Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Веденяпин, С. А. Амосов, Л. Тоскано, Инварианты для гамильтонианов и кинетических уравнений, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 09:38:53

ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ ГАМИЛЬТониАНОВ И КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Веденяпин, С. А. Амосов, Л. Тоскано

1. Рассмотрим полиномиальные гамильтонианы H в переменных $z_k = (x_k + ip_k)/\sqrt{2}$, $\bar{z}_k = (x_k - ip_k)/\sqrt{2}$, $k = 1, \dots, N$: $H = \sum_{(\alpha, \beta) \in J} b_{\alpha\beta} (z^\alpha \bar{z}^\beta + \bar{z}^\alpha z^\beta)$.

Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N$ – целочисленные векторы с неотрицательными компонентами, J есть некоторый набор пар таких векторов. Им соответствуют квантовые гамильтонианы

$$(1) \quad H = \sum_{(\alpha, \beta) \in J} b_{\alpha\beta} (a^\alpha a^{+\beta} + a^{+\alpha} a^\beta).$$

Здесь $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \dots a_N^{\alpha_N}$, и a_i^+ и a_i есть операторы рождения и уничтожения с бозонными или фермионными соотношениями коммутации [1]. В [2], [3] было доказано, что $I = \sum_{i=1}^N r_i a_i^+ a_i$ есть инвариант для (1), т.е. $[I, H] = 0$, если $(\mathbf{r}, \alpha - \beta) = 0$ для всех $(\alpha, \beta) \in J$.

Сопоставим каждому гамильтониану (1) систему уравнений в частных производных на функции $f_i(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, вида

$$(2) \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} + \left(\nu_i, \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) = \sum_{(\alpha, \beta) \in J} (\alpha_i - \beta_i) B_{\alpha\beta} (h^\beta - h^\alpha).$$

Здесь $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_N^{\alpha_N}$, $h_i = f_i/(1 + \theta_i f_i)$, $\theta_i = 1$ для бозонов, $\theta_i = -1$ для фермионов, $\theta_i = 0$ в случае классической статистики Больцмана, $B_{\alpha\beta} = \sigma_\beta^\alpha (1 + \theta_1 f_1)^{\alpha_1 + \beta_1} \dots (1 + \theta_N f_N)^{\alpha_N + \beta_N}$, где $\sigma_\beta^\alpha > 0$ – сечение реакций (столкновений), $\nu_i \in \mathbb{R}^d$ – скорости движения i -го вещества. Уравнения (2) обобщают дискретные модели уравнения Больцмана и Улинга–Уленбека [4], [5] и имеют аналогичные законы сохранения: $I = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} \mu_i f_i(t, x) dx$ есть инвариант для (2), если $(\mu, \alpha - \beta) = 0$ для всех $(\alpha, \beta) \in J$. Система (2) удовлетворяет H -теореме: H -функция $H = \sum_{i=1}^N H_{\theta_i}(f_i)$ убывает в силу (2), если $H_\theta(f) = f \ln f - \theta(1 + \theta f) \ln(1 + \theta f)$.

2. Уравнение (2) называется дискретной моделью по скоростям (ДМС) уравнения Больцмана, если: а) $\alpha = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$, $\beta = \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_l$, где $\mathbf{e}_k$ – вектор стандартного базиса в $\mathbb{Z}_+^N$ с 1 на k -м месте и нулями на остальных; при этом все четыре индекса (i, j, k, l) различны: это соответствует парному столкновению $(i, j) \leftrightarrow (k, l)$ частиц; б) ν_i и σ_β^α выбраны так, чтобы выполнялись законы сохранения импульса, энергии и числа частиц.

Если имеется r сортов частиц с массами $m_1, \dots, m_r$, то дискретная модель (2) должна иметь $r + d + 1$ инвариантов, а именно, r интегралов числа частиц каждого сорта (если нет превращений масс в реакциях), d компонент суммарного импульса и один интеграл энергии (если возможны только упругие столкновения).

До недавнего времени не было известно при $r > 1$ ни одной нетривиальной ДМС (см. [6]) с правильным числом инвариантов. Под нетривиальными авторы [6] понимают модели с обменом энергией, а предложенные в [6] две нетривиальные модели обладают, как показано в [7], одним и двумя лишними инвариантами соответственно. Модели без лишних инвариантов названы в [6] нормальными.

