Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

От правления Московского математического общества, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 185–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 07:16:15

ОТ ПРАВЛЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Состоялись очередные заседания Московского Математического Общества:

Заседание 9 февраля 1999 г. Г. Б. Шабат. *Теория детских рисунков и некоторые ее приложения.*

В работе А. Гротендика “Набросок программы”, написанной в 1984 году, установлена замечательная эквивалентность между графами на поверхностях и полями алгебраических чисел. Эта работа не предназначалась для публикации и первоначально получила лишь ограниченное признание. Однако в течение 15 лет после ее появления количество математиков, заинтересованных программой Гротендика, постоянно росло. К настоящему времени в русле этой программы сформировалась полноценная теория, называемая теорией детских рисунков.

Доклад содержит введение в эту теорию и рассказ о современном состоянии некоторых ее разделов. Основное внимание сосредоточено на визуализации (с помощью графов на поверхностях) различных математических объектов. С этой точки зрения затронуты приложения теории детских рисунков к абсолютной группе Галуа, к конечным группам и к геометрии пространств модулей кривых.

Понимание большей части доклада не будет требовать специальных знаний.

Заседание 16 февраля 1999 г. А. В. Пухликов. *Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий.*

Бирациональная геометрия – это раздел алгебраической геометрии, посвященный задачам бирациональной классификации алгебраических многообразий, т.е. вопросам такого вида: можно ли параметризовать заданное n -мерное многообразие, точнее, его открытый (по Зарисскому) кусок, набором n рациональных функций (проблема рациональности)? Существует ли бирациональное (алгебраическое взаимно-однозначное почти всюду) соответствие между заданными многообразиями? Какова структура группы бирациональных автоморфизмов данного многообразия (для проективного пространства это классическая группа Кремоны – группа автоморфизмов поля рациональных функций) – и многим другим. В настоящее время группа Кремоны вычислена только для размерностей 1 (тривиальный случай) и 2 (это классическая теорема Макса Нетера).

Наиболее эффективный метод изучения проблем бирациональной геометрии (“метод исключения или откручивания максимальных особенностей”) был предложен в 1971 г. В. А. Исковских и Ю. И. Маниным на основе некоторых идей, восходящих к М. Нетеру и Дж. Фано. С помощью этого метода был получен ряд глубоких результатов, наметивших контуры бирациональной классификации алгебраических многообразий размерности три и выше, открыт и изучен феномен бирациональной жесткости.

Достигнутый в последние годы прогресс существенно расширил возможности метода максимальных особенностей. На повестке дня – наиболее трудные классические задачи, такие, как проблема рациональности кубической гиперповерхности и вычисление многомерной группы Кремоны. Доклад посвящен современному состоянию этой области. Все понятия, выходящие за рамки общего университетского курса, определены в докладе.

Заседание 23 февраля 1999 г. А. И. Нейштадт. *Затягивание потери устойчивости в системах с быстрыми и медленными движениями.*

Затягивание потери устойчивости – интересное, важное и не до конца еще понятное явление в динамике систем с медленно изменяющимися параметрами. Оно состоит в следующем. Пусть система, зависящая от параметра, имеет невырожденное равновесие, которое при критическом значении параметра теряет устойчивость: при “докритических” значениях параметра равновесие асимптотически устойчиво в линейном приближении, а при значениях, больших критического – неустойчиво. Добавим к задаче динамику самого параметра: пусть он медленно растет со временем и проходит через указанное критическое значение. Оказывается, если система аналитична, то потеря устойчивости неизбежно затягивается: притянувшаяся к равновесию при значениях параметра, меньших критического, система остается в окрестности потерявшего устойчивость положения равновесия еще долгое время, за которое параметр успевает измениться на

конечную величину, не зависящую от скорости его изменения. Это затягивание потери устойчивости – свойство именно аналитических систем, в типичных бесконечно дифференцируемых системах срыв с потерявшего устойчивость равновесия происходит вблизи критического значения параметра. Так что в явлении затягивания материализуется отличие аналитических систем от бесконечно дифференцируемых. Затягивание разрушается очень малым шумом; тем не менее оно наблюдается в компьютерных иреальных экспериментах. Сходное явление происходит при потере устойчивости периодическим решением. В докладе описаны эти явления и сформулированы нерешенные проблемы.

