Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, В. И. Арнольд, Д. Г. Васильев, М. И. Вишик, И. М. Гельфанд, А. Г. Костюченко, Л. Д. Кудрявцев, Виктор Борисович Лидский (к семидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 1999, том 54, выпуск 5, 197–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 06:53:05

ВИКТОР БОРИСОВИЧ ЛИДСКИЙ
(к семидесятипятилетию со дня рождения)

Виктор Борисович Лидский родился 4 мая 1924 года в Одессе в семье врача. Закончил среднюю школу за два дня до начала войны – 20 июня 1941 г.; был направлен в военное училище и окончил его в феврале 1943 г. С апреля 1943 г. до окончания войны он был на фронте: начал на северном фланге Курской дуги, а закончил вечером 8 мая 1945 г. в Праге. На фронте он участвовал в боевых разведывательных операциях и был награжден тремя орденами (впоследствии еще двумя) и медалью “За отвагу”. В августе 1946 г. он демобилизовался и поступил на мех-мат МГУ.

После окончания университета, с 1951 по 1954 гг., В.Б. Лидский преподавал математику в Московском химико-технологическом техникуме. Одновременно он учился в заочной аспирантуре под руководством И.М. Гельфанда. В 1954 г. Виктор Борисович защитил кандидатскую диссертацию, посвященную системам обыкновенных дифференциальных уравнений, на мех-мате МГУ. С того же года он начинает преподавать в Московском физико-техническом институте. В 1959 г. он защищает докторскую диссертацию “Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром” в Отделении прикладной математики Математического института им. В.А. Стеклова, и вскоре получает звание профессора.

В.Б. Лидскому принадлежит ряд фундаментальных результатов в нескольких областях теории дифференциальных уравнений, математической физики и спектральной теории операторов.

В его кандидатской диссертации основными были осцилляционные теоремы для гамильтоновой системы [5]

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = IH(t)y,$$

где $H(t) - 2k \times 2k$ вещественная непрерывная симметрическая матрица (гамильтониан), а $I = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix}$. Известно, что к самосопряженным задачам для систем (1) приводятся весьма общие самосопряженные задачи для уравнений высоких порядков.

Пусть $Y(t)$ – матрицант системы (1), т.е. фундаментальная матрица, равная единичной матрице E_{2k} при $t = 0$. Матрица $Y(t)$ симплектична, т.е. $Y^*(t)IY(t) = I$. Положим

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix},$$

где $h_{ij}(t)$ и $y_{ij}(t)$ – блоки размеров $k \times k$. В.Б. Лидский предложил переход к нелинейной системе (явно выписываемой) с искомой матрицей

$$(2) \quad u(t) = (y_{11}(t) - iy_{12}(t))^{-1}(y_{11}(t) + iy_{12}(t)).$$

Например, в случае системы 2-го порядка

$$y'' = P(t)y + F(t)$$

с $P^*(t) = P(t)$ соответствующая система для $u(t)$ имеет вид

$$u'_t = -i \left\{ E_k + \frac{1}{2}(u + u^*) - \frac{1}{2}(E_k - u)P(t)(E_k - u^*) \right\} u.$$

Существенно, что матрица $u(t)$ унитарна и симметрична, и для численного анализа удобнее интегрировать систему с $u(t)$ вместо традиционной прогоночной матрицы [19]. Теорема о перемежаемости состоит в следующем. Пусть $h_{22}(t) > 0$. Тогда при возрастании t собственные значения $\rho_\nu(t)$ матрицы $u(t)$ строго монотонно вращаются по единичной окружности против часовой стрелки. При $\rho_\nu(t_1) = -1$ у $y_{11}(t_1)$ возникает нулевое подпространство той же размерности, что и у $u(t_1)$, а при $\rho_\nu(t_2) = +1$ у $y_{12}(t)$. Тем самым “нули” матриц $y_{11}(t)$ и $y_{12}(t)$ перемежаются.

