Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Власенко, О полном инварианте диффеоморфизмов Морса–Смейла на неориентируемых поверхностях, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 13:43:00

О ПОЛНОМ ИНВАРИАНТЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ МОРСА–СМЕЙЛА НА НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

И. Ю. ВЛАСЕНКО

Диффеоморфизм Морса–Смейла называется диффеоморфизм, удовлетворяющий *аксиоме А*, *строгую условие трансверсальности* и имеющий неблуждающее множество, являющееся объединением конечного числа периодических точек. В настоящее время имеется многочисленная литература по вопросам топологической классификации диффеоморфизмов Морса–Смейла (см. обзор [1] и литературу к нему). При этом исследователи ограничивались простыми случаями, когда множество *гетероклинических точек* (см. [1]) пусто либо конечно.

В этих работах диффеоморфизму ставился в соответствие ориентированный граф, с которым связывались дополнительные описывающие диффеоморфизм множества. Полученный комплекс назывался *различающим графом*, определялся изоморфизм различающих графов и доказывалось, что диффеоморфизмы Морса–Смейла топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их различающие графы изоморфны.

В работах автора [2]–[4] эта задача была решена в общем случае. Удалось описать бесконечное множество гетероклинических орбит, для этого в состав различающего графа диффеоморфизма было введено дополнительное множество, названное *кодирующим множеством*. Был построен конечный полный топологический инвариант диффеоморфизмов Морса–Смейла на компактных ориентируемых поверхностях. Естественно возникла задача обобщения данной конструкции и на неориентируемые многообразия. Рассмотрению этого вопроса посвящена настоящая работа.

При анализе доказательств можно заметить, что в построении сопрягающего гомеоморфизма ориентируемость многообразия не используется. Она учитывалась только при построении *кодирующих множеств* (мы используем обозначения из [2]–[4]), когда мы определяли взаимное расположение устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек при их пересечении, сравнивая ориентации реперов, образующихся в точках пересечения, с ориентацией многообразия. В неориентируемом случае ситуация резко иная. Однако нижеследующая конструкция позволяет обойти эту трудность.

На многообразии имеется порожденная диффеоморфизмом так называемая *система решетчатых окрестностей* (см. [2]–[4]), каждая из которых гомеоморфна диску, содержит внутри единственную седловую периодическую точку и является окрестностью ее устойчивого и неустойчивого многообразий. Зафиксируем ориентацию седловых точек в каждой решетчатой окрестности. Эту ориентацию можно однозначно перенести по устойчивым и неустойчивым многообразиям седловой точки во все содержащиеся там гетероклинические точки. Таким образом, у каждой гетероклинической точки возникает две ориентации: одна принесенная по устойчивому многообразию, другая – по неустойчивому.

ЛЕММА 1. *Если две гетероклинические точки образованы пересечением одних и тех же устойчивых и неустойчивых многообразий, то и отношение индуцированных ориентаций у них одно и то же: другими словами, в решетчатой окрестности оно не меняется от точки к точке.*

Идея доказательства. Если существуют две точки с различными ориентациями, то найдется замкнутая неориентируемая кривая, целиком состоящая из блуждающих точек (например, кривая, лежащая в контуре из соединяющих эти точки отрезков устойчивых и неустойчивых многообразий). Взяв итерации этой кривой под действием диффеоморфизма, получим на поверхности бесконечное число непересекающихся неориентируемых кривых, что противоречит ее компактности.

Аналогичными рассуждениями в [5] доказывалась ориентируемость периодических компонент.

Таким образом, отношения ориентаций в гетероклинических точках зависят только от выбора ориентации седловых точек. Зададим его в виде матрицы $\|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = \pm 1$, если ориентации

седловых точек x_i и x_j совпадают, $a_{ij} = -1$, если нет, и $a_{ij} = 0$, если их многообразия не пересекаются.

Процедура кодирования гетероклинической точки является локальной относительно содержащей ее решетчатой окрестности. Поэтому можно полагать, что в ней все используемые ориентации считаются не относительно многообразия, а относительно седловой точки, для неустойчивого многообразия которой строится формула. Тогда вся процедура переносится на неориентируемый случай без изменений.

Осталось внести необходимые поправки в сам инвариант. Нам нужно добавить к нему матрицу $\|a_{ij}\|$ отношений ориентаций, уточнить определение сопряженности различающих графов в п. 2, определение 6.2 в [4] (см. также определение 8.2 в [2]), в котором говорится о существовании изменения ориентации r , заменив его на следующее: существует вектор $\|r_i\|$ изменений ориентаций точек x_i , где каждое $r_i = -1$, если оно меняет ориентацию x_i , и $r_i = +1$ в противном случае.

Кроме того, уточним определение сопряженности кодирующих множеств в пп. i) и iii), определение 4.5 в [4] (см. также определение 5.4 в [2]), заменив i) как выше, а в iii) подставляя вместо изменения ориентации $r(D)$ изменение ориентации $r_i * D$, где i такое, что x_i — седловая точка, для неустойчивого многообразия которой строится формула.

Тогда следующая теорема становится справедливой и в неориентируемом случае

ТЕОРЕМА 1. *Два диффеоморфизма Морса–Смейла на двумерном многообразии топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их различающие графы изоморфны.*

В заключение автор хочет выразить благодарность В. В. Шарко за поставленную задачу и внимание к работе и М. А. Панкову, отредактировавшему эту статью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арансон С. Х., Гринес В. З. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фунд. направления. Т. 66. Динамические системы — 9. М.: ВИНТИ, 1991. С. 141–187. [2] Власенко И. // Некоторые вопросы современной математики. Труды Ин-та математики НАН Украины. Киев, 1999. С. 60–85. [3] Власенко И. // Некоторые вопросы современной математики. Труды Ин-та математики НАН Украины. Киев, 1999. С. 86–93. [4] Vlasenko I. Complete invariant for two-dimensional Morse–Smale diffeomorphisms // math.DS/9812063. [5] Smith P. // Amer. J. Math. 1930. V. 52. № 2. P. 357–369.

Институт математики НАН Украины
E-mail: vlasenko@imath.kiev.ua

Принято редколлегией
23.08.1999