Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Модули вещественных алгебраических кривых и их супераналоги. Дифференциалы, спиноры и якобианы вещественных кривых, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 3–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 08:51:49

МОДУЛИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ИХ СУПЕРАНАЛОГИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ, СПИНОРЫ И ЯКОБИАНЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КРИВЫХ

С. М. НАТАНЗОН

Обзор посвящен различным аспектам теории вещественных алгебраических кривых. Инволюция комплексного сопряжения индуцирует антиголоморфную инволюцию $\tau: P \rightarrow P$ на комплексификации P вещественной кривой. Инволюция действует на все структуры, связанные с римановой поверхностью P : векторные расслоения, якобианы, приммианы и др. Большая часть обзора посвящена выявлению возникающих при этом топологических инвариантов и исследованию соответствующих пространств модулей. Постановки этих проблем были инспирированы приложениями теории вещественных кривых к задачам математической физики (теория солитонов, теория струн и др.).

Библиография: 51 название.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§ 1. Топологический тип вещественных алгебраических кривых	5
§ 2. Модули вещественных алгебраических кривых	9
§ 3. Функции Арфа на вещественных алгебраических кривых	14
§ 4. Поднятие вещественных фуксовых групп	18
§ 5. Спиноры ранга 1 на вещественных алгебраических кривых	22
§ 6. Голоморфные дифференциалы на вещественных алгебраических кривых	26
§ 7. Аналоги рядов Фурье и теорема Штурма–Гурвица на вещественных алгебраических кривых произвольного рода	29
§ 8. Якобианы и θ -функции вещественных алгебраических кривых	32
§ 9. Приммианы вещественных алгебраических кривых	36
§ 10. Униформизация вещественных алгебраических кривых группами Шоттки	40
§ 11. Пространство модулей спинорных расслоений ранга 1 на вещественных алгебраических кривых	42
§ 12. Вещественные алгебраические $N = 1$ суперкривые и их пространство модулей	47
§ 13. Вещественные алгебраические $N = 2$ суперкривые	51
§ 14. Пространство модулей вещественных алгебраических $N = 2$ суперкривых	55
Список литературы	58

Введение

Согласно стандартным определениям *вещественной алгебраической кривой* называется пара (P, τ) , где P – комплексная алгебраическая кривая (т.е. компактная риманова поверхность), а $\tau: P \rightarrow P$ – антиголоморфная инволюция. Категория вещественных алгебраических кривых изоморфна категории клейновых поверхностей [1], [35]. Исследования вещественных алгебраических кривых были начаты в работах Клейна [25] и Вайхольда [51]. В дальнейшем на протяжении значительного периода времени исследователи интересовались лишь плоскими алгебраическими кривыми, т.е. вещественными кривыми, вложенными в $\mathbb{RP}^2$. Систематическое изучение “общих” вещественных алгебраических кривых возобновилось лишь в 70-е годы [1], [16], [20], [31]–[33], [48]. Открытый в 70-е годы в работах С. П. Новикова и его школы метод алгебро-геометрического интегрирования уравнений математической физики поставил перед теорией вещественных кривых ряд новых задач и значительно стимулировал ее развитие [10], [12]–[14], [34], [37], [42]. Другой областью приложения вещественных кривых становится конформная теория поля и, в частности, теория струн [9], [23], [24], [49].

Антиголоморфная инволюция τ действует на все структуры, связанные с римановой поверхностью P : векторные расслоения, якобианы, примитивы и др. Большая часть обзора посвящена выявлению возникающих тут топологических инвариантов и описанию пространств модулей, отвечающих каждому набору таких инвариантов.

В §1 мы описываем, следуя Вайхольду [51], топологические инварианты вещественных алгебраических кривых. Их набор образует топологический тип кривой. В §2 мы связываем с вещественной алгебраической кривой специальный тип групп изометрий плоскости Лобачевского (вещественные фуксовы группы). Используя эту связь и описанную в [33], [47; §1–4] параметризацию фуксовых групп, мы доказываем, что каждому топологическому типу отвечает компонента связности, гомеоморфная $\mathbb{R}^m / \text{Mod}$, где Mod – дискретная группа.

В §3 впервые в обзоре возникают функции Арфа, эквивалентные θ -характеристикам [2], [30]. В отличие от комплексной ситуации в вещественном случае с ними связано большее число топологических инвариантов. В §4 устанавливается соответствие между функциями Арфа и порождающими вещественные фуксовы группы представлениями $\pi_1(P / \langle \tau \rangle) \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$. Эти представления используются в §5 для описания вещественных спиноров на (P, τ) . Свойства вещественных спиноров позволяют описать в §6 нетривиальные топологические свойства вещественных голоморфных дифференциалов. В §7 мы показываем, что простейшие мероморфные тензоры произвольного веса на вещественных кривых произвольного рода ведут себя так же, как классические тригонометрические функции. Мы используем тут технику, развитую для комплексных кривых в работах И. М. Кричевера и С. П. Новикова в связи с конформной теорией поля [27]. Ввиду ограниченности объема мы не включили в обзор классификацию мероморфных функций на вещественных алгебраических кривых произвольного рода [40].

В §8 мы переходим к описанию якобианов вещественных кривых и, в частности, вещественных и мнимых торов якобиана. Результаты §6 позволяют найти среди них

торы, не пересекающие θ -дивизор. В §9 аналогичная задача решается для приммианов вещественных кривых с симметрией. Результаты, приведенные в §8 и 9, играют ключевую роль в отборе неособых вещественных решений важных уравнений математической физики [13], [14], [34]. В §10 описан принадлежащий А. И. Бобенко [5], [6] метод вычисления якобианов вещественных кривых с помощью групп Шоттки и рядов Пуанкаре. Как и параметризация из §2, он использует параметризацию [33], [47; §1–4] фуксовых групп. Аналогичный метод описания приммианов содержится в [34].

В §11 мы возвращаемся к спинорам и описываем пространство модулей спинорных расслоений. Оказывается, что его компоненты определяются топологическими инвариантами функций Арфа, введенными в §3. В §11 описана также топологическая структура компонент связности пространства модулей спинорных расслоений.

Последние три параграфа посвящены вещественным алгебраическим суперкривым. Комплексные и вещественные суперкривые являются центральным объектом теории суперструн, которая связывает единую квантовую теорию поля с интегралами по пространству модулей алгебраических суперкривых [4], [9], [18]. Мы определяем вещественные суперкривые через униформизирующие группы, аналогично тому, как это делается для комплексных кривых в [4], [29]. В §12 описано пространство модулей $N = 1$ вещественных алгебраических суперкривых. Числовая часть (тело) этого суперпространства совпадает с пространством модулей спинорных расслоений. Компоненты связности отвечают топологическим типам вещественных функций Арфа, и каждая компонента имеет вид $\mathbb{R}^{(n|m)} / \text{Mod}$, где $\mathbb{R}^{(n|m)}$ – линейное суперпространство, а Mod – дискретная группа. В §13 описана система топологических инвариантов $N = 2$ вещественных алгебраических суперкривых. Эти инварианты, как показано в §14, описывают компоненты связности пространства модулей этих суперкривых. Как и в случае $N = 1$, каждая из компонент представлена в виде $\mathbb{R}^{(n|m)} / \text{Mod}$.

Настоящий обзор является естественным продолжением обзора [47] и основывается на приведенных там результатах. Топологическое описание компонент связности (супер) вещественных кривых и спинорных расслоений основано, в частности, на построенном в [33], [39], [47] специальном описании компонент связности пространств (супер) римановых поверхностей. Топологические инварианты (супер) вещественных кривых включают топологические инварианты (супер) римановых поверхностей. Однако полная система их топологических инвариантов значительно сложнее и многообразнее.

В обзоре изложены в едином стиле результаты автора, полученные в течение ряда лет. Некоторые из сюжетов этих работ возникли в результате обсуждений с В. И. Арнольдом, Э. Б. Винбергом и С. П. Новиковым, которым автор искренне благодарен.

§1. Топологический тип вещественных алгебраических кривых

1. *Вещественной алгебраической (неособой) кривой* называется пара $X = (P, \tau)$, где $P = X(\mathbb{C})$ – компактная риманова поверхность (называемая комплексификацией кривой X), а $\tau = \tau_X: P \rightarrow P$ – антиголоморфная инволюция (называемая инволюцией комплексного сопряжения). Неподвижные точки $X(\mathbb{R}) = P^\tau$ этой инволюции образуют множество вещественных точек кривой. Неособой плоской вещественной алгебраической кривой $F(x, y) = 0$ соответствует, например, пара (P, τ) , где P – нормализация и компактификация поверхности $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, y) = 0\}$, а τ – порождена инволюцией $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$.

Вещественные алгебраические кривые $X_1 = (P_1, \tau_1)$ и $X_2 = (P_2, \tau_2)$ считаются совпадающими, если существует биголоморфное отображение $\psi: P_1 \rightarrow P_2$ такое, что $\psi\tau_1 = \tau_2\psi$.