Заседание 2 марта 1999 г. И. А. Дынников. *Трехстраничный подход в теории узлов.*

Стандартным инструментом в теории узлов являются плоские диаграммы. Диаграмма узла – это его проекция на плоскость, для каждого пересечения на которой указано, какая ветвь проходит сверху, а какая снизу. Классическая теорема Райдемайстера, дающая необходимое и достаточное условие эквивалентности узлов, заданных плоскими диаграммами, сводит задачу классификации узлов и нахождения изотопических инвариантов к сложным задачам комбинаторики и алгебры.

Новый альтернативный подход состоит в том, чтобы вкладывать узел или зацепление в объединение трех полуплоскостей с общей граничной прямой. Эти полуплоскости расположены в трехмерном пространстве как три страницы книги.

Трехстраничный подход приводит к принципиально иной комбинаторике и алгебре. Для кодировки узлов теперь используются слова в некотором универсальном конечном алфавите, а роль классических движений Райдемайстера выполняет некоторый конечный набор соотношений. Заданная этими соотношениями полугруппа имеет своим центром множество изотопических классов всех зацеплений. Таким образом, классификация зацеплений сводится к проблеме тождества слов в этой полугруппе.

Трехстраничный подход оказывается полезным для компьютерного распознавания тривиального узла. Классический алгоритм распознавания (Хакен, 1961 г.) далек от компьютерной реализации для диаграм более, чем с 10, пересечениями. Существуют, однако, частичные алгоритмы распознавания, которые проверяют лишь некоторое достаточное условие тривиальности. Один из таких алгоритмов реализован для диаграм, имеющих до 50 пересечений (С. Матвеев, Е. Фоминых, 1997 г.). Частичный алгоритм, основанный на трехстраничном подходе демонстрирует фантастическую скорость и результативность при распутывании диаграмм тривиального узла, имеющих сотни пересечений.

Для понимания доклада не требуется специальных знаний.

Заседание 9 марта 1999 г. А. Каток. *Гладкие действия групп, гиперболическая динамика и жесткость геометрических структур.*

Хорошо известно, что гладкая классификация динамических систем наталкивается на большие трудности и практически необозна. Это связано с тем, что глобальная гладкая структура на пространстве орбит почти никогда не бывает устойчивой относительно малых возмущений.

С другой стороны, многие группы, например, решетки в полупростых группах Ли, обладают “жесткостью” внутренней структуры, которая сказывается на свойствах их линейных представлений (теорема арифметичности Маргулиса, условие “Т” Каждана). Действие таких групп диффеоморфизмами многообразий также обладает определенной жесткостью. Примером может служить жесткость проективного действия $SL(n, \mathbb{Z})$ на S^{n-1} или RP^{n-1} при $n > 4$, которая недавно была доказана С. Ясколко.

Удивительным образом, гладкие действия коммутативных групп, например, R^n или Z^n , $n > 1$, резко отличаются от классической ситуации. Во-первых, устойчивость гладкой структуры пространства орбит относительно малых возмущений действия (локальная жесткость) почти универсальна для гиперболических действий. Во-вторых, чисто измеримая структура таких действий несет большую информацию, то есть из измеримой эквивалентности вытекает дифференцируемая, а часто и алгебраическая. Этот факт находится в контрасте с классическим случаем, где в силу теории изоморфизмов Орнштейна единственным инвариантом измеримой эквивалентности является энтропия.

В докладе объяснена драматическая разница между динамическими системами с классическим и неклассическим временем, подробно рассмотрены характерные примеры, а также поставлены открытые вопросы. Основные результаты доклада опубликованы автором совместно с Р. Спацером, С. Каток, В. Нитикой, А. Тороком и Б. Калининным.