В.Б. Лидский доказал также аналог теоремы сравнения Штурма: для системы

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} = [IH(t) + \lambda IQ(t)]y$$

с $Q(t) > 0$ и $\lambda > 0$ собственные значения $\rho_\nu(t, \lambda)$ движутся “вперед” $\rho_\nu(t, 0)$.

Отдельно следует остановиться на важных результатах статьи И.М. Гельфанда и В.Б. Лидского [6] о структуре областей устойчивости гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами: $H(t + \omega) = H(t)$. Система (1) называется сильно устойчивой, если все ее решения ограничены при $-\infty < t < \infty$ и если это свойство сохраняется при достаточно малом возмущении гамильтониана $H(t)$. Поскольку в этом случае для матрицанта $Y(t)$ справедливо тождество $Y(t + m\omega) = Y(t)[Y(\omega)]^m$, для ограниченности решений необходимо и достаточно, чтобы мультипликаторы, т.е. собственные значения матрицы монодромии $Y(\omega)$, лежали на единичной окружности и чтобы при этом все отвечающие им корневые векторы были собственными векторами.

Это условие, однако, не является достаточным для сильной устойчивости, что было отмечено в работе М.Г. Крейна (Докл. АН СССР. Т. 63, № 3, 1950), который разделил мультипликаторы с учетом их зависимости от включаемого в систему спектрального параметра на две группы – мультипликаторы первого рода и второго рода. В сильно устойчивом случае, как показано в [6], мультипликатору первого рода отвечает J -положительное инвариантное относительно $Y(\omega)$ подпространство: $(Jf, f) > 0$ для ненулевых векторов f , где $J = -iI$. Мультипликатору второго рода отвечает J -отрицательное инвариантное подпространство. Слияние на единичной окружности мультипликаторов разного рода приводит к нарушению сильной устойчивости. В [6] приведен соответствующий пример.

Основной результат работы [6] состоит в том, что каждая область устойчивости характеризуется одним и тем же типом чередования мультипликаторов первого и второго рода на верхней полуокружности (всего имеется 2^k типов) и, кроме того, некоторым целым числом n – индексом системы. При совпадении указанных характеристик и только в этом случае две периодические системы (1) связаны гомотопией в классе сильно устойчивых систем.

Теория несамосопряженных операторов, которой посвящена докторская диссертация Виктора Борисовича, восходит к знаменитым работам Т. Карлемана и М.В. Келдыша. Результаты В.Б. Лидского сыграли существенную роль в развитии этой теории. Сформулируем некоторые из них.

Пусть A – оператор Гильберта–Шмидта в гильбертовом пространстве H , т.е. $\sum s_\nu^2(A) < \infty$, где $s_j(A)$ – сингулярные числа оператора A , т.е. ненулевые собственные значения оператора $(A^*A)^{1/2}$. Пусть значения квадратичной формы (Af, f) не выходят за пределы сектора раствора $\pi/2$. Тогда система корневых (т.е. собственных и присоединенных) векторов оператора A полна в AH .

Пусть, далее, A – ядерный оператор в H , т.е. $\sum s_j(A) < \infty$, и значения квадратичной формы (Af, f) не выходят за пределы полуплоскости. Тогда также имеет место полнота корневых векторов оператора A в AH .

Указанные теоремы позволили доказать полноту корневых векторов для операторов, отвечающих широкому классу эллиптических задач с однородными граничными условиями. Впоследствии они были обобщены В. Б. Лидским следующим образом (см. [21], [22]). Пусть

$$(4) \quad -\frac{\pi}{2\rho'} \leq \arg(Af, f) \leq \frac{\pi}{2\rho'}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} s_{\nu}^{\rho}(A) < \infty.$$

Тогда при $\rho' \geq \max(\rho, 1/2)$ система корневых подпространств оператора A полна в АН. Более того, если $\rho' > \max(\rho, 1/2)$, то формальный ряд Фурье для $f \in \text{АН}$ по корневым векторам оператора A допускает суммирование к f методом, который В. Б. Лидский определил и назвал методом Абеля. Чтобы дать представление о нем, предположим для простоты, что все характеристические числа λ_s оператора A (т.е. величины, обратные к его отличным от нуля собственным значениям) простые, и пусть они занумерованы натуральными числами в порядке возрастания. Пусть e_s – соответствующие собственные векторы оператора A . Зафиксируем число $\alpha \in (\rho, \rho')$ (порядок метода Абеля).