Построение моделей с нужным числом инвариантов проводится в [7] индукцией по числу N с подсчетом инвариантов на каждом шаге. Следующая модель для одномерного случая является рекордной: число скоростей N в ней минимально в классе нормальных нетривиальных моделей, симметричных относительно нуля.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00861).

МОДЕЛЬ 1 (С. А. Амосов, В. В. Веденяпин). $d = 1$, $r = 2$, $m_1/m_2 = 3$, $N = 7$ (четыре импульса у тяжелых и три у легких частиц). Импульсы тяжелых частиц могут иметь значения p , $-p$, $2p$ и $-2p$. Импульсы легких частиц могут иметь значения 0 , p и $-p$. В модели возможны три реакции между легкими и тяжелыми частицами, соответствующие ненулевым сечениям $\sigma_{2p,0}^{p,p}$, $\sigma_{-2p,0}^{-p,-p}$, $\sigma_{-p,p}^{p,-p}$. Частицы здесь пронумерованы своими импульсами, причем первые индексы соответствуют тяжелым частицам, а вторые – легким.

Предлагаемая модель имеет прямое обобщение на случай пространства импульсов большей размерности:

МОДЕЛЬ 2 (С. А. Амосов, В. В. Веденяпин). $d = 2$, $r = 2$, $m_1/m_2 = 3$, $N = 13$ (восемь импульсов у тяжелых и пять у легких частиц). Импульсы тяжелых частиц могут иметь значения $(0, p)$, $(0, -p)$, $(p, 0)$, $(-p, 0)$, $(0, 2p)$, $(0, -2p)$, $(2p, 0)$, $(-2p, 0)$. Легкие частицы имеют импульсы $(0, 0)$, $(0, p)$, $(0, -p)$, $(p, 0)$, $(-p, 0)$. В этой модели столкновения такие же, как в модели 1, и симметричные им относительно диагоналей, плюс еще два столкновения бродуэлловского [6] типа между тяжелыми и одно столкновение бродуэлловского типа между легкими частицами (всего $4 + 2 + 3 = 9$ столкновений).

МОДЕЛЬ 3 (В. В. Веденяпин, Л. Тоскано). $d = 2$, $r = 2$, $m_1/m_2 = 7$, $N = 12$ (шесть импульсов у тяжелых и шесть у легких частиц). Модель симметрична относительно осей, но не симметрична относительно диагоналей. Импульсы частиц имеют следующие координаты: $p_1 = p_{\bar{1}} = (-1, +1)$, $p_2 = p_{\bar{2}} = (+1, +1)$, $p_3 = p_{\bar{3}} = (+1, -1)$, $p_4 = p_{\bar{4}} = (-1, -1)$, $p_5 = (0, +1)$, $p_6 = (0, -1)$, $p_{\bar{5}} = (0, +3)$, $p_{\bar{6}} = (0, -3)$. Мы обозначаем номера легких частиц без черты, а номера тяжелых – с чертой сверху. Столкновениям модели соответствует набор сечений $\sigma_{k,j}^{i,j}$: одно столкновение между тяжелыми частицами $\sigma_{4,2}^{\bar{3},\bar{1}}$; три столкновения между легкими частицами $\sigma_{6,2}^{5,1}$, $\sigma_{2,4}^{3,1}$, $\sigma_{3,6}^{5,4}$; четыре смешанных столкновения $\sigma_{6,5}^{\bar{4},1}$, $\sigma_{1,3}^{\bar{3},1}$, $\sigma_{1,2}^{\bar{2},1}$, $\sigma_{1,4}^{\bar{4},1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. [2] Mingalev O. V., Orlov Yu. N., Vedenyapin V. V. // Phys. Lett. A. 1996. V. 223. P. 246–250. [3] Веденяпин В. В., Орлов Ю. Н. // Докл. РАН. 1997. Т. 351. № 4. С. 444–447. [4] Streater R. Statistical Dynamics. London: Imperial College Press, 1995. [5] Веденяпин В. В., Мингалёв И. В., Мингалёв О. В. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 11. С. 21–38. [6] Bobylev A. V., Cercignani C. // J. Statist. Phys. 1998. V. 91. P. 1–2. [7] Vedenyapin V. V. Discrete velocity models for mixtures // Препринт № 17. М.: Ин-т прикл. матем. РАН, 1999.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН;
Неаполитанский университет “Федерико 2”

Принято редколлегией
23.08.1999