Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Берест, А. П. Веселов, О сингулярностях потенциалов точно решаемых уравнений Шрёдингера и проблеме Адамара, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm22>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 10:58:52

О СИНГУЛЯРНОСТЯХ ПОТЕНЦИАЛОВ ТОЧНО РЕШАЕМЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА И ПРОБЛЕМЕ АДАМАРА

Ю. Ю. БЕРЕСТ, А. П. ВЕСЕЛОВ

Рассмотрим оператор Шрёдингера $L = -\Delta + u(x)$, $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с потенциалом $u(x)$, продолжаемым до мероморфной функции $u(z)$ во всем комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Скажем, что соответствующее уравнение Шрёдингера

$$(1) \quad L\psi = -k^2\psi$$

является *точно решаемым*, если оно имеет решение вида $\psi(x, k) = P(x, k)e^{(k, x)}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{C}^n$, где P есть некоторый полином по k . Мы будем предполагать также, что ψ продолжается по x аналитически до функции $\psi(z, k)$, мероморфной во всем $\mathbb{C}^n$.

ТЕОРЕМА 1. *Сингулярности потенциала $u(z)$ точно решаемого уравнения Шрёдингера лежат на объединении (возможно, бесконечном) некоторых гиперплоскостей в $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство основано на следующей ключевой лемме.

ЛЕММА О НУЛЕВЫХ ВЫЧЕТАХ. *Ограничение потенциала $u(z)$ точно решаемого уравнения Шрёдингера на любую комплексную прямую $z = z_0 + kt$, $t \in \mathbb{C}$, имеет нулевые вычеты во всех полюсах по t .*

Теорема выводится из леммы путем несложного локального анализа в окрестности невырожденной точки сингулярной гиперповерхности потенциала: доказывается, что в любой такой окрестности сингулярность обязана быть гиперплоскостью.

В известных примерах многомерных точно решаемых уравнений Шрёдингера – квантовых задачах Калоджеро-Мозера и их обобщениях (см. [1], [2]), сингулярности образуют специальные конфигурации гиперплоскостей. Наш результат объясняет это обстоятельство. Проблема описания всех таких конфигураций решена пока лишь в размерности 1 [3], а также в размерности 2 в предположении, что все прямые проходят через одну точку [4].

Особый интерес к этой задаче объясняется, в частности, ее связью с известной *проблемой Адамара* об описании всех гиперболических уравнений второго порядка, удовлетворяющих принципу Гюйгенса (см., например, [5]).

ТЕОРЕМА 2. *Если потенциал $u(x)$ и решение $\psi(k, x)$ точно решаемого уравнения Шрёдингера являются рациональными функциями x , то гиперболическое уравнение*

$$(\square_{N+1} + u(x_1, \dots, x_n))\varphi = 0,$$

где $\square_{N+1} = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \dots - \partial_N^2$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, для всех достаточно больших нечетных N удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Доказательство основано на технике, развитой одним из авторов в [6]. Мы полагаем, что при некоторых естественных предположениях верно и обратное утверждение, и тем самым, проблема Адамара в пространстве Минковского эквивалентна проблеме описания рациональных точно решаемых уравнений Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что соответствующие операторы Шрёдингера L удовлетворяют сплетающему соотношению

$$(2) \quad LD = DL_0,$$

где $L_0 = -\Delta$, $D = P(x, \frac{\partial}{\partial x})$, P – тот же полином, что и в выражении для ψ -функции. В таком виде задача легко обобщается на любое риманово многообразие M^n (L_0 – оператор Лапласа–Бельтрами, D – некоторый дифференциальный оператор на M^n). По всей видимости, в этом

случае верен аналог нашей теоремы 1, где роль гиперплоскостей играют вполне геодезические гиперповерхности.

Другое обобщение относится к случаю, когда $L_0 = -\Delta + u_0(x)$. Предположим, что потенциалы $u_0(x)$ и $u(x)$ допускают мероморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$ с полюсами второго порядка. Следующий результат доказывается аналогично теореме 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть два оператора Шрёдингера L и L_0 связаны сплетающим соотношением (2), где D — некоторый дифференциальный оператор с мероморфными в $\mathbb{C}^n$ коэффициентами. Тогда особенности разности потенциалов $u(z) - u_0(z)$ лежат в некотором объединении гиперплоскостей.

Интересный пример отвечает квантовому гармоническому осциллятору $L_0 = -\Delta + \omega^2 x^2$. В этом случае, так же как и в теореме 1, мы можем утверждать, что все особенности потенциала $u(z)$ принадлежат некоторому множеству гиперплоскостей. Примеры таких потенциалов известны в теории обобщенных систем Калоджеро–Мозера (см. [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Веселов А. П., Стыркас К. Л., Чалых О. А. // ТМФ. 1993. Т. 94. № 2. С. 253–275.
- [2] Веселов А. П., Фейгин М. В., Чалых О. А. // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 185–186.
- [3] Adler M., Moser J. // Comm. Math. Phys. 1978. V. 61. P. 1–30. [4] Berest Yu. Yu. // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. № 10. P. 1019–1052. [5] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 7–78. [6] Berest Yu. Yu. // Preprint CRM-2296. To appear in Acta Math. Appl. 1998. [7] Chalykh O., Feigin M., Veselov A. P. // J. Math. Phys. 1998. V. 39. № 2. P. 1–9.

Department of Mathematics, University of California, Berkeley, USA;

Принято редколлегией
26.01.1998

Department of Math. Sciences, Loughborough University, UK,

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

E-mail: beresty@math.berkeley.edu; A.P.Veselov@lboro.ac.uk