Пусть $f \in \text{АН}$ и $f \sim \sum c_s e_s$ – формальный ряд Фурье вектора f по векторам e_s . Тогда существует возрастающая последовательность целых чисел N_{ν} с $N_0 = 0$, такая, что ряд

$$(5) \quad u(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{s=N_{\nu}+1}^{N_{\nu+1}} e^{-t\lambda_s^{\alpha}} c_s e_s$$

сходится при $t > 0$ и $\lim_{t \rightarrow +0} u(t) = f$.

Отметим, что при $\alpha = 1$ последний результат приложим к построению решений задачи Коши и смешанных задач для параболических уравнений в частных производных второго порядка [20].

В. Б. Лидскому принадлежит также классический результат о том, что для ядерных операторов спектральный след и матричный след совпадают [14].

Укажем, далее, на цикл работ В. Б. Лидского, выполненных совместно с В. А. Садовничим [30], [31], [33], [34], в развитие тождеств Гельфанда–Левитана для собственных значений дифференциальных операторов второго порядка. В этих статьях была выявлена аналитическая сторона проблемы. В работе [30] рассматривается целая аналитическая функция

$$(6) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,h}(z),$$

где

$$(7) \quad P_{k,h}(z) = z^{n_k} \sum_{\nu=0}^h \beta_{\nu}^{(k)} z^{-\nu} + o(z^{n_k-h}) \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

h – любое целое неотрицательное число. Комплексные числа α_k и $\beta_{\nu}^{(k)}$ называются параметрами асимптотики (6)–(7). Такой вид (6) имеет, в частности, левая часть уравнения для собственных значений одномерной краевой задачи для дифференциального уравнения (не обязательно самосопряженной), при этом параметры асимптотики явно выражаются через коэффициенты уравнения и граничных условий. Для нулей z_l функции $f(z)$ доказываются равенства вида

$$(8) \quad \sum_{l=1}^{\infty} \{z_l^m - A_m(l)\} = \sigma_m \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где числа $A_m(l)$ обеспечивают сходимость рядов и выражаются через параметры асимптотики; числа σ_m также явно вычисляются. В благоприятных ситуациях систему (8) удастся оборвать и заменить конечной системой, приближенно определяющей точки спектра.

В течение более 20 лет, с 1966 г. по 1988 г., В. Б. Лидский параллельно с преподаванием в МФТИ работал в Институте проблем механики Академии наук, где в основном занимался исследованием колебаний тонких упругих оболочек. Колебания изучались в вакууме, а также в контакте с

жидкостью. Отметим, что уравнения теории оболочек известны и широко используются в технике с 19 столетия, но до работ Виктора Борисовича практически не было строгих результатов по спектральным свойствам оператора теории оболочек. Эти результаты были блестящим ответом чистого математика на реальные технические запросы. Подчеркнем, что это глубокие конкретные результаты в далеко не стандартной и не простой ситуации. Приведем их краткое описание.