Кривая X называется *разделяющей* (тип I в классификации Клейна), если множество $X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R})$ не связно. В противном случае кривая называется *неразделяющей* (тип II в классификации Клейна).

Топологическим типом вещественной алгебраической кривой X называется набор (g, k, ε) , где $g = g(X)$ – род кривой, т.е. род поверхности $X(\mathbb{C})$, $k = k(X)$ – число компонент связности множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$ и

$$\varepsilon = \varepsilon(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X \text{ – неразделяющая кривая,} \\ 1, & \text{если } X \text{ – разделяющая кривая.} \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем часто пользоваться тем, что всякая риманова поверхность P биголоморфно эквивалентна поверхности H/Γ , где H – сфера Римана $\overline{\mathbb{C}}$, комплексная плоскость $\mathbb{C}$ или верхняя полуплоскость $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, а Γ – дискретная группа, действующая без неподвижных точек. Стандартная метрика постоянной кривизны на H индуцирует метрику постоянной кривизны на $P = H/\Gamma$.

Приведем два примера вещественных алгебраических кривых.

ПРИМЕР 1.1. Пусть P – поверхность рода $\tilde{g}$ с k дырами. Наделим P структурой римановой поверхности P^+ . Рассмотрим атлас голоморфных карт

$$\{(U_i, z_i)\}, \quad P^+ = \bigcup U_i, \quad z_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}.$$

Атлас $\{(U_i, \bar{z}_i)\}$ задает на P структуру другой римановой поверхности P^- . Естественное отображение $\alpha: P^+ \rightarrow P \rightarrow P^-$ является антиголоморфным. Комплексная структура поверхностей P^+ и P^- порождает на них метрики постоянной кривизны, относительно которых α – изометрия. Окружим каждую дыру поверхности P^+ геодезической. Геодезические высекают компактную поверхность $\tilde{P}^+ \subset P^+$ с границей $\partial\tilde{P}^+$. Положим $\tilde{P}^- = \alpha\tilde{P}^+$.

Отождествим границы $\partial\tilde{P}^+$ и $\partial\tilde{P}^-$ с помощью α . В результате получим компактную риманову поверхность $P_{\tilde{g},k}$ рода $2\tilde{g} + k - 1$, на которой α индуцирует антиголоморфную инволюцию $\tau_{\tilde{g},k}: P_{\tilde{g},k} \rightarrow P_{\tilde{g},k}$. Таким образом, $X_{\tilde{g},k} = (P_{\tilde{g},k}, \tau_{\tilde{g},k})$ – вещественная алгебраическая кривая, причем $X_{\tilde{g},k}(\mathbb{R}) = \partial\tilde{P}^+ = \partial\tilde{P}^-$. Следовательно, $X_{\tilde{g},m}$ – вещественная алгебраическая кривая типа $(2\tilde{g} + k - 1, k, 1)$.

ПРИМЕР 1.2. Повторяя конструкцию примера 1.1, рассмотрим римановы поверхности с границей $\tilde{P}^+, \tilde{P}^-$ и антиголоморфное отображение $\alpha: \tilde{P}^+ \rightarrow \tilde{P}^-$. Граница $\partial\tilde{P}^+$ состоит из контуров $c_1, \dots, c_k$. Рассмотрим изометрии без неподвижных точек $\alpha_i: c_i \rightarrow c_i$ такие, что $\alpha_i^2 = 1$. Пусть теперь $0 \leq m < k$. При $i \leq m$ отождествим контуры c_i и αc_i с помощью отображения α . При $i > m$ отождествим контуры c_i и αc_i с помощью отображения $\alpha\alpha_i$. В итоге опять получится некоторая вещественная кривая $Y_{\tilde{g},k}^m = (P_{\tilde{g},k}^m, \tau_{\tilde{g},k}^m)$ того же рода, но теперь $Y_{\tilde{g},k}^m(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^m c_i$ и, следовательно, $Y_{\tilde{g},k}^m$ – кривая топологического типа $(2\tilde{g} + k - 1, m, 0)$.

2. Вещественные кривые (P_1, τ_1) и (P_2, τ_2) называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ такой, что $\tau_2\varphi = \varphi\tau_1$.

Наша ближайшая цель доказать, что любая вещественная алгебраическая кривая топологически эквивалентна кривой из примеров 1.1 или 1.2.

ЛЕММА 1.1. Множество $X(\mathbb{R})$ вещественных точек вещественной алгебраической кривой $X = (P, \tau)$ распадается на простые попарно непересекающиеся замкнутые гладкие контуры (называемые овалами).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Комплексная структура поверхности P индуцирует метрику постоянной кривизны, относительно которой τ — изометрия. Если $x \in X(\mathbb{R})$, то инволюция касательной плоскости $d\tau_x: T_x \rightarrow T_x$ является отражением относительно некоторой прямой $v \in T_x$. Обозначим через $\ell \subset P$ геодезическую, проходящую через x по направлению прямой ℓ . Все ее точки неподвижны относительно τ , и в малой окрестности x нет других неподвижных точек τ . Таким образом, всякая точка $x \in X(\mathbb{R})$ лежит ровно на одной максимальной геодезической без самопересечений $\ell \subset X(\mathbb{R})$. Ввиду компактности P всякая такая геодезическая является замкнутым гладким контуром.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть (P, τ) — вещественная кривая типа $(g, k, 1)$. Тогда $1 \leq k \leq g + 1$, $k \equiv g + 1 \pmod{2}$ и (P, τ) топологически эквивалентна кривой $(P_{\tilde{g}, k}, \tau_{\tilde{g}, k})$ из примера 1.1, где $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g + 1 - k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1.1 множество $P \setminus P^\tau$ распадается на 2 поверхности P_1 и P_2 рода $\tilde{g}$ с k дырами. Отсюда $g = 2\tilde{g} + k - 1$ и, следовательно, $k \leq g + 1$, $k \equiv g + 1 \pmod{2}$. Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi_1: (P_1 \cup P^\tau) \rightarrow \tilde{P}^+$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{если } x \in P_1 \cup P^\tau, \\ \tau_{\tilde{g}, k} \varphi_1 \tau(x), & \text{если } x \in P_2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что φ реализует нужную топологическую эквивалентность.

3. Займемся теперь кривыми неразделяющего типа. Далее до конца параграфа Q — риманова поверхность рода g с n дырами и $\beta: Q \rightarrow Q$ — антиголоморфная инволюция без неподвижных точек.

Простой замкнутый контур $a \subset Q$ назовем *инвариантным*, если $\beta a = a$.

Систему попарно непересекающихся инвариантных контуров $A = (a_1, \dots, a_m)$ назовем *полной*, если множество $Q \setminus A$ — несвязно. Очевидно, что в этом случае $Q \setminus A$ состоит из двух поверхностей Q', Q'' рода $\frac{1}{2}(g - m + 1)$ с $m + \frac{1}{2}n$ дырами, причем $\beta Q' = Q''$.

ЛЕММА 1.2. а) Существует хотя бы один инвариантный контур $a \subset Q$. б) Если $g > 0$, то существует инвариантный контур $b \subset Q$ такой, что $Q \setminus b$ — связно. в) Существует полная система, состоящая из $g + 1$ инвариантных контуров. г) Если $A = (a_1, \dots, a_m) \subset Q$ — полная система инвариантных контуров и $m > 2$, то существует $b \subset Q$ такой, что $(a_1, \dots, a_{m-3}, b)$ — тоже полная система инвариантных контуров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Без ограничения общности можно считать, что $n > 2$. Рассмотрим на Q функцию $f(x) = \rho(x, \beta x)$, где ρ — расстояние в стандартной метрике постоянной отрицательной кривизны на Q . Функция f достигает минимума $f(z) = c > 0$. Если ℓ — минимальная геодезическая, соединяющая z и βz , то $a = \ell \cup \beta \ell$ — инвариантный контур.

б) Пусть $a \subset Q$ — контур, построенный в п. а), и $Q \setminus a$ — несвязно. Тогда $Q \setminus a = Q' \cup Q''$, где Q', Q'' — поверхности положительного рода и $\beta Q' = Q''$.

Соединим точки $x \in a$ и τx линией без самопересечений $\ell \subset Q'$ такой, что $Q' \setminus \ell$ — связно (см. рис. 1.1). Тогда $b = \ell \cup \tau\ell$ — инвариантный контур и $Q \setminus b$ — связно.

в) Пусть b — контур, построенный в п. б). Тогда $Q \setminus b$ — поверхность рода $g - 1$, к которой при $g - 1 > 0$ опять применимо утверждение п. б). При $g = 0$ применим п. а).

г) Множество $Q \setminus A$ распадается на поверхности Q' и Q'' (см. рис. 1.2).

