Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Модули над наследственными и полуцепными кольцами, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:17:04

МОДУЛИ НАД НАСЛЕДСТВЕННЫМИ И ПОЛУЦЕПНЫМИ КОЛЬЦАМИ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Слова типа “нётерово кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Модуль M называется π -*проективным*, если каждый идемпотентный эндоморфизм любого фактор-модуля модуля M поднимается до эндоморфизма модуля M . Модуль M называется π -*инъективным*, если каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M . Модуль M называется *квазипроективным*, если для любого эпиморфизма $h: M \rightarrow \overline{M}$ и каждого гомоморфизма $\overline{f}: \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ существует такой гомоморфизм $f: M \rightarrow M$, что $hf = \overline{f}$. Каждый квазипроективный (квазинъективный) модуль является π -проективным (π -инъективным) модулем. Модуль называется *цепным*, если любые его два подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. Классическое правое кольцо частных кольца A обозначается через $Q_{cl}(A)$. Цепная нётерова область A называется *полной*, если кольцо A является полным относительно $J(A)$ -адической топологии.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся примитивным справа кольцом. В теореме 8 из [1] выяснено, когда $Q_{cl}(A)_A$ – квазипроективный модуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 [2]. Пусть A – наследственное нётерово первичное кольцо. Тогда $Q_{cl}(A)_A$ – π -проективный модуль $\iff$ либо A – цепная нётерова область, либо существует такое натуральное число n , что кольцо A изоморфно кольцу всех $(n \times n)$ -матриц над некоторой полной цепной нётеровой областью D .

ЗАМЕЧАНИЕ 3 [2]. Пусть A – наследственное справа нётерово справа полупервичное кольцо. Тогда $Q_{cl}(A)_A$ – прямая сумма π -проективных модулей $\iff$ A – полуцепное кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ 4 [3; теорема 11.75].

A – полуцепное слева нётерово справа полупервичное кольцо $\iff$

A – полуцепное справа нётерово слева полупервичное кольцо $\iff$

A – конечное прямое произведение полуцепных нётеровых наследственных первичных колец.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – наследственное справа нётерово справа полупервичное кольцо. Тогда:

(1) $Q_{cl}(A)_A$ – прямая сумма π -проективных модулей $\iff$

A – конечное прямое произведение полуцепных нётеровых наследственных первичных колец.

(2) $Q_{cl}(A)_A$ – π -проективный правый A -модуль $\iff$

$A = A_1 \times \dots \times A_n$, где каждое кольцо A_i либо является цепной нётеровой областью, либо изоморфно кольцу всех $(n(i) \times n(i))$ -матриц над некоторой полной цепной нётеровой областью D_i (где $n(i)$ – натуральные числа).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из замечаний 3 и 4.

(2) В силу (1) можно без ограничения общности считать, что A – наследственное нётерово первичное кольцо. В этом случае утверждение следует из замечания 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Существует цепная нётерова область A , не являющаяся ни примитивной справа, ни полной (например, в качестве A можно взять кольцо всех рациональных чисел с нечетными знаменателями). Поэтому из теоремы 1 следует, что существует такое наследственное нётерово первичное кольцо A , что A не является примитивным справа кольцом, и $Q_{cl}(A)_A$ – π -проективный

модуль, не являющийся квазипроективным. Следовательно, даже в непримитивном случае, существуют кольца, подпадающие под теорему 1 и не подпадающие под вышеупомянутую теорему 8 из [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 6 [3; предложение 4.13]. Пусть E – инъективная оболочка модуля M . Тогда

M – π -инъективный модуль $\iff$

$M = \bigoplus_{i \in I} (E_i \cap M)$ для любого прямого разложения $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Прямая сумма равномерных модулей называется *полуравномерным* модулем. Правый модуль M над кольцом A называется *несингулярным*, если аннулятор в кольце A любого ненулевого элемента модуля M не является существенным правым идеалом кольца A .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. A – нётерово справа полуцепное кольцо $\iff$

A – полуравномерное справа кольцо и все инъективные правые A -модули являются полуцепными $\iff$

A – полуравномерное справа кольцо и все π -инъективные правые A -модули являются полуцепными.

(Первая эквивалентность из замечания 7 доказана в [4; 3.61]. Вторая эквивалентность следует из замечания 6.)

ЗАМЕЧАНИЕ 8 [5]. Каждый конечнопорожденный несингулярный модуль над полуцепным кольцом является полуцепным проективным модулем.

ЗАМЕЧАНИЕ 9 [6]. Каждый инъективный несингулярный модуль над полуцепным кольцом является полуцепным модулем.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – π -инъективный несингулярный правый модуль над полуцепным кольцом A .

Тогда M – полуцепной модуль, причем $M = N \oplus P$, где N – инъективный полуцепной модуль, P – полуцепной модуль, являющийся подмодулем некоторого проективного A -модуля.

Если, кроме того, A – нётерово справа кольцо, то P – проективный модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инъективная оболочка E модуля M является несингулярным модулем. По замечанию 9 $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$, где все E_i – цепные модули. По замечанию 6 M – прямая сумма цепных модулей $M_i = E_i \cap M$. Пусть J – подмножество множества индексов I , образованное всеми такими индексами i , что $M_i = E_i$, $L \equiv I \setminus J$, $N \equiv \bigoplus_{i \in J} M_i$, $P \equiv \bigoplus_{i \in L} M_i$, $F \equiv \bigoplus_{i \in L} E_i$, причем если $J(L)$ – пустое множество, то полагаем $N = 0$ ($P = F = 0$). Тогда $E = N \oplus F$, $M = N \oplus P$, N – инъективный полуцепной модуль. По определению модуля F для любого $i \in L$ существуют элементы $q_i \in E_i \setminus M_i$. Пусть $Q \equiv \bigoplus_{i \in L} q_i A$. По замечанию 8 все циклические несингулярные модули $q_i A$ являются проективными модулями. Поэтому Q – проективный модуль. Так как все E_i – цепные модули, то $M_i \subseteq q_i A$ для любого $i \in L$. Поэтому $P \subseteq Q$. Допустим теперь, что A нётерово справа. Тогда при $i \in L$ все циклические модули $q_i A$ являются нётеровыми модулями. Поэтому при $i \in L$ все модули M_i конечно порождены. По замечанию 8 при $i \in L$ все конечнопорожденные несингулярные модули M_i проективны. Поэтому P – проективный модуль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Singh S. // Canad. J. Math. 1974. V. 26. №5. P. 1173–1185. [2] Туғанбаев А. А. // Матем. сб. 1998. Т. 189. №4. С. 143–160. [3] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht: Kluwer, 1998. [4] Tuganbaev A. A. Distributive Modules and Related Topics. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. [5] Warfield R. B. // J. Algebra. 1975. V. 37. №3. P. 187–222. [6] Туғанбаев А. А. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. №6. С. 880–892.

Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: askar@tuganbaev.mccme.ru

Принято редколлегией
23.08.1999