Линейный оператор теории тонких оболочек имеет вид

$$(9) \quad L_h y = (h^2 N + K)y.$$

Здесь N и $K - 3 \times 3$ -матрицы, элементами которых являются операторы в частных производных, y -три-вектор $(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta))$, (α, β) - координаты точки срединной поверхности оболочки G . Операторы N и K формально симметричны и являются эллиптическими операторами в смысле Дуглиса-Ниренберга; в N эти операторы имеют порядки $t_i + t_j$, где $t_1 = t_2 = 1$ и $t_3 = 2$, а в K - порядки $s_i + s_j$, где $s_1 = s_2 = 1$ и $s_3 = 0$. В формуле (9) h - безразмерный малый параметр, пропорциональный толщине оболочки. При $h = 0$ оператор $L_0 = K$ называется безмоментным. Если оболочка G незамкнута, то на ее границе Γ ставятся четыре граничных условия, при которых формула (9) определяет самосопряженный оператор $\mathcal{L}_h$. Спектр этого оператора дискретен и неотрицателен.

1°. Пусть $n_h(\lambda)$ - функция распределения собственных значений оператора $\mathcal{L}_h$: $n_h(\lambda) = \sum_{\lambda_n(h) < \lambda} 1$. Тогда при $h \rightarrow +0$

$$(10) \quad n_h(\lambda) = \alpha(\lambda)h^{-1} + o(h^{-1}),$$

где

$$(11) \quad \alpha(\lambda) = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{8\pi^2} \iint_G \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda - k^2(\alpha, \beta, \theta)} d\theta \right) dS_G.$$

Здесь $k(\alpha, \beta, \theta) = k_1(\alpha, \beta) \sin^2 \theta + k_2(\alpha, \beta) \cos^2 \theta$, где k_1 и k_2 - главные кривизны оболочки, т.е. k - кривизна нормального сечения, проведенного через данную точку на оболочке под углом θ к направлению с кривизной k_2 . Интеграл берется по множеству, где подкоренное выражение положительно; ν - коэффициент Пуассона.

При $h = 0$ оператор $\mathcal{L}_0$ тоже самосопряжен (два граничных условия при $h = 0$ опускаются). Но спектр этого оператора устроен сложно. Он, в отличие от оператора $\mathcal{L}$ с $h > 0$, содержит две зоны непрерывного спектра: множество Ψ_1 , совпадающее со значениями функции $k(\alpha, \beta, \theta)$, на нем нарушается эллиптичность оператора $\mathcal{L}_0 - \lambda$, и "менее заметное" множество Ψ_2 , где нарушается условие Шапиро-Лопатинского. Вне $\Psi_1 \cup \Psi_2$ спектр дискретен. При этом Ψ_1 - зона наивысшей плотности частот оператора $\mathcal{L}_h$ с $h > 0$.

2°. Пусть оболочка G замкнута и ограниченная ею область заполнена идеальной сжимаемой жидкостью. Тогда задача "оболочка-жидкость" является самосопряженной при некотором выборе скалярного произведения. Спектр отвечающего задаче оператора дискретен, и при $\lambda > 0$ справедлива формула

$$(12) \quad n_h(\lambda) = c_1(\lambda)h^{-6/5} + c_2(\lambda)h^{-4/5} + c_3(\lambda)h^{-3/5} + o(h^{-3/5}),$$

где коэффициенты $c_i(\lambda)$ получаются разложением единственного положительного корня $r_0(\lambda, h)$ уравнения

$$(13) \quad \frac{2\rho_0 h^3 r^5}{3(1-\nu^2)} + 2\rho_0 h(k^2 - \lambda)r = \rho_1 \lambda$$

по обратным степеням параметра h и последующим интегрированием r_0^2 по $dS_G d\theta$; ρ_1 и ρ_0 - плотности жидкости и оболочки, k - то же, что и в (11). Предполагается, что оболочка удовлетворяет некоторому геометрическому условию Дейстермата и Гийемина (равенства нулю меры "периодических" точек в кокасательном расслоении). См. [65].