Рис. 1.1

Рис. 1.2

Пополним их граничными контурами. При этом контуры $a_i \subset A$ отвечают контуры $a'_i \subset Q'$ и $a''_i \subset Q''$. Пусть q_1, q_2, q_3 — точки контуров a_{m-2}, a_{m-1}, a_m и q'_i — соответствующие точки контуров a'_{m-3+i} . Обозначим через m_i одну из двух дуг, на которые точки q'_i и $\beta(q'_i)$ разбивают контур a'_i . Соединим точки $\beta(q'_1)$ и q'_2 линией $\ell_1 \subset Q'$ и точки $\beta(q'_2)$ и q'_3 линией $\ell_2 \subset Q'$ так, чтобы ℓ_1 и ℓ_2 не пересекались между собой, не имели самопересечений и не пересекались (кроме концов) с $\partial Q'$. Соединим точки $\beta(q'_3)$ и q'_1 линией без самопересечений ℓ_3 , гомотопной линии $(m_1\ell_1m_2\ell_2m_3)^{-1}$ и не имеющей с ней и с $\partial Q'$ общих точек кроме концов (это всегда можно сделать, так как множество $Q' \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$ — связно). Замкнутый контур без самопересечений $\ell_3m_1\ell_1m_2\ell_2m_3$ разбивает поверхность Q' на две части Q'_1 и Q'_2 . Рассмотрим теперь инвариантный контур $b = \ell_1\beta(\ell_2)\ell_3\beta(\ell_1)\ell_2\beta(\ell_3) \subset Q$. Тогда $Q \setminus (b, a_1, \dots, a_{m-3})$ распадается на поверхности $Q'_1 \cup \beta(Q'_2)$ и $Q'_2 \cup \beta(Q'_1)$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая топологического типа $(g, t, 0)$. Тогда для любого $t < k \leq g + 1$, $k \equiv g + 1 \pmod{2}$, кривая (P, τ) топологически эквивалентна кривой $(P_{\tilde{g},k}^m, \tau_{\tilde{g},k}^m)$ из примера 1.2, где $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g + 1 - k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1.2 на поверхности $P \setminus P^\tau$ существует полный набор инвариантных относительно τ контуров $A = (a_{m+1}, \dots, a_k)$. Поверхность $P \setminus (P^\tau \cup A)$ распадается на две поверхности P_1 и P_2 рода $\tilde{g}$ с k дырами. Рассмотрим теперь гомеоморфизм $\varphi_1: (P_1 \cup P^\tau \cup A) \rightarrow \tilde{P}^+$ такой, что $\varphi_1(P^\tau) = (c_1, \dots, c_k)$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{если } x \in P_1 \cup P^\tau \cup A, \\ \tau_{\tilde{g},k}^m \varphi_1 \tau(x), & \text{если } x \in P_2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что φ реализует нужную топологическую эквивалентность.

Примеры 1.1, 1.2 и теоремы 1.1, 1.2 дают

СЛЕДСТВИЕ 1.1 [51]. *Вещественные алгебраические кривые топологически эквивалентны, если и только если они имеют одинаковый топологический тип. Набор (g, k, ε) является топологическим типом некоторой вещественной алгебраической кривой, если и только если или $\varepsilon = 1$, $1 \leq k \leq g + 1$, $k \equiv g + 1 \pmod{2}$, или $\varepsilon = 0$, $0 \leq k \leq g$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство $k \leq g + 1$ для плоских вещественных алгебраических кривых было впервые доказано Харнаком [21] и носит его имя.

§ 2. Модули вещественных алгебраических кривых

1. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые определения и обозначения из [47; § 1–5]. Всякий гиперболический автоморфизм $C \in \text{Aut}(\Lambda)$ плоскости Лобачевского $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ имеет вид

$$C(z) = \frac{(\lambda\alpha - \beta)z + (1 - \lambda)\alpha\beta}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)},$$

где $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R} \cup \infty$, $\lambda > 1$. Обозначим через $\ell(C) \subset \Lambda$ – геодезическую (в метрике Лобачевского), соединяющую α , β и ориентированную от β к α . Автоморфизм C сохраняет линию $\ell(C)$, сдвигая ее в направлении ориентации.

Набор гиперболических автоморфизмов (C_1, C_2, C_3) назовем *последовательным типом* $(0, 3)$, если $(C_1 \cdot C_2 \cdot C_3) = 1$ и для некоторого $D \in \text{Aut}(\Lambda)$ линии $\ell(DC_i D^{-1})$ расположены как на рис. 2.1.

Рис. 2.1

Набор гиперболических автоморфизмов $(C_1, \dots, C_n)$ назовем *последовательным типа $(0, n)$* , если для любого j набор $(C_1 \cdots C_{j-1}, C_j, C_{j+1} \cdots C_n)$ является последовательным типа $(0, 3)$.

Набор

$$\{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, g), C_i \ (i = 1, \dots, k)\}$$

назовем *последовательным типа (g, k)* , если

$$(A_1, B_1 A_1^{-1} B_1^{-1}, \dots, A_g, B_g A_g^{-1} B_g^{-1}, C_1, \dots, C_k)$$

– последовательный набор типа $(0, 2g + k)$.

Согласно классической теореме Фрике–Клейна [17], [47] пространство модулей комплексных алгебраических кривых (т.е. компактных римановых поверхностей) представляется в виде T/Mod , где T – линейное пространство, а Mod – дискретная группа. Наша ближайшая цель – доказать аналогичную теорему для вещественных алгебраических кривых.

В качестве T мы будем использовать пространство Фрике–Клейна–Тайхмюллера $T_{g,k}$, построенное в [33], [47; § 4]. Оно строится следующим образом. Пусть $n = g + k$ и $v_{g,n} = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g), c_i \ (i = g + 1, \dots, n)\}$ – система образующих, порождающая свободную группу $\gamma_{g,n}$ ранга $2g + n - 1$ с определяющим соотношением

$$\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{i=g+1}^n c_i = 1.$$

Рассмотрим множество $\tilde{T}_{g,k}$ мономорфизмов $\psi: \gamma_{g,n} \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ таких, что $\{\psi(a_i), \psi(b_i) \ (i = 1, \dots, g), \psi(c_i) \ (i = g + 1, \dots, n)\}$ – последовательный набор типа (g, k) . Группа $\text{Aut}(\Lambda)$ действует на $\tilde{T}_{g,k}$ сопряжениями $\psi \mapsto C\psi C^{-1}$. Согласно [33], [47; § 4] $T_{g,k} = \tilde{T}_{g,k} / \text{Aut}(\Lambda)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{6g+3k-6}$. Кроме того, соответствие

$$\psi \mapsto \Lambda / \psi(\gamma_{g,n})$$

порождает гомеоморфизм

$$\Psi_{g,n}: T_{g,k} / \text{Mod}_{g,k} \rightarrow M_{g,k}$$

на пространство модулей $M_{g,k}$ римановых поверхностей рода g с k дырами. Здесь $\text{Mod}_{g,k}$ – дискретная группа, состоящая из классов $\widetilde{\text{Mod}}_{g,k} / \text{Int}(\gamma_{g,n})$, где $\widetilde{\text{Mod}}_{g,k} \subset \text{Aut}(\gamma_{g,n})$ – группа автоморфизмов, переводящих мономорфизмы, принадлежащие множеству $\tilde{T}_{g,k}$, в мономорфизмы, принадлежащие множеству $\tilde{T}_{g,k}$.

2. Далее мы рассматриваем лишь кривые рода $g > 1$. Случай $g \leq 1$ много проще, но требуют других подходов.

Вещественные алгебраические кривые рода $g > 1$ униформируются дискретными группами изометрий метрики $\frac{|dz|}{\text{Im } z}$ плоскости Лобачевского $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Полная группа изометрий $\widetilde{\text{Aut}}(\Lambda)$ состоит из голоморфных $\text{Aut}(\Lambda)$ и антиголоморфных автоморфизмов.

Дискретные подгруппы $\Gamma \subset \widetilde{\text{Aut}}(\Lambda)$ называются *неевклидовыми кристаллографическими группами* (NEC-группами) [28]. Далее нам понадобятся лишь NEC-группы $\tilde{\Gamma}$ такие, что $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(\Lambda)$ – фуксова группа, состоящая из гиперболических автоморфизмов, $\Gamma \neq \tilde{\Gamma}$ и $P = \Lambda/\Gamma$ – компактная поверхность. Мы будем называть такие группы $\tilde{\Gamma}$ *вещественными фуксовыми группами*. В этом случае $\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma$ индуцирует антиголоморфную инволюцию $\tau = \Phi(\tilde{\Gamma} \backslash \Gamma)\Phi^{-1}: P \rightarrow P$ (где $\Phi: \Lambda \rightarrow P$ – естественная проекция). Таким образом, вещественная фуксова группа $\tilde{\Gamma}$ порождает вещественную алгебраическую кривую $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$.