Для понимания доклада требуется знакомство с элементарными свойствами дифференцируемых многообразий, групп Ли и стандартной теорией меры. Значительная часть доклада доступна слушателям, знакомым с программой первых двух курсов университета.

Заседание 16 марта 1999 г. И. М. Кричевер. *Дискретные аналоги метрики Дарбу–Егорова.*

Уравнения ассоциативности или, как их еще называют, уравнения Виттена–Дийкграфа–Верлинде–Верлинде, играют центральную роль в теории топологических квантовых теорий поля, в теории квантовых когомологий и их приложений. Эти уравнения связаны и с теорией возмущений конечнозонных решений солитонных уравнений. Задача классификации решений этих уравнений эквивалентна классической задаче дифференциальной геометрии прошлого века об описании плоских диагональных метрик Дарбу–Егорова. В докладе изложены результаты, связанные с построением дискретного аналога таких метрик. Оказывается, что геометрия соответствующих решеток в евклидовом пространстве описывается набором функций $h_i^\pm(u)$, $u \in \mathbb{Z}^n$, для которых будет получен дискретный аналог уравнений Ламе. Широкий класс этих уравнений может быть получен с помощью методов конечнозонного интегрирования.

Заседание 23 марта 1999 г. С. В. Дужин. *Теорема о четырех красках: в поисках разумного доказательства.* (Студенческие чтения.)

Любую карту на плоскости можно раскрасить в четыре цвета так, что соседние страны будут покрашены в разные цвета. Это утверждение, высказанное в виде гипотезы в середине XIX века, было впервые доказано в 1977 году Appel'ем и Хакеном, которые свели задачу к перебору огромного числа конфигураций, проведенному при помощи компьютера.

В совместной работе четырех авторов (Робертсон, Сандерс, Сеймур, Томас) 1997 года предложен упрощенный вариант доказательства Appel'я и Хакена, в котором объем компьютерных вычислений сокращен в несколько раз. Несмотря на это, для человека все равно практически невозможно проверить все проведенные выкладки вручную.

Таким образом, мы имеем дело с утверждением, чрезвычайно простым по формулировке и доказанным, но не имеющим доказательства, которое мог бы понять человек. Поэтому неудивительно, что попытки найти “человеческое” доказательство теоремы о четырех красках продолжают до сих пор. И, хотя ни одна из попыток пока не увенчалась успехом, на этом пути было найдено множество замечательных эквивалентных переформулировок теоремы о четырех красках (Т4К), относящихся к различным областям математики. О них и пойдет речь в докладе.

В частности, упомянуты следующие наблюдения различных авторов:

1. (L. Kauffman, 1990). Т4К эквивалентна некоторому утверждению об обычном векторном произведении нескольких векторов в $\mathbb{R}^3$.
2. (L. Kauffman, H. Saleur, 1992). Т4К можно переформулировать в виде некоторого свойства алгебр Темперли–Либа.
3. (D. Bar-Natan, 1996). Т4К равносильна некоторому свойству весовых систем для 3-графов, построенных по алгебрам Ли $sl(N)$.
4. (Ю. Матиясевич, 1997). С графом можно связать некоторый многочлен многих переменных, и Т4К эквивалентна некоторому свойству этого многочлена.
5. (Ю. Матиясевич, 1997). Т4К эквивалентна определенному утверждению, касающемуся делимости на 7 значений некоторых специальных линейных функций нескольких целочисленных переменных.

Доклад основан на обзоре Р. Томаса из августовского (1998) выпуска “Notices of AMS” и на статьях Кауффмана, Бар-Натана и Матиясевича, в которых изложены их конструкции.