3°. Пусть теперь оболочка погружена в идеальную сжимаемую жидкость в неограниченном пространстве. Соответствующая задача является уже несамосопряженной. Предположим, что к оболочке приложена внешняя нагрузка $e^{-i\omega t}g(\alpha, \beta)$, где ω – ее частота. Тогда вектор-функция $f_g(x, \omega)$, удовлетворяющая системе “оболочка–жидкость”, условиям непротекания и излучения (при $|x| \rightarrow \infty$), мероморфна по ω с полюсами в верхней полуплоскости. Полюсы этой функции, расположенные в прямоугольнике $0 < a \leq \operatorname{Re} \omega \leq b$, $0 < \operatorname{Im} \omega < h^\alpha$, где $\alpha < 1$, при естественной нумерации таковы, что

$$(14) \quad n_h(\omega) = c_1(\omega)h^{-6/5} + c_2(\omega)h^{-4/5} - c_3(\omega)h^{-3/5} + o(h^{-3/5}),$$

где $c_i(\omega)$ – те же, что и в (12). На вещественной оси в точках $\operatorname{Re} \omega_l$ возникают квазирезонансы. Некоторым из них отвечают акустические волны, далеко проникающие в жидкость. См. [69], [71].

Кроме большого количества журнальных статей по теории оболочек (см. список ниже), В.Б. Лидский написал совместно со своими коллегами монографии [48] и [60], это теперь классические источники по затронутым здесь вопросам. Отметим, что за работы по теории оболочек Виктор Борисович вместе с коллективом сотрудников был удостоен в 1998 г. Государственной премии Российской Федерации.

Наряду с научной деятельностью В.Б. Лидский уделяет много сил и времени работе со своими учениками, всегда ориентируя их на решение принципиально важных задач. В МФТИ он прочитал много специальных курсов и является соруководителем научного семинара кафедры математики. Под его руководством успешно закончили аспирантуру и защитили кандидатские диссертации более 20 человек. Среди них – активно действующие в разных направлениях математики и механики А.Г. Асланян, Д.Г. Васильев, Г.А. Калябин, А.О. Кравицкий, Н.В. Кузнецов, М.Р. Левитин, В.А. Романов, Б.В. Федосов, И.Г. Хачатрян.

Более 30 лет Виктор Борисович работает членом редколлегии и заместителем главного редактора журнала “Функциональный анализ и его приложения”.

Все, кто сотрудничал или близко общался с Виктором Борисовичем, знают о его исключительной добросовестности и требовательности к себе, благожелательности, широте интересов и замечательной математической интуиции.

Пожелаем ему крепкого здоровья и многих лет дальнейшей активной и плодотворной творческой и педагогической работы.

*М. С. Агранович, В. И. Арнольд, Д. Г. Васильев, М. И. Вишик,
И. М. Гельфанд, А. Л. Гольдштейн, А. Г. Костюченко, Л. Д. Кудрявцев*

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ В.Б. ЛИДСКОГО

- [32] Дифференциальные формы. Ориентация поверхностей. Формула Стокса // МФТИ. Долгопрудный. 1967. С. 1–45
- [33] Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Матем. сб. 1968. Т. 75 (117). № 4. С. 558–566 (совм. с В.А. Садовничим)
- [34] Формулы следов в случае уравнения Орра–Зоммерфельда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. С. 633–648 (совм. с В.А. Садовничим)
- [35] О спектре эллиптического уравнения // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 4. С. 495–502 (совм. с А.Г. Асланяном)
- [36] Компоненты связности нормально разрешимых эллиптических систем на плоскости // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 4 (совм. с П.А. Фроловым)
- [37] Спектр системы безмоментных уравнений в случае осесимметричных колебаний оболочки вращения // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 4 (совм. с Н.В. Харьковской)
- [38] Осцилляционная теорема в теории колебаний тонких упругих оболочек вращения // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 5. С. 1040–1042 (совм. с А.Г. Асланяном)
- [39] Спектральные свойства системы, описывающей собственные колебания оболочек вращения // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. № 2. С. 300–303 (совм. с А.Г. Асланяном)

Продолжение. Начало списка см. в книгах “Математика в СССР за 40 лет”, т. II, Физматгиз, 1959, и “Математика в СССР, 1958–1967”, Наука, 1969.