ЛЕММА 2.1. *Всякая вещественная алгебраическая кривая порождается некоторой вещественной фуксовой группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda)$ – фуксова группа, униформизирующая риманову поверхность P , и $\Phi: \Lambda \rightarrow P$ – естественная проекция (см., например, [47; §2]). Ввиду односвязности Λ существует элемент $\sigma \in \widetilde{\text{Aut}}(\Lambda) \setminus \text{Aut}(\Lambda)$ такой, что $\Phi\sigma = \tau\Phi$. Пусть $\tilde{\Gamma}$ – группа, порожденная σ и Γ . Тогда $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$.

3. Пусть $M_{g,k,\varepsilon}$ – пространство модулей вещественных алгебраических кривых типа (g, k, ε) . Наша ближайшая цель – построить естественное отображение $\Psi_{\tilde{g},k}^k: \tilde{T}_{\tilde{g},k} \rightarrow M_{g,k,1}$, где $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g+1-k)$.

Пусть $n = \tilde{g} + k$, $\psi \in \tilde{T}_{\tilde{g},k}$ и $\{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i \ (i = 1, \dots, k)\} = \{\psi(a_i), \psi(b_i) \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), \psi(c_i) \ (i = \tilde{g} + 1, \dots, n)\}$. Обозначим через $\overline{C}_i \in \widetilde{\text{Aut}}(\Lambda) \setminus \text{Aut}(\Lambda)$ отражение (в смысле геометрии Лобачевского) относительно геодезической $\ell(C_i)$. Пусть $\Gamma_\psi = \psi(\gamma_{\tilde{g},n})$ и Γ_ψ^k – группа, порожденная Γ_ψ и $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_k$.

ЛЕММА 2.2. Γ_ψ^k – вещественная фуксова группа и $[\Gamma_\psi^k] \in M_{g,k,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i \ (i = 1, \dots, g)\}$ – образующие группы $\gamma_{g,0}$, порождающие ее с определяющим соотношением $\prod_{i=1}^g [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i] = 1$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\tilde{a}_i) &= \overline{C}_n B_{\tilde{g}+1-i} \overline{C}_n, & \tilde{\psi}(\tilde{b}_i) &= \overline{C}_n A_{\tilde{g}+1-i} \overline{C}_n & (i = 1, \dots, \tilde{g}), \\ \tilde{\psi}(\tilde{a}_i) &= A_{i-\tilde{g}}, & \tilde{\psi}(\tilde{b}_i) &= B_{i-\tilde{g}} & (i = \tilde{g} + 1, \dots, 2\tilde{g}), \\ \tilde{\psi}(\tilde{a}_i) &= W_i C_i W_i, & \tilde{\psi}(\tilde{b}_i) &= W_i D_i W_i^{-1} & (i = 2\tilde{g} + 1, \dots, 2\tilde{g} + k), \end{aligned}$$

где $D_i = \overline{C}_n \overline{C}_i$, $W_i = \prod_{j=i-1}^1 D_j C_j D_j^{-1}$ (см. рис. 2.2).

Рис. 2.2

Тогда

$$\prod_{i=1}^g [\tilde{\psi}(\tilde{a}_i), \tilde{\psi}(\tilde{b}_i)] = \overline{C}_n \prod_{i=\tilde{g}}^1 [B_i, A_i] \overline{C}_n \prod_{i=1}^{\tilde{g}} [A_i, B_i] \prod_{i=1}^k C_i \prod_{i=k}^1 \overline{C}_n C_i^{-1} \overline{C}_n = 1$$

ввиду $\prod_{i=1}^{\tilde{g}} [A_i, B_i] \prod_{i=1}^k C_i = 1$. Кроме того,

$$(\tilde{\psi}(\tilde{a}_1), \tilde{\psi}(\tilde{b}_1 \tilde{a}_1^{-1} \tilde{b}_1^{-1}), \dots, \tilde{\psi}(\tilde{a}_g), \tilde{\psi}(\tilde{b}_g \tilde{a}_g^{-1} \tilde{b}_g^{-1}))$$

– последовательный набор типа $(0, 2g)$ (см. рис. 2.2). Таким образом, $\tilde{\psi} \in \tilde{T}_{g,0}$ и, следовательно, $P = \Lambda / \tilde{\psi}(\gamma_{g,0}) \in M_{g,0}$. Группа $\Gamma_{\tilde{\psi}}^k$ порождена группой $\tilde{\psi}(\gamma_{g,0})$ и инволюциями $\overline{C}_i$, причем $\overline{C}_i \tilde{\psi}(\gamma_{g,0}) \overline{C}_i = \tilde{\psi}(\gamma_{g,0})$. Следовательно, $\Gamma_{\tilde{\psi}}^k$ – вещественная фуксова группа, а образы $\ell(C_i)$ образуют овалы кривой $[\Gamma_{\tilde{\psi}}^k]$. По построению эти контуры образуют границу поверхности рода $\tilde{g}$.

Таким образом, соответствие $\psi \mapsto [\Gamma_{\psi}^k]$ задает отображение $\Psi_{\tilde{g},k}^k: \tilde{T}_{\tilde{g},k} \rightarrow M_{g,k,1}$.

ЛЕММА 2.3. $\Psi_{\tilde{g},k}^k(\tilde{T}_{\tilde{g},k}) = M_{g,k,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(P, \tau) \in M_{g,k,1}$. Согласно лемме 2.1 $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$ для некоторой вещественной фуксовой группы $\tilde{\Gamma}$. Пусть $\Gamma \in \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(\Lambda)$, $\Phi: \Lambda \rightarrow \Lambda/\Gamma = P$ – естественная проекция, $\Phi(q) = p$ и $\Phi_q: \gamma \rightarrow \pi_1(P, p)$ – изоморфизм, переводящий $h \in \Gamma$ в образ $\Phi(h)$ отрезка $\ell = [q, hq] \subset \Lambda$. Овалы P^τ разбивают P на две поверхности P_1 и P_2 . Пусть $p \in P_1$ и $v = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), c_i \ (i = \tilde{g} + 1, \dots, n)\}$ – стандартная система образующих группы $\pi(P_1, p)$ в смысле [47; § 2]. Согласно [47; теорема 2.1] $V = \Phi_q^{-1}(v)$ – последовательный набор типа $(\tilde{g}, k)$, т.е. $V = \psi(v)$, где $\psi \in \tilde{T}_{\tilde{g},k}$. Но тогда $[\Gamma_{\psi}^k] = (P, \tau)$.

Напомним, что

$$T_{\tilde{g},k} = \tilde{T}_{\tilde{g},k} / \text{Aut}(\Lambda) \cong \mathbb{R}^{6\tilde{g}+3k-6} = \mathbb{R}^{3g-3}$$

[33], [47; § 4].

По очевидным причинам отображение

$$\Psi_{\tilde{g},k}^k: \tilde{T}_{\tilde{g},k} \rightarrow M_{g,k,1}$$

индуцирует отображение

$$\Psi_{\tilde{g},k}^k: T_{\tilde{g},k} \rightarrow M_{g,k,1}.$$

Нам понадобится также отображение

$$\alpha: T_{\tilde{g},k} \rightarrow T_{\tilde{g},k},$$

определенное равенствами

$$\begin{aligned} \alpha\psi(a_i) &= \beta\psi(b_{\tilde{g}+1-i})\beta, \\ \alpha\psi(b_i) &= \beta\psi(a_{\tilde{g}+1-i}^{-1})\beta \quad (i = 1, \dots, \tilde{g}), \\ \alpha\psi(c_i) &= w\beta\psi(c_{\tilde{g}+k+1-i}^{-1})\beta w^{-1} \quad (i = \tilde{g} + 1, \dots, \tilde{g} + k), \end{aligned}$$

где $\beta(z) = -\bar{z}$ и $w = \alpha\psi(\prod_{i=1}^{\tilde{g}} [a_i, b_i])$. Пусть $\text{Mod}_{\tilde{g},k}^k$ – группа автоморфизмов $T_{\tilde{g},k}$, порожденная $\text{Mod}_{\tilde{g},k}$ и α . Тогда $\text{ind}(\text{Mod}_{\tilde{g},k} : \text{Mod}_{\tilde{g},k}^k) = 2$. Кроме того, из конструкции видно, что $[\Gamma_{\psi}^k] = [\Gamma_{\psi'}^k]$, если и только если $\psi' = \gamma\psi$, где $\gamma \in \text{Mod}_{\tilde{g},k}^k$. Таким образом, из лемм 2.2 и 2.3 следует

ТЕОРЕМА 2.1 [31]–[33]. $M_{g,k,1} = T_{\tilde{g},k} / \text{Mod}_{\tilde{g},k}^k$, где $\text{Mod}_{\tilde{g},k}^k$ действует дискретно.

