Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Возмущение спектра и волновые операторы в линейной теории переноса, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 09:40:19

ВОЗМУЩЕНИЕ СПЕКТРА И ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

С. А. Степин

В работе изучаются спектральные свойства действующего в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$ несамосопряженного интегродифференциального оператора

$$(1) \quad L = L_0 + iV = i\mu \frac{\partial}{\partial x} + i c(x) \int_{-1}^1 \cdot d\mu$$

с областью определения $\{\psi \in \mathcal{H} : \psi(\cdot, \mu) \text{ абсолютно непрерывна при п.в. } \mu \in [-1, 1], L_0 \psi \in \mathcal{H}\}$, где $L_0 = i\mu \partial / \partial x$, $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $c(x) \geq 0$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$. Рассматриваемая операторная модель была предложена К.О. Фридрихсом в связи с одной задачей теории переноса нейтронов (см. [1], [2]).

Структура спектра $\sigma(L)$ в случае функции $c(x)$, пропорциональной индикатору интервала, изучена в работе [2]. Случай произвольной финитной функции $0 \leq c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ исследован в [3], где показано, что, помимо непрерывного спектра $\sigma_c(L) = \mathbb{R}$, оператор L имеет лишь конечное множество собственных значений, и получена оценка размерности $N(c)$ подпространства точечного спектра $\sigma_p(L)$.

В настоящей работе расширен класс функций $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, при которых у оператора L сохраняется указанная выше структура спектра $\sigma(L)$, построены прямой и обратный волновые операторы для пары $\{L_0, L\}$ и установлено, что они обладают свойством полноты.

ТЕОРЕМА 1. Если $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и $c(x) \geq 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$, то $\sigma(L) = \sigma_c(L) \cup \sigma_p(L)$, где $\sigma_c(L) = \mathbb{R}$, а $\sigma_p(L) \subset i\mathbb{R}_+$ состоит из нормальных полупростых собственных значений.

Поскольку $V \geq 0$, то $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_- = \emptyset$. Для $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \sigma(L)$ справедливо следующее тождество (см. [2], [3])

$$(2) \quad R(\lambda) = R_0(\lambda) - iR_0(\lambda)\sqrt{V} (I + Q(\lambda))^{-1} \sqrt{V} R_0(\lambda);$$

здесь $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$, $R_0(\lambda) = (L_0 - \lambda I)^{-1}$, а $Q(\lambda)$ – интегральный оператор в $L^2(\mathbb{R})$ с ядром $\sqrt{c(x)} \text{Ei}(i\lambda|x-y|) \sqrt{c(y)}$, где $\text{Ei}(z)$ – интегральная показательная функция.

Если выполнены условия теоремы 1, то $Q(\lambda)$ – голоморфная в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция, причем $Q^2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. Согласно аналитической альтернативе Фредгольма, оператор-функция $(I + Q(\lambda))^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}_+$, а ее вычеты в полюсах суть операторы конечного ранга. В силу (2) то же верно для $R(\lambda)$, и поэтому $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_+$ состоит из изолированных конечнократных собственных значений. Включения $\mathbb{R} \subset \sigma_c(L)$ и $\sigma_p(L) \subset i\mathbb{R}_+$ выполнены для произвольной функции $0 \leq c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Ниже выделен класс функций $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, содержащий нефинитные $c(x)$, для которых $N(c) < \infty$, и установлена оценка функционала $N(c)$, обобщающая полученную в [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $c(x) \geq 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$ и, кроме того, $\sqrt{c(x)} (\ln|x-y|) \sqrt{c(y)} \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Если

$$\varkappa := \limsup_{t \rightarrow \infty} (\ln t)^2 \int_{|x|>t} c(x) dx < \infty,$$

то точечный спектр $\sigma_p(L)$ конечен и суммарная кратность собственных значений оператора $L = L_0 + iV$ допускает оценку

$$(3) \quad N(c) \leq 1 + \left\{ \left(\iint c(x) (\ln|x-y|)^2 c(y) dx dy \right)^{1/2} + \left(\varkappa \int c(x) dx \right)^{1/2} \right\}^2.$$