Заседание 30 марта 1999 г. А. А. Шкаликов. *Проблема инвариантных подпространств и задачи устойчивости.*

В недавней работе А. Г. Костюченко, докладчика и М. Ю. Юркина было дано полное решение задачи об устойчивости движения в задаче Пуанкаре–Соболева о вращающемся волчке с полостью, заполненной жидкостью. Задача была сведена к изучению диссипативного оператора

в пространстве с индефинитной метрикой. Для таких операторов установлена общая формула индекса неустойчивости, которую удалось вычислить явно для задачи Пуанкаре–Соболева. Основным инструментом в исследовании явилась теорема о существовании максимальных знакоопределенных подпространств для некоторых классов операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Для различных классов операторов эта теорема была установлена Л.С. Понтрягиным, М.Г. Крейном, Г.К. Ланжером, Р. Филлипсом и другими. В свою очередь проблема инвариантных подпространств тесно связана с проблемой факторизации оператор-функции, исследование которой проводили А.Н. Колмогоров, Н. Винер, де Бранж, В.И. Мацаев, И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, Г.К. Лангер и многие другие.

В докладе идет речь о следующем.

1) Новое “элементарное” доказательство теоремы об инвариантных подпространствах и пространствах Крейна (по работе докладчика)

2) Формула индекса неустойчивости для динамических систем с бесконечными степенями свободы.

3) Проблема факторизации, выделение одноканальных гамильтонианов.

Хотя в докладе используются понятия теории неограниченных операторов, параллельно будет проводиться интерпретация на матричном уровне, поэтому для понимания доклада достаточно знаний по линейной алгебре в объеме 1–2 курсов.

6 апреля 1999 г. Заседание, посвященное памяти Людмилы Филипповны Зеликиной.

Математические работы Л.Ф. Зеликиной относятся к области оптимального управления и теории дифференциальных игр. Ею впервые был построен нетривиальный синтез оптимальных траекторий в n -мерном фазовом пространстве, который содержал стратифицированное универсальное многообразие, состоящее из особых оптимальных траекторий. Многообразие M называется универсальным, если все оптимальные траектории, лежащие в его достаточно малой окрестности, выходят на M и движутся по нему. Л.Ф. Зеликиной была решена проблема Р. Айзекса, который поставил вопрос: является ли универсальное многообразие произвольной размерности пересечением универсальных гиперповерхностей? В ее работах были найдены и исследованы задачи, в которых имелись как изолированные универсальные многообразия произвольной размерности, так и многообразия являющиеся пересечением универсальных гиперповерхностей. Л.Ф. Зеликина доказала красивую теорему о гладкости оптимального значения минимизируемого функционала как функции от начального состояния системы (так называемая функция Беллмана) на универсальном многообразии, состоящем из особых экстремалей. В результате был создан метод построения оптимального синтеза, связанный с выделением геометрических инвариантов этого синтеза. Эта серия работ выросла из экономических исследований магистральных многообразий для задач с непрерывным временем. Изящными результатами этих исследований являются теорема о распределении капиталовложений на магистрали пропорционально эластичностям выпуска, теорема об оптимальности скользящего планирования, теорема об инвариантности объективно обусловленных оценок. В работах Л.Ф. Зеликиной был введен и изучен класс дифференциальных игр с односторонним входящим управлением, обобщающий игры преследования односторонних объектов Н.Н. Красовского. Последняя ее предсмертная работа (совместно с М.И. Зеликиным) была посвящена исследованию асимптотики оптимального значения функционала на траекториях с бесконечным числом переключений на конечном интервале времени при их аппроксимации траекториями с конечным числом переключений. Эта работа, в частности, дала возможность вычислить точное значение одной из констант Колмогорова.

Уникальна общественная экологическая деятельность Л.Ф. Зеликиной. Она сыграла выдающуюся роль в борьбе против проектов поворота северных и сибирских рек на юг. Она стояла у истоков создания и была членом Бюро международной ассоциации ученых “Экология и Мир”, объединившей виднейших ученых Академии наук, обеспокоенных экологической ситуацией в России. На боевом счету этой ассоциации победа над десятком грандиозных природоразрушительных проектов. До последних дней своей жизни Людмила Филипповна была незаменимым ученым секретарем Высшего Экологического Совета (ВЭС) Государственной Думы Российской Федерации.