4. Займемся теперь описанием пространства $M_{g,m,0}$. Для этого построим отображение

$$\Psi_{\tilde{g},k}^m : \tilde{T}_{\tilde{g},k} \rightarrow M/T_{g,m,0},$$

где $m < k$, $k \equiv g+1 \pmod{2}$ и $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g+1-k)$.

Пусть, как и раньше, мономорфизму $\psi \in \tilde{T}_{\tilde{g},k}$ отвечает последовательный набор

$$\begin{aligned} & \{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i \ (i = 1, \dots, k)\} \\ & = \{\psi(a_i), \psi(b_i) \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), \psi(c_i) \ (i = \tilde{g}+1, \dots, n)\}. \end{aligned}$$

Положим $\tilde{C}_i = \overline{C}_i \sqrt{C_i}$, где $\sqrt{C_i}$ – гиперболический автоморфизм такой, что $(\sqrt{C_i})^2 = C_i$. Пусть $\Gamma_\psi = \psi(\gamma_{\tilde{g},n})$ и $\Gamma_{\psi,k}^m$ – группа, порожденная $\Gamma_\psi, \overline{C}_1, \dots, \overline{C}_m$ и $\tilde{C}_{m+1}, \dots, \tilde{C}_k$.

ЛЕММА 2.4. $\Gamma_{\psi,k}^m$ – вещественная фуксова группа и $[\Gamma_{\psi,k}^m] \in M_{g,m,0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Почти дословно повторяет доказательство леммы 2.2. Единственное отличие состоит в том, что образы $\ell(C_i)$ образуют овалы, если и только если $i \leq m$, и ввиду этого $[\Gamma_{\psi,k}^m]$ – неразделяющая кривая.

Таким образом, соответствие $\psi \mapsto [\Gamma_{\psi,k}^m]$ задает отображение

$$\Psi_{\tilde{g},k}^m : \tilde{T}_{\tilde{g},k} \rightarrow T_{g,m,0}.$$

ЛЕММА 2.5. $\Psi_{\tilde{g},k}^m(\tilde{T}_{\tilde{g},k}) = M_{g,m,0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(P, \tau) \in M_{g,m,0}$. Согласно теореме 1.2 существует набор инвариантных контуров $A = (a_{m+1}, \dots, a_k) \in P \setminus P^\tau$ такой, что $P \setminus (P^\tau \cup A)$ распадается на 2 поверхности P_1 и P_2 рода $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g+1-k)$. Завершающая часть доказательства почти дословно совпадает с соответствующей частью доказательства леммы 2.3.

ТЕОРЕМА 2.2 [31]–[33]. $M_{g,k,0} = T_{\tilde{g},k} / \text{Mod}_{\tilde{g},k}^m$, где $\text{Mod}_{\tilde{g},k}^m$ действует дискретно и $\text{ind}(\text{Mod}_{\tilde{g},k}^m \cap \text{Mod}_{\tilde{g},k}^k : \text{Mod}_{\tilde{g},k}^k) = C_k^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\Psi_{\tilde{g},k}^m : \tilde{T}_{\tilde{g},k} \rightarrow M_{g,m,0}$ очевидным образом индуцирует отображение $\Psi_{\tilde{g},k}^m : T_{\tilde{g},k} \rightarrow M_{g,m,0}$. Пусть $\Psi_{\tilde{g},k}^m(\psi) = \Psi_{\tilde{g},k}^m(\psi')$. То есть $(P, \tau) = [\Gamma_{\psi,k}^m] = [\Gamma_{\psi',k}^m] = (P', \tau')$. Рассмотрим мономорфизмы $\psi, \psi' \in T_{g,0}$. Тогда $\tilde{\psi}' = \tilde{\psi}\gamma$, где γ – принадлежит группе $\text{Mod}_{\tilde{g},k}^m$, порожденной группой $\{\gamma \in \text{Mod}_{g,0} \mid \gamma\tau = \tau\gamma\}$ и α , причем для любого $\gamma \in \text{Mod}_{\tilde{g},k}^m$ $\Psi_{\tilde{g},k}^m(\psi\gamma) = \Psi_{\tilde{g},k}^m(\psi)$. Рассмотрим теперь подгруппу $\text{Mod}_{\tilde{g},k}^m \cap \text{Mod}_{\tilde{g},k}^k$, состоящую из автоморфизмов группы $\text{Mod}_{\tilde{g},k}^k$, сохраняющих множество c_i ($i = 1, \dots, m$). Нетрудно видеть, что ее индекс в $\text{Mod}_{\tilde{g},k}^k$ равен C_k^m .

Сопоставляя теоремы 2.1, 2.2 с [47; § 4], находим

СЛЕДСТВИЕ 2.1 [31]–[33]. *Пространство модулей вещественных алгебраических кривых рода $g > 1$ распадается на компоненты связности $M_{g,k,\varepsilon}$, где (g, k, ε) – произвольный топологический тип вещественной алгебраической кривой. Каждая компонента диффеоморфна $\mathbb{R}^{3g-3}/\text{Mod}_{g,k,\varepsilon}$, где $M_{g,k,\varepsilon}$ – дискретная группа диффеоморфизмов.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение следствия 2.1 о топологической структуре компонент связности пространства вещественных алгебраических кривых впервые было приведено в [16]. Доказательство, приведенное в [16], использовало теорию квазиконформных отображений и основывалось на теореме из [26], которая впоследствии оказалась неверной. Основанное на теории квазиконформных отображений верное доказательство получено в [48].

§ 3. Функции Арфа на вещественных алгебраических кривых

1. При исследовании спинорных расслоений и суперримановых поверхностей важную роль играют функции Арфа [15], [47; § 7–15]. С вещественными алгебраическими кривыми связаны специальные функции Арфа, к описанию которых мы и переходим.

Пусть P – поверхность рода $g = g(P)$ с k дырками. Базис $v = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g), c_i \ (i = g + 1, \dots, g + k)\}$ группы $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ (где $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$) назовем *стандартным*, если образующие c_i отвечают дырам поверхности P , $(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$, где $(\cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}_2$ – индекс пересечения гомологий из $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$.

Функцией Арфа на P называется функция $\omega: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ такая, что $\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b) + (a, b)$. Будем говорить, что функция Арфа ω *четна* и положим $\delta = \delta(P, \omega) = 0$, если существует стандартный базис v такой, что

$$\sum_{i=1}^g \omega(a_i)\omega(b_i) \equiv 0 \pmod{2}.$$

В противном случае положим $\delta = \delta(P, \omega) = 1$ и будем говорить, что ω *нечетна*. Обозначим через $k_\alpha = k_\alpha(P, \omega)$ ($\alpha = 0, 1$) число элементов c_i стандартного базиса v таких, что $\omega(c_i) = \alpha$. Набор (g, δ, k_α) называется *топологическим типом* функции Арфа ω .

Согласно [47; § 8] набор (g, δ, k_α) является топологическим типом некоторой функции Арфа, если и только если $k_1 \equiv 0 \pmod{2}$ и $\delta = 0$ при $k_1 > 0$. Причем существует стандартный базис v такой, что $\omega(a_i) = \omega(b_i) = 0$ при $i > 1$ и $\omega(a_1) = \omega(b_1) = \delta$.

Функции Арфа ω_1 и ω_2 на P называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\psi: P \rightarrow P$, индуцирующий автоморфизм $\tilde{\psi}: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ такой, что $\omega_1 = \omega_2 \tilde{\psi}$.

Согласно [47; § 8] функции Арфа топологически эквивалентны, если и только если они имеют одинаковый топологический тип.

2. Пусть (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая. Далее мы будем обозначать одной и той же буквой простой контур и его класс гомологий в $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$. Инволюция $H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(P, \mathbb{Z}_2)$, индуцированная инволюцией $\tau: P \rightarrow P$, также будет обозначаться той же буквой τ .

Функцией Арфа на вещественной алгебраической кривой (P, τ) (или просто *вещественной функцией Арфа*) назовем функцию Арфа $\omega: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ такую, что $\omega\tau = \omega$.

ЛЕММА 3.1. Пусть (P, τ) – вещественная кривая, $c_1, c_2 \subset P$ – простые замкнутые контуры такие, что $\tau(c_i) = c_i$, $c_i \cap P^\tau = \emptyset$, $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ и ω – произвольная функция Арфа на (P, τ) . Тогда $\omega(c_1) = \omega(c_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1.2 существует набор попарно непересекающихся простых контуров $c_3, \dots, c_r \subset P \setminus (c_1 \cup c_2)$ таких, что $\tau(c_i) = c_i$ и $P \setminus \bigcup_{i=1}^r c_i$ распадается на поверхности P_1 и P_2 , где $\tau P_1 = P_2$. Соединим контуры c_1 и c_2 линией без самопересечений $\ell \subset P_1$. Пусть d – простой замкнутый контур вида

$$d = \ell \cup f_1 \cup \tau \ell \cup f_2,$$

где $f_i \subset c_i$ – отрезок, соединяющий точки $\ell \cap c_i$ и $\tau \ell \cap c_i$ (см. рис. 3.1). Тогда $\tau(d) = d + c_1 + c_2$ и, следовательно,

$$\omega(d) = \omega(d) + \omega(c_1) + \omega(c_2).$$

Рис. 3.1

Функцию Арфа ω на (P, τ) назовем *особой*, если существует простой замкнутый контур c такой, что $\tau(c) = c$, $c \cap P^\tau = \emptyset$ и $\omega(c) = 0$.