- [40] Асимптотические формулы для нижней серии в теории оболочек вращения // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1971. Т. 6. № 2–3. С. 113–130 (совм. с А. Г. Асланяном)
- [41] Асимптотические ряды для решения задачи Коши // СМЖ. 1971. Т. 12. № 4 (совм. с А. О. Кравицким)
- [42] Спектр системы, описывающей колебания оболочки вращения // ПММ. 1971. Т. 35. № 4. С. 701–717 (совм. с А. Г. Асланяном)
- [43] Асимптотика функции распределения собственных частот оболочки вращения // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1972. Т. 7. С. 236–239 (совм. с А. Г. Асланяном)
- [44] Распределение собственных частот тонких оболочек // МТТ. 1972. № 3. С. 155 (совм. с А. Г. Асланяном)
- [45] Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // СМЖ. 1973. Т. 14. № 5 (совм. с Г. И. Эскиным и Г. Р. Гулгазаряном)
- [46] Распределение собственных частот тонкой упругой оболочки произвольного очертания // ПММ. 1973. Т. 37. № 4. С. 604–617 (совм. с А. Г. Асланяном, З. Н. Кузиной и В. Н. Туловским)
- [47] Спектр частот оболочки вращения // Теория оболочек и пластин. Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973. С. 371–375 (совм. с А. Г. Асланяном)
- [48] Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974 (совм. с А. Г. Асланяном)
- [49] Некоторые общие свойства свободных колебаний тонкой упругой оболочки // МТТ. 1974. Т. 9. № 2. С. 120–124 (совм. с А. Л. Гольденвейзером)
- [50] Асимптотика функции распределения собственных частот колебаний оболочки вращения с фиксированным числом волн по параллели // Препринт № 38. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1974 (совм. с А. Г. Асланяном, С. А. Луковенко и Н. В. Харьковой)
- [51] Формула для числа частот осесимметричных колебаний оболочки вращения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 4 (совм. с А. Г. Асланяном)
- [52] Распределение собственных частот тонкой упругой оболочки // Теория оболочек и пластин. Труды IX Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. Л.: Судиздат, 1975. С. 157–160 (совм. с А. Г. Асланяном, Г. Р. Гулгазаряном и Н. В. Харьковой)
- [53] Об одной оценке резольвенты эллиптического дифференциального оператора // Функци. анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 4. С. 89–90
- [54] Математические задачи теории колебаний тонких оболочек // Нерешенные задачи механики и прикладной математики. М.: МГУ, 1977. С. 92–97
- [55] Спектры собственных частот тонких упругих оболочек // XI Всесоюзная конф. по теории оболочек и пластин. Харьков, 1977. С. 22 (совм. с А. Г. Асланяном и Г. Г. Тарпошяном)
- [56] Выделение регулярных ветвей многозначных функций. Учебное пособие // МФТИ. Долгопрудный. 1977
- [57] Формула для числа частот осесимметричных колебаний оболочек вращения // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 12. № 8. С. 1355–1365
- [58] Свободные колебания тонких упругих оболочек // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию И. Г. Петровского, 1976. М.: МГУ, 1978. С. 33–35 (совм. с А. Г. Асланяном и А. Л. Гольденвейзером)
- [59] Некоторые математические задачи теории колебаний тонких упругих оболочек // УМН. 1978. Т. 33. № 2. С. 225–226 (совм. с А. Л. Гольденвейзером)
- [60] Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979 (совм. с А. Л. Гольденвейзером и П. Е. Товстиком)
- [61] Колебания тонких оболочек, взаимодействующих с жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 5 (совм. с А. Г. Асланяном и Д. Г. Васильевым)
- [62] Колебания тонких оболочек, взаимодействующих с жидкостью // УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 255–256 (совм. с А. Г. Асланяном и Д. Г. Васильевым)
- [63] Частоты свободных колебаний оболочек, взаимодействующих с жидкостью // Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1980