С воспоминаниями о Людмиле Филипповне Зеликиной выступили Г.С. Голицын, М.И. Зеликин, В.П. Маслов, Ю.С. Осипов, В.М. Тихомиров, И.Р. Шафаревич, Т.М. Энеев.

Заседание 13 апреля 1999 г. Е. В. Панкратьев. *Дифференциальная компьютерная алгебра.*

В 1952 г. А. Эйнштейн следующим образом ввел понятие “жесткости” системы уравнений поля: “... систему уравнений поля следует выбирать так, чтобы полевые величины определялись этой системой как можно более жестким образом. Чтобы применять этот принцип, нам нужен метод, который позволял бы дать меру жесткости системы уравнений. Поступим следующим образом: разложим переменные поля вблизи точки P в ряд Тейлора (предполагается аналитический характер поля). Коэффициенты разложения, которые представляют собой не что иное, как производные элементов поля в точке P , распадаются на группы соответственно порядку дифференцирования. В каждом порядке дифференцирования мы на первых порах получаем набор коэффициентов, которые можно было бы выбрать произвольно, если бы поле не должно было удовлетворять системе уравнений. Благодаря наличию системы дифференциальных уравнений (и уравнений, получаемых из них путем дифференцирования по координатам) число независимых коэффициентов уменьшается, так что в каждой группе уже меньшее число коэффициентов может быть выбрано произвольно. Количество “свободных” коэффициентов в каждой группе непосредственно дает меру “слабости” системы уравнений и, таким образом, определяет “жесткость” системы.”

В 1964 году Е. Колчин ввел понятие дифференциального размерностного многочлена, описывающего “число степеней свободы” в общем решении системы уравнений в частных производных и являющегося разновидностью многочлена Гильберта. Примеры вычисления А. Эйнштейном “жесткости” различных систем можно рассматривать как примеры вычисления дифференциальных размерностных многочленов.

Вычисление дифференциального размерностного многочлена распадается на два этапа: сначала система уравнений в частных производных приводится к некоторому стандартному виду, аналогичному базисам Гребнера в коммутативной алгебре, а затем решается комбинаторная задача, которая возникает также при вычислении многочленов Гильберта по известному базису Гребнера полиномиального идеала.

Заседание 20 апреля 1999 г. М. А. Цфасман. *Асимптотическая теория глобальных полей и обобщенная теорема Брауэра–Зигеля.*

Основная теорема арифметики утверждает, что целое число однозначно разлагается в произведение простых сомножителей. Это, вообще говоря, перестает быть верным, если заменить поле рациональных чисел на его конечное расширение. Так в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ имеется соотношение $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 2 \cdot 3$. Однозначность разложения в произведение простых элементов кольца приходится заменить на однозначность разложения в произведение простых идеалов. Мерой же отклонения кольца от настоящей однозначности разложения является число h классов идеалов – одно из центральных понятий теории чисел, интенсивно изучающееся со времен Гаусса.

Гаусс поставил вопрос о конечности числа мнимых квадратичных полей (т.е. полей вида $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$, $d > 0$), обладающих однозначностью разложения (т.е. имеющих $h = 1$). В 1930-е годы конечность была доказана Хейльбронем, а затем Зигель показал, что число классов растет с ростом d примерно как $\sqrt{d}$. Десятью годами позже Брауэр обобщил эту теорему на числовые поля любой степени, удовлетворяющие определенным дополнительным ограничениям; он доказал, что

$$\lim \frac{\log hR}{\log \sqrt{|D|}} \rightarrow 1.$$

В этой формуле предел берется по бесконечной последовательности числовых полей с растущей абсолютной величиной дискриминанта D , а R обозначает регулятор числового поля – другой важнейший его параметр.