ЛЕММА 3.2. Если $P^\tau \neq \emptyset$, то любая вещественная функция Арфа на (P, τ) неособа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \subset P$ – простой контур такой, что $\tau(c) = c$ и $c \cap P^\tau = \emptyset$. Пусть $c' \subset P^\tau$ – один из овалов вещественной кривой (P, τ) . Тогда согласно теореме 1.2 существует набор попарно непересекающихся простых контуров $c_1, \dots, c_r \in P \setminus (c \cup c')$ такой, что $\tau(c_i) = c_i$ и $P \setminus (c \cup c' \cup \bigcup_{i=1}^r c_i)$ распадается на поверхности P_1, P_2 , где $\tau P_1 = P_2$. Соединим контуры c и c' линией без самопересечений $\ell \subset P_1$. Пусть d – простой замкнутый контур вида $d = \ell \cup f \cup \tau \ell$, где $f \subset c$. Тогда $\tau(d) = d + c$ и, следовательно, $\omega(d) = \omega(d + c) = \omega(d) + \omega(c) + 1$.

ЛЕММА 3.3. Особая вещественная функция Арфа принимает значение 0 на всех инвариантных контурах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – особая функция Арфа на вещественной алгебраической кривой (P, τ) . Предположим, что существует контур $c \in P$ такой, что $\tau c = c$ и $\omega(c) = 1$. Согласно леммам 1.2 и 3.2 существует полная система инвариантов контуров $c, c_1, \dots, c_g$, разбивающих P на сферы с дырами P_1 и P_2 . Соединим контур c_i с контуром c отрезком $\ell_i \subset P_1$ и положим

$$d_i = \ell_i \cup \tau \ell_i \cup r_i \cup r,$$

где $r_i \subset c_i$ ($r \subset c$) – дуги, соединяющие точки $p_i = \ell_i \cap c_i$ и τp_i (соответственно $p = \ell \cap c$ и τp). Рассмотрим диск $D_1 \subset P_1$. Отождествим граничные контуры поверхности $P \setminus (D_1 \cup \tau D_1)$ с помощью инволюции τ . На полученной поверхности $\tilde{P}$ инволюции τ индуцирует инволюцию на τ с овалом $\tilde{c} = \partial D_1$. Соединим контур $\tilde{c}$ с контуром c отрезком $\tilde{\ell} \subset P_1$ и положим $\tilde{d} = \tilde{\ell} \cup \tau \tilde{\ell} \cup \tilde{r}$, где $\tilde{r} \subset c$ – дуга, соединяющая точки $\tilde{p} = \tilde{\ell} \cap c$ и $\tau \tilde{p}$. Контур $\{c_i, d_i$ ($i = 1, \dots, g$), $\tilde{c}$, $\tilde{d}\}$ образуют базис $H_1(\tilde{P}, \mathbb{Z}_2)$. Рассмотрим функцию Арфа $\tilde{\omega}$ на $\tilde{P}$ такую, что $\tilde{\omega}(c_i) = \omega(c_i)$, $\tilde{\omega}(d_i) = \omega(d_i)$, $\tilde{\omega}(\tilde{c}) = \tilde{\omega}(\tilde{d}) = 0$. Тогда $\tilde{\omega}(c) = \sum_{i=1}^g \tilde{\omega}(c_i) = \sum_{i=1}^g \omega(c_i) = \omega(c)$, $\tilde{\omega}(\tau \tilde{d}) = \tilde{\omega}(\tilde{d} + c) = \tilde{\omega}(\tilde{d}) + \tilde{\omega}(c) + 1 = \tilde{\omega}(\tilde{d})$ и, следовательно, $\tilde{\omega}$ – вещественная функция Арфа. Согласно лемме 3.2 отсюда следует, что $\tilde{\omega}$ равна 1 на всех контурах c' поверхности $P \setminus \tilde{c}$ таких, что $\tau c' = c'$. Но на этих контурах ω и $\tilde{\omega}$ совпадают и, следовательно, ω неособа. Полученное противоречие доказывает, что $\omega(c) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.1 [41]. *Особая функция Арфа на вещественной кривой (P, τ) типа (g, k, ε) существует, если и только если $k = \varepsilon = 0$. В этом случае существует 2^g вещественных функций Арфа, и все они четные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $k = \varepsilon = 0$ для особых функций Арфа следует из леммы 3.2. Пусть теперь $k = \varepsilon = 0$. Рассмотрим построенный при доказательстве леммы 3.3 стандартный базис $\{c_i, d_i$ ($i = 1, \dots, g$) $\} \subset H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ такой, что $\tau c_i = c_i$, $\tau d_i = d_i + c_i + \sum_{j=1}^g c_j$. Положим $\omega(c_i) = 0$ при всех i , присвоим $\omega(d_i)$ ($i = 1, \dots, g$) – произвольные значения из $\mathbb{Z}_2$ и продолжим ω на $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$, считая, что $\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b) + (a, b)$. Тогда $\omega(\tau d_i) = \omega(d_i)$ и, следовательно, ω – особая четная вещественная функция Арфа. Согласно лемме 3.3 эта конструкция дает все особые функции Арфа на (P, τ) .

3. *Топологическим типом* неособой функции Арфа ω на вещественной кривой (P, τ) типа $(g, k, 0)$ назовем набор (g, δ, k_α) , где $\delta = \delta(P, \omega)$ и k_α ($\alpha = 0, 1$) – число овалов $c_i \in P^\tau$ таких, что $\omega(c_i) = \alpha$.

ТЕОРЕМА 3.2 [41]. *Набор (g, δ, k_α) является топологическим типом некоторой неособой функции Арфа на вещественной кривой типа $(g, k, 0)$, если и только если $k = k_0 + k_1 \leq g$ и $k_0 = g + 1 \pmod{2}$. В этом случае число таких функций равно $C_k^{k_0} \cdot 2^{g-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (P, τ) – вещественная кривая типа $(g, k, 0)$. Согласно теореме 1.2 существует набор попарно непересекающихся простых контуров $(c_1, \dots, c_{g+1})$ таких, что $P^\tau = \bigcup_{i=1}^k c_i$ и $\tau(c_i) = c_i$. Этот набор разбивает P на 2 сферы с $g + 1$ дырами P_1 и P_2 , причем $\tau P_1 = P_2$. Пусть ω – неособая функция Арфа на (P, τ) . Тогда согласно [47; §8] функция Арфа $\omega|_{P_1}$ принимает значение 1 на четном числе дыр. Следовательно, если ω неособа, то $k_1 + (g + 1 - k) \equiv 0 \pmod{2}$, т.е. $k_0 \equiv g + 1 \pmod{2}$.

Пусть теперь (g, δ, k_α) – произвольный набор такой, что $k_0 + k_1 \leq g$ и $k_0 \equiv g + 1 \pmod{2}$. Соединим контуры c_i и c_{g+1} отрезком $\ell_i \subset P_i$. Рассмотрим простой контур $d_i = \ell_i \cup \tau \ell_i \cup r_i \cup r_{g+1}$, где $r_j \subset c_j$. Тогда $\tau(d_i) = d_i + c_{g+1} + \alpha_i c_i$, где $\alpha_i = 0$ при $i \leq k$ и $\alpha_i = 1$ при $i > k$.

Положим теперь $\omega(c_i) = 0$ для произвольного набора из k_0 контуров среди $c_1, \dots, c_k$. Положим $\omega(c_i) = 1$ на остальных контурах из $c_1, \dots, c_g$. Ввиду $k_0 \equiv g + 1 \pmod{2}$ такие контуры существуют. Пусть c_r – один из них, т.е. $\omega(c_r) = 1$. Зададим произвольные значения $\omega(d_i)$ при $i \neq r$ и положим

$$\omega(d_r) = \delta - \sum_{i \neq r} \omega(c_i) \omega(d_i).$$

Продолжим ω на все $H_1(P, \mathbb{Z}_2)$, считая, что

$$\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b) + (a, b).$$

Нетрудно видеть, что эта конструкция дает все вещественные неособые функции Арфа типа (g, δ, k_α) .

4. Функции Арфа на кривых разделяющего типа (все такие функции автоматически неособые) обладают дополнительными топологическими инвариантами.