- [64] Распределение собственных частот тонкой упругой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // УМН. 1981. Т. 36. № 4. С. 216 (совм. с А. Г. Асланяном и Д. Г. Васильевым)
- [65] Частоты свободных колебаний тонкой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // Функц. анализ и прил. 1981. Т. 15. № 3. С. 1–9 (совм. с А. Г. Асланяном и Д. Г. Васильевым)
- [66] Собственные колебания оболочки, взаимодействующей с жидкостью // Труды II-го Всесоюзного симпозиума по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. Декабрь, 1979. М.: Наука, 1982. С. 264–266 (совм. с А. Г. Асланяном и Д. Г. Васильевым)
- [67] Оболочечная теория // Статья в Математической энциклопедии. Т. 3, 1982
- [68] Плотность частот свободных колебаний анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3 (совм. с Г. Р. Гулغازяном)
- [69] Колебания тонких оболочек, контактирующих с жидкостью // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 224–225 (совм. с Д. Г. Васильевым)
- [70] Спектры в теории оболочек // Международная конференция по дифференциальным уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1983. С. 59–60
- [71] Спектры в теории оболочек // Успехи механики. 1984. Т. 7. № 2. С. 25–54 (совм. с П. Е. Товстиком)
- [72] Вынужденные колебания системы оболочка – жидкость // УМН. 1984. № 4. С. 131–132
- [73] Асимптотика решений задачи об излучении акустической волны оболочкой, погруженной в вязкую сжимаемую жидкость // Математические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 30–35 (совм. с Д. Г. Васильевым)
- [74] Квазирезонансы в задаче о вынужденных колебаниях тонкой упругой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 4. С. 17–28 (совм. с Д. Г. Васильевым)
- [75] Вынужденные колебания тонкой оболочки, взаимодействующей с жидкостью // УМН. 1986. Т. 41. № 4. С. 157–158 (совм. с Д. Г. Васильевым)
- [76] Колебания оболочки, наполненной вязкой сжимаемой жидкостью // Труды XIV Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Кутаиси, 20–23 окт. 1987. Т. 1. Тбилиси: ТГУ. С. 279–284 (совм. с Д. Г. Васильевым и М. Р. Левитиным)
- [77] Вынужденные колебания оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью // УМН. 1988. Т. 43. № 4. С. 164 (совм. с Д. Г. Васильевым и М. Р. Левитиным)
- [78] Дополнение в кн.: Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Изд. 4. М.: Наука, 1988
- [79] Колебания оболочки, заполненной жидкостью // Engineering-Aero-Hydroelasticity. Praha. № 5–8. С. 186–190 декабрь 1989 (совм. с А. Л. Гольденвейзером, Д. Г. Васильевым и Ю. Д. Каплуновым)
- [80] Вынужденные колебания оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 2. С. 329–332 (совм. с Д. Г. Васильевым и М. Р. Левитиным)
- [81] Механическая система оболочка – вязкая сжимаемая жидкость // Республиканская конференция по функциональному анализу и его приложениям. Одесса, ноябрь 1990. С. 25
- [82] О вынужденных колебаниях оболочки, погруженной в вязкую сжимаемую жидкость // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25. № 4. С. 93–95 (совм. с Д. Г. Васильевым и М. Р. Левитиным)
- [83] Колебания тонкой упругой оболочки, взаимодействующей с вязкой сжимаемой жидкостью // VII Всесоюзный съезд механиков, 15–21/VIII-1994. С. 73–75 (совм. с Д. Г. Васильевым и М. Р. Левитиным)
- [84] Формула для функции распределения частот тонкой оболочки вращения в случае простой точки поворота // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28. № 4. С. 74–77 (совм. с Д. Г. Васильевым и А. Г. Асланяном)
- [85] Формула Кирхгофа // Phys-Tech Journal. 1996. Т. 2. № 5. С. 21–34
- [86] Асимптотические формулы для частот осесимметричных колебаний оболочки вращения // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38. № 2. С. 298–309 (совм. с А. А. Асланяном и А. Г. Асланяном)