Вопрос о необходимости дополнительных условий в теореме Брауэра–Зигеля, важнейшее из которых – быстрый рост дискриминанта по отношению к степени поля, оставался открытым до самого недавнего времени. Несколько лет назад докладчику удалось ответить на аналогичный вопрос в функциональном случае, когда вместо числовых полей рассматриваются алгебраические кривые. Условие на скорость роста дискриминанта необходимо, в его отсутствие предел

не обязательно равен 1, однако можно ограничить возможный диапазон изменения отношения $\frac{\log hR}{\log \sqrt{|D|}}$. В прошлом году С.Г. Влэдуц и докладчику удалось разобрать и числовой случай. Условие на рост также необходимо. Контрпримерами являются некоторые бесконечные башни полей классов, как например башни, начинающиеся с полей $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{11}, \sqrt{23}, \sqrt{-2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67})$ с некоторыми дополнительными условиями на распадение простых идеалов.

В свете этой и ряда аналогичных проблем, возникает потребность в создании асимптотической теории числовых полей и алгебраических многообразий, лежащей на перекрестке теории чисел, алгебраической геометрии, алгебры и анализа.

Заседание 27 апреля 1999 г. В. М. Бухштабер. *Полиномы, удовлетворяющие теореме Римана об обращении в нуль и их приложения.*

В теории абелевых функций на якобианах ключевую роль играют целые функции, удовлетворяющие теореме Римана об обращении в нуль.

В недавней работе автора, Д. В. Лейкина и В. З. Энольского введены полиномы, удовлетворяющие аналогу этой теоремы и показано, что они полностью характеризуются этим свойством. Такие полиномы названы полиномами Шура–Вейерштрасса, так как они построены по полиномам Шура S_π для специальных разбиений $\pi = \pi(W)$, отвечающих последовательностям пробелов Вейерштрасса W , играющим важную роль в теории алгебраических функций.

Классические полиномы Шура, широко известные в теории симметрических функций и теории представлений, в последнее время опять оказались в центре внимания благодаря задачам построения рациональных решений интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений. Полином Шура для произвольного разбиения приводит к рациональному решению знаменитой иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Возник вопрос о связи этих решений с решениями, полученными в терминах абелевых функций на якобианах.

Предложенный подход на основе теоремы Римана об обращении в нуль позволил получить ответ на этот вопрос в случае якобианов алгебраических кривых, определяемых последовательностями Вейерштрасса.

Основные определения и конструкции приведены в докладе, поэтому для понимания его специальных знаний не требовалось.

Заседание 18 мая 1999 г. П. Картье (P. Cartier, Ecole Normal Supérieure, Paris). *A new perspective on functional integration and renormalization group in quantum field theory. (Новый взгляд на функциональное интегрирование и ренормализационную группу в квантовой теории поля.)*

Дается аксиоматическое описание функционального интегрирования в форме, приспособленной как для обыкновенной квантовой механики (конечное количество степеней свободы), так и для квантовой теории поля. Активно используется, так-называемое, преобразование Баргманна–Сегала, или, что то же самое, общая форма упорядочения Вика. Далее этот метод используется для наброска нового подхода к ренормализации через ренормализационную группу. Следуя методам Полчинского, развитым в последнее время Бриджесом, мы можем сформулировать уравнения для ренормализационного потока непосредственно в терминах пространства Минковского, без использования аналитического продолжения. Вместо урезания энергии в ультрафиолетовой части мы вводим масштаб переменной длины и обращаемся с ним как с *пятой размерностью пространства*. Доклад основан на недавней совместной работе с Девитт–Моретт (C. Dewitt–Morette).

Заседание 25 мая 1999 г. С. Смейл (S. Smale, Berkley – Hong Kong). *Mathematical problems for the next century. (Математические проблемы для следующего века.)*

Автор предложил ряд задач, которые он считает очень важными для XXI века.