Введем в рассмотрение однопараметрическое семейство операторов $L(\kappa) = L_0 + i\kappa V$, $\kappa \in \mathbb{R}_+$, где функция $c(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 2, и отметим, что $N(\kappa c)$ монотонно возрастает с ростом параметра κ . Выделим подмножество $\mathcal{E} \subset L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ следующим условием: $0 \leq c(x) \in \mathcal{E}$, если $N(\kappa c) > N(c)$ при $\kappa > 1$. Если $c(x) > 0$ на множестве положительной меры, то при достаточно малых $\kappa > 0$ оператор $L(\kappa)$ имеет, и притом единственное (в силу оценки (3)), собственное значение. С ростом параметра κ увеличение числа собственных значений $N(\kappa c)$ происходит при тех и только тех κ , для которых $\kappa c(x) \in \mathcal{E}$.

Для финитных функций $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ в работе [3] средствами функциональной модели изучается компонента L_c оператора (1), отвечающая его непрерывному спектру. Там, в частности, получен ответ на вопрос, когда оператор L_c подобен самосопряженному, и установлено, что препятствием для такого подобия служит спектральная особенность на непрерывном спектре $\sigma_c(L)$.

В предположениях теоремы 2 требование $c(x) \notin \mathcal{E}$ является необходимым и достаточным условием отсутствия спектральных особенностей у оператора $L = L_0 + iV$. Соединение техники нестационарной теории рассеяния и подхода с точки зрения функциональной модели позволяет для определенного класса функций $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, включающего в себя нефинитные $c(x)$, построить волновые операторы, осуществляющие подобие L_c и L_0 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $c(x) \geq 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$ и сходится интеграл

$$(4) \quad \int_{|x| \geq t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \left(\int_{|x| \geq t} c(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Тогда существует волновой оператор $\Omega = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(itL) \exp(-itL_0)$. Для плотного в $\mathcal{H}$ множества векторов φ матричные элементы $(\Omega\varphi, \psi)$, $\psi \in \mathcal{H}$, вычисляются по формуле

$$(5) \quad (\Omega\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{V} R_0(\tau + i0)\varphi, \sqrt{V} R^*(\tau - i0)\psi) d\tau.$$

Все условия теорем 2 и 3 выполнены, если $0 \leq c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $c(x) = O(|x|^{-\alpha})$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $\alpha > 1$.

При условии малости возмущения в рамках так называемой “гладкой теории” стационарное представление типа (5) для билинейной формы волнового оператора установлено в [4]. Отметим, что рассматриваемая здесь операторная модель (1) не укладывается в схему работы [4].

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что в условиях теоремы 2 сходится интеграл (4) и оператор $L = L_0 + iV$ вполне несамосопряженный. Если $c(x) \notin \mathcal{E}$, то $\Omega\mathcal{H} = (I - \mathcal{P})\mathcal{H}$, где $\mathcal{P}$ – проектор Рисса, отвечающий $\sigma_p(L)$. При этом на подпространстве $\Omega\mathcal{H}$ существует волновой оператор $\Omega_L^{-1} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(itL) \exp(-itL_0)$ и выполнены соотношения

$$L_c = \Omega L_0 \Omega_L^{-1}, \quad \Omega_L^{-1} \Omega = I.$$

Картину спектра аналогичную описанной выше (в частности, появление собственного значения при сколь угодно “малом” возмущении) можно наблюдать для операторов классической модели Фридрихса в случае, когда ядро оператора возмущения не обращается в нуль на границе спектра невозмущенного оператора (см. [5]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. [2] Lehner J. // J. Math. Mech. 1962. V. 11. №2. P. 173–181. [3] Куперин Ю. А., Набоко С. Н., Романов Р. В. // Функциональный анализ и его прил. 1999. Т. 33. №3. С. 47–58. [4] Kato T. // Math. Ann. 1966. V. 162. P. 258–279. [5] Фридрихс К. О. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.