &\geq C_1 n^{\rho(\alpha-1)} [1 + n^{1-\rho(\alpha-\beta)}]^{-1}, \quad n \geq 1; \\ (r_{2n-1}, r_{2n}) \cap \sigma(T) &= \emptyset; \\ \sigma_k &= \sigma(T) \cap [r_{2k-2}, r_{2k-1}], \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Число собственных значений (с учетом кратности) T , лежащих в σ_k , не превосходит числа

$$C_2 k^{\rho-1} (1 + k^{1-\rho(\alpha-\beta)}).$$

Рассматриваются следующие последовательности ортопроекторов: P_i – проектор на собственное подпространство оператора T , отвечающее собственному значению λ_i ;

$$\mathcal{P}_k = \sum_{\lambda_i \in \sigma_k} P_i, \quad \mathcal{P}_{(n)} = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}^{(n)} = I - \mathcal{P}_{(n)},$$

где I – тождественный оператор в H . Таким образом, введенные проекторы являются проекторами Рисса, построенными соответственно по спектральным множествам

$$\sigma_k, \quad \Delta_n = \bigcup_{k=1}^n \sigma_k, \quad \sigma(T) \setminus \Delta_n.$$

Подпространства, являющиеся образами соответствующих проекторов, обозначим

$$H_i = \text{Im } P_i, \quad \mathcal{H}_k = \text{Im } \mathcal{P}_k, \quad \mathcal{H}_{(n)} = \text{Im } \mathcal{P}_{(n)}, \quad \mathcal{H}^{(n)} = \text{Im } \mathcal{P}^{(n)}.$$

Введем в рассмотрение нелинейные операторы $\Phi_n: L(H) \rightarrow L(H)$, $n \geq 1$, действующие в $L(H)$ и определенные равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_n(X) = \sum_{\lambda_i \in \Delta_n} (V P_i X S_n(\lambda_i) - V S_n(\lambda_i) X P_i \\ - P_i X S_n(\lambda_i) X \mathcal{P}^{(n)} + S_n(\lambda_i) X P_i X \mathcal{P}^{(n)}) + V, \quad X \in L(H). \end{aligned}$$

Ограниченные операторы $S_n(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \Delta_n$, однозначно определяются из равенств

$$S_n(\lambda_i)(\lambda_i I - T) = (\lambda_i T - I)S_n(\lambda_i) = \mathcal{P}^{(n)}, \quad \lambda_i \in \Delta_n,$$

т.е. каждый из таких операторов имеет вид: $S_n(\lambda_i)x = 0$ на $\mathcal{H}_{(n)}$ и $S_n(\lambda_i)x = (\lambda_i - \lambda_k)^{-1}x$, если $x \in H_k$, $\lambda_k \in \sigma(T) \setminus \Delta_n$ (учитывается, что $H = \mathcal{H}_{(n)} \oplus (\bigoplus_{p \geq n+1} \mathcal{H}_p)$).

Всюду считается, что число $\rho \geq 1$ выбрано так, чтобы

$$\tau = \rho(\alpha - 1) - \max\{0, 1 - \rho(\alpha - \beta)\} > 0.$$

ЛЕММА. Пусть натуральное число n_0 выбрано из условия $\varepsilon_n = 6C_1^{-1}\|V\|n^{-\tau} < 1$ $\forall n > n_0$, где постоянная C_1 взята из оценки (4).

Тогда каждый из операторов Φ_n , $n > n_0$, переводит шар $\{X \in L(H) : \|X\| \leq 2\|V\|\}$ в себя и является на нем оператором сжатия с константой сжатия ε_n . Последовательность операторов

$$V_{k,n} = \Phi_n^k(0), \quad k \geq 0, \quad \Phi_n^0(0) = 0$$

сходится в $L(H)$ к некоторому оператору $X_{0,n} \in L(H)$ и имеют место оценки

$$\|X_{0,n} - V_{k,n}\| \leq \frac{\varepsilon_n^k}{1 - \varepsilon_n} \|V\|, \quad k \geq 0.$$

Оператор $T - V$ является дискретным оператором. Пронумеруем его собственные значения (с учетом алгебраической кратности) в порядке неубывания их вещественных частей. Получившуюся последовательность обозначим (μ_k) .

ТЕОРЕМА 1. Спектр сужения оператора $T - \mathcal{P}_{(n)}X_{0,n}\mathcal{P}_{(n)}$ на подпространство $\mathcal{H}_{(n)}$ совпадает с множеством $\tilde{\Delta}_n = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, $k = \dim \mathcal{H}_{(n)}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть числа α, β, ρ и натуральные числа m, N удовлетворяют одному из следующих условий

- 1) $\alpha - \beta \geq 1$, $N + 1 > \frac{m\alpha - 1}{\alpha - 1}$, $\rho = 1$;
- 2) $\alpha > \beta$, $\alpha - \beta < 1$, $N + 1 > \frac{m\alpha - \alpha + \beta}{\alpha - 1}$, $\rho = \frac{1}{\alpha - \beta}$;
- 3) $\alpha = \beta$, $N + 1 > \frac{m\alpha}{\alpha - 1}$, ρ - любое;
- 4) верна формула (2) и $N + 1 \geq \frac{m\alpha}{\alpha - 1}$, ρ - любое.

Тогда имеет место следующая формула регуляризованных следов:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_j \in \Delta_n} (\mu_j^m - \lambda_j^m) + \text{tr}[(T \mathcal{P}_{(n)} - \mathcal{P}_{(n)} \Phi_n^N(0) \mathcal{P}_{(n)})^m - (T \mathcal{P}_{(n)})^m] = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 593–596.
- [2] Садовничий В. А., Дубровский В. В. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 11. С. 1264–1271.
- [3] Садовничий В. А., Любишкин В. А. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. № 2. С. 290–293.
- [4] Садовничий В. А., Дубровский В. В., Любишкин В. А. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 4. С. 830–832.
- [5] Дубровский В. В., Печенцов А. С. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 1. С. 50–53.
- [6] Войтович Н. Н., Кацеленбаум Б. З., Сивов А. Н. // Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. С. 289–416.