Пусть (P, τ) – вещественная кривая разделяющего типа и $P_1 \cup P_2 = P \setminus P^\tau$. Соединим овалы $c_i, c_j \in P^\tau$ отрезком $\ell_{ij} \subset P_1$. Рассмотрим контуры $d_{ij} = \ell_{ij} \cup \tau \ell_{ij}$. Овалы c_i и c_j назовем подобными относительно функции Арфа ω на (P, τ) , если $\omega(d_{ij}) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Отношение подобия определено корректно и разбивает овалы на не более чем 2 класса эквивалентности.*

Рис. 3.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\ell}_{ij} \subset P_1$ – другой отрезок, соединяющий c_i и c_j , $\tilde{d}_{ij} = \tilde{\ell}_{ij} \cup \tau \tilde{\ell}_{ij}$ и $b \subset P_1 \cup P^\tau$ – замкнутый контур, составленный из ℓ_{ij} , $\tilde{\ell}_{ij}$ и частей овалов c_i и c_j . Тогда $\omega(d_{ij} + \tilde{d}_{ij}) = \omega(b + \tau b) = 2\omega(b) = 0$, откуда $\omega(d_{ij}) = \omega(d_{ij} + \tilde{d}_{ij}) + \omega(\tilde{d}_{ij}) = \omega(\tilde{d}_{ij})$. Таким образом, определение подобия не зависит от выбора отрезка ℓ_{ij} . Пусть

теперь $a \subset P_1 \cup P^\tau$ – замкнутый контур, состоящий из отрезков $\ell_{ij}, \ell_{jk}, \ell_{ki}$ и частей овалов c_i, c_j, c_k (см. рис. 3.2). Тогда $\omega(d_{ij} + d_{jk} + d_{ki}) = \omega(a + \tau a) = 2\omega(a) = 0$. Откуда $\omega(d_{ij}) = \omega(d_{ik}) + \omega(d_{kj})$. Таким образом, если c_i – (не) подобен c_k и c_k – (не) подобен c_j , то c_i подобен c_j .

Зафиксируем какой-нибудь овал $s \in P^\tau$. Пусть B_c – множество овалов, подобных s . Обозначим через $k_\alpha^0 = k_\alpha^0(P, \tau, \omega)$ (соответственно $k_\alpha^1 = k_\alpha^1(P, \tau, \omega)$) число овалов c_i в множестве B_c (соответственно в множестве $P^\tau \setminus B_c$) таких, что $\omega(c_i) = \alpha$. Набор чисел k_α^γ ($\alpha, \gamma \in \{0, 1\}$) определен с точностью до одновременной замены $k_\alpha^\gamma \mapsto k_\alpha^{1-\gamma}$, связанной с выбором контура s .

Топологическим типом функции Арфа ω на вещественной кривой (P, τ) типа $(g, k, 1)$ назовем набор $(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$, где $k_\alpha^\gamma = k_\alpha^\gamma(P, \tau, \omega)$, $\tilde{\delta} = \delta(P_1, \omega|_{P_1})$ и $P_1 \cup P_2 = P \setminus P^\tau$.

ТЕОРЕМА 3.4 [41]. *Набор $(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$ является топологическим типом некоторой функции Арфа на вещественной кривой (P, τ) типа $(g, k, 1)$, если и только если $(\tilde{g}, \tilde{\delta}, k_\alpha^0 + k_\alpha^1)$ является топологическим типом некоторой функции Арфа на поверхности рода $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g + 1 - k)$ с k дырами. В этом случае число таких функций Арфа равно*

$$C_k^{k_0} \cdot C_{k_0}^{k_0^0} \cdot C_{k_1}^{k_1^0} \cdot 2^{\tilde{g}-2} \cdot (2\tilde{g} + m),$$

где $m = 2\tilde{g}$, если $k_1 > 0$, $m = 1$, если $\tilde{\delta} = 0$, и $m = -1$, если $k_1 = 0$ и $\tilde{\delta} = 1$. Четность функций Арфа совпадает с четностью k_1^0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$ является топологическим типом функции Арфа на вещественной кривой (P, τ) типа $(g, k, 1)$, то набор $(\tilde{g}, \tilde{\delta}, k_\alpha^0 + k_\alpha^1)$ является топологическим типом функции Арфа $\omega|_{P_1}: H_1(P_1, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, где $P \setminus P^\tau = P_1 \cup P_2$. Пусть теперь (P, τ) – вещественная кривая типа $(g, k, 1)$, $P \setminus P^\tau = P_1 \cup P_2$, $\tilde{\omega}: H_1(P_1, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ – функция Арфа на P_1 типа $(\tilde{g}, \tilde{\delta}, k_\alpha^0 + k_\alpha^1)$ и $v = \{a_i, b_i \mid (i = 1, \dots, \tilde{g}), c_j \mid (j = \tilde{g} + 1, \dots, \tilde{g} + k)\} \subset H_1(P_1, \mathbb{Z}_2)$ – стандартный базис. Произвольным образом разобьем овалы c_i на группы $A_0^0, A_0^1, A_1^0, A_1^1$, где A_α^γ содержит k_α^γ контуров. Соединим овалы c_i и c_k отрезками $\ell_i \subset P_1$ и положим $d_i = \ell_i \cup \tau\ell_i$. Будем считать, что $\omega(c_i) = \alpha$, если $c_i \in A_\alpha^0 \cup A_\alpha^1$, и $\omega(d_i) = 0$, если c_i и c_k принадлежат одному и тому же множеству вида $A_0^\alpha \cup A_1^\alpha$. В противном случае положим $\omega(d_i) = 1$. Положим, наконец, $\omega(\tau a_i) = \omega(a_i)$, $\omega(\tau b_i) = \omega(b_i)$ ($i = 1, \dots, \tilde{g}$). Равенство

$$\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b) + (a, b)$$

позволяет однозначно продолжить ω до функции Арфа на (P, τ) . Нетрудно видеть, что ω имеет тип $(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$, причем эта конструкция дает все функции Арфа этого типа. Функция ω четна, если $k_1 = 0$, а при $k_1 > 0$ ее четность равна четности числа контуров из A_1^0 (напомним, что $k_1^0 + k_1^1$ – четно).

§ 4. Поднятие вещественных фуксовых групп

1. Обозначим через

$$J: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) = \text{Aut}(\Lambda)$$

естественную проекцию. Пусть

$$\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda)$$

– фуксова группа, состоящая из гиперболических автоморфизмов. Подгруппу $\Gamma^* \subset SL(2, \mathbb{R})$ назовем поднятием Γ , если $J(\Gamma^*) = \Gamma$ и $J|_{\Gamma^*}: \Gamma^* \rightarrow \Gamma$ – изоморфизм.

Согласно [47; § 7] поднятию Γ^* отвечает функция Арфа

$$\omega_{\Gamma^*}: H_1(\Lambda/\Gamma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Она определяется следующим образом. Пусть $a' \in \Gamma$ и $a \in H_1(\Lambda/\Gamma, \mathbb{Z}_2)$ – образ a' при естественной проекции $P_r: \Gamma \rightarrow \pi_1(\Lambda/\Gamma) \rightarrow H_1(\Lambda/\Gamma, \mathbb{Z}_2)$. Пусть

$$A = J^{-1}(a') \cap \Gamma^*$$

и $\text{Sp}(A)$ – след матрицы $A \in SL(2, \mathbb{R})$. Положим

$$\omega_{\Gamma^*}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{Sp}(A) < 0, \\ 1, & \text{если } \text{Sp}(A) > 0. \end{cases}$$

Согласно [47; теорема 7.2] соответствие $\Gamma^* \mapsto \omega_{\Gamma^*}$ является взаимно однозначным соответствием между поднятиями группы Γ и функциями Арфа на $P = \Lambda/\Gamma$.

2. Рассмотрим теперь

$$SL_{\pm}(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det A = \pm 1\}.$$

Продолжим проекцию J до гомоморфизма $J: SL_{\pm}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{\text{Aut}}(\Lambda)$, считая, что

$$J(A) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \text{если } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{и } \det A = -1.$$

Пусть $\tilde{\Gamma}$ – вещественная фуксова группа. Подгруппу $\tilde{\Gamma}^* \subset SL_{\pm}(2, \mathbb{R})$ назовем поднятием $\tilde{\Gamma}$, если $J(\tilde{\Gamma}^*) = \tilde{\Gamma}$ и $J|_{\tilde{\Gamma}^*}: \tilde{\Gamma}^* \rightarrow \tilde{\Gamma}$ – изоморфизм. Очевидно, что поднятие $\tilde{\Gamma}^*$ группы $\tilde{\Gamma}$ индуцирует поднятие $\Gamma^* = \tilde{\Gamma}^* \cap SL(2, \mathbb{R})$ группы $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(\Lambda)$ и, следовательно, функцию Арфа $\omega_{\tilde{\Gamma}^*} = \omega_{\Gamma^*}: H_1(\Lambda/\Gamma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

ЛЕММА 4.1. *Функция Арфа $\omega_{\tilde{\Gamma}^*}$ является неособой функцией Арфа на вещественной кривой $[\tilde{\Gamma}]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция Арфа $\omega_{\tilde{\Gamma}^*}$ вещественна, поскольку для любых $\alpha \in \tilde{\Gamma}^* \setminus \Gamma^*$, $a' \in \Gamma$ и $a = P_r(a')$ выполняются

$$\omega_{\tilde{\Gamma}^*}(\tau a) = \text{Sp}(\alpha(J^{-1}(a') \cap \Gamma^*)\alpha^{-1}) = \text{Sp}(J^{-1}(a') \cap \Gamma^*) = \omega_{\tilde{\Gamma}^*}(a).$$

Докажем, что $\omega_{\tilde{\Gamma}^*}$ неособа. Пусть $c \subset P \setminus P^r$ – простой контур такой, что $\tau c = c$ и $C \subset \Gamma$ – его образ при естественном изоморфизме $\pi_1(\Lambda/\Gamma, p) \rightarrow \Gamma$. Пусть

$$\tilde{C}^* = J^{-1}(\tilde{C}) \cap \tilde{\Gamma}^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где $\tilde{C} = \overline{C}\sqrt{C}$ (см. п. 4 § 2). Тогда

$$J^{-1}(C) \cap \Gamma^* = (\tilde{C}^*)^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2.$$

Следовательно,

$$\text{Sp}(J^{-1}(C) \cap \Gamma^*) > 0 \quad \text{и} \quad \omega(c) = 1.$$

Поднятия $\tilde{\Gamma}_1^*$ и $\tilde{\Gamma}_2^*$ вещественной фуксовой группы $\tilde{\Gamma}$ назовем *подобными*, если $(\tilde{\Gamma}_1^* \setminus \Gamma^*) = -(\tilde{\Gamma}_2^* \setminus \Gamma^*)$.

ЛЕММА 4.2. Пусть ω – неособая функция Арфа на $[\tilde{\Gamma}]$. Тогда существует ровно 2 поднятия $\tilde{\Gamma}^*$ группы $\tilde{\Gamma}$ таких, что $\omega_{\tilde{\Gamma}^*} = \omega$, причем эти поднятия подобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [47; § 7] существует единственное поднятие $\Gamma^* \subset SL(2, \mathbb{R})$ группы $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(\Lambda)$ такое, что $\omega_{\Gamma^*} = \omega$. Поэтому всякое поднятие $\tilde{\Gamma}^*$ группы $\tilde{\Gamma}$ с условием $\omega_{\tilde{\Gamma}^*} = \omega$ порождено Γ^* и матрицей α такой, что $J(\alpha) \in \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$. Если $(J(\alpha))(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$, то $\alpha = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Вещественность функции Арфа ω дает $\text{Sp}(\alpha A \alpha^{-1}) = \text{Sp}(A)$ для $A \in \Gamma^*$, откуда $\alpha \Gamma^* \alpha^{-1} = \Gamma^*$. Следовательно, группа $\tilde{\Gamma}^*$, порожденная Γ^* и α , является поднятием группы $\tilde{\Gamma}$.

Из лемм 4.1 и 4.2 следует

ТЕОРЕМА 4.1 [44]. Соответствие $\tilde{\Gamma}^* \mapsto \omega_{\tilde{\Gamma}^*}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами подобия поднятий вещественной фуксовой группы $\tilde{\Gamma}$ и неособыми функциями Арфа на вещественной кривой $[\tilde{\Gamma}]$.

3. Естественный изоморфизм $\pi_1(\Lambda/\Gamma, p) \rightarrow \Gamma$ сопоставляет классу свободной гомотопии контура $c \in P = \Lambda/\Gamma$ класс сопряженности $\Gamma_c \subset \Gamma$, не зависящий от выбора p . Таким образом, каждому простому геодезическому контуру $c \in P$ отвечает множество $\Gamma_c \subset \Gamma$, причем $\Phi(\ell(C)) = c$, если $C \in \Gamma_c$ и $\Phi: \Lambda \rightarrow P$ – естественная проекция.

Пусть теперь $\tilde{\Gamma}$ – вещественная фуксова группа и c – овал кривой $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$. Рассмотрим $C \in \Gamma_c$. Заменяя группу $\tilde{\Gamma}$ на сопряженную, можно считать, что $\ell(C) = I = \{z \in \Lambda \mid \text{Re } z = 0\}$. Тогда группа $\tilde{\Gamma}$ содержит инволюцию $\beta(z) = -\bar{z}$. Поднятие $\tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}^*$ переводит β в матрицу вида $\sigma \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\sigma = \pm 1$. Наделим полупрямую I ориентацией по возрастанию значений $\text{Im } z$, если $\sigma = 1$, и противоположной ориентацией, если $\sigma = -1$. Проекция Φ переносит ориентацию на контур $c = \Phi(I)$. Эта ориентация полностью определяется поднятием $\tilde{\Gamma}^*$ и будет называться *ориентацией овала порожденной поднятием $\tilde{\Gamma}^*$* .

ЛЕММА 4.3 [36]. Пусть $\tilde{\Gamma}^*$ – поднятие вещественной фуксовой группы $\tilde{\Gamma}$, $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$, c_1, c_2 – овалы инволюции τ , наделенные ориентацией, порожденной $\tilde{\Gamma}^*$, и $a \subset P$ – пересекающий c_1 и c_2 простой ориентированный контур такой, что $\tau a = -a$. Тогда a имеет одинаковые индексы пересечения с c_1 и c_2 , если и только если $\omega_{\tilde{\Gamma}^*}(a) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя группу $\tilde{\Gamma}$ на сопряженную, можно считать, что $\Gamma_a \supset A$, где $A(z) = \lambda z$ и $\lambda > 1$.

В этом случае (ввиду $\tau a = -a$, $c_i \cap a \neq \emptyset$ и $c_i \subset P^\tau$) $\Gamma_{c_i} \supset C_i$, где

$$C_i = \frac{\alpha_i(\lambda_i + 1)z + \alpha_i^2(\lambda_i - 1)}{(\lambda_i - 1)z + \alpha_i(\lambda_i + 1)}, \quad \lambda_i > 1, \quad \bar{C}_i = \frac{\alpha_i^2}{\bar{z}}$$

и $A = \bar{C}_1 \bar{C}_2$ (см. рис. 4.1). Положим $A^* = J^{-1}(A) \cap \tilde{\Gamma}^*$, $C_i^* = J^{-1}(C_i) \cap \tilde{\Gamma}^*$, $\bar{C}_i^* = J^{-1}(\bar{C}_i) \cap \tilde{\Gamma}^*$. Тогда по определению ориентации, порожденной $\tilde{\Gamma}^*$, $\bar{C}_i^* = - \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_i^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ и, значит,

$$A^* = \bar{C}_1^* \bar{C}_2^* = - \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_1^{-1} \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, индексы пересечения контура a с овалами c_1 и c_2 совпадают, если и только если неподвижные притягивающие точки α_1 и α_2 имеют одинаковый знак. Это эквивалентно $\text{Sp}(A^*) > 0$, т.е. $\omega_{\tilde{\Gamma}^*}(a) = 1$.

Рис. 4.1

Рис. 4.2

4. Пусть теперь $c \subset P$ – инвариантный контур кривой $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$ такой, что $c \cap P^\tau = \emptyset$. Рассмотрим $C \in \Gamma_c$. Как и раньше, заменяя $\tilde{\Gamma}$ на сопряженную группу, можно считать, что $l(C) = I$. Следовательно, группа $\tilde{\Gamma}$ содержит отображение вида $\beta(z) = -\lambda \bar{z}$, где $\lambda > 0$. Поднятие $\tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}^*$ переводит β в матрицу вида

$$\sigma \begin{pmatrix} -\lambda^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

где $\sigma = \pm 1$. Как и раньше, наделим I ориентацией по возрастанию значений $\text{Im } z$, если $\sigma = 1$, и противоположной ориентацией, если $\sigma = -1$. Проекция Φ переносит ориентацию на контур $c = \Phi(I)$. Она зависит лишь от поднятия $\tilde{\Gamma}^*$ и будет называться *ориентацией инвариантного контура, порожденной поднятием $\tilde{\Gamma}^*$* .

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\tilde{\Gamma}^*$ – поднятие вещественной фуксовой группы $\tilde{\Gamma}$ и $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$ – вещественная алгебраическая кривая типа $(g, k, 0)$. Пусть $(c_1, \dots, c_g)$ – набор попарно непересекающихся простых контуров таких, что $P^\tau = \bigcup_{i=1}^g c_i$ и $\tau(c_i) = c_i$. Тогда существует не пересекающийся с ними инвариантный контур

c_{g+1} , который вместе с контурами $(c_1, \dots, c_g)$ разбивает поверхность P на сферы с дырками P_1, P_2 таким образом, что порожденная $\tilde{\Gamma}^*$ ориентация контуров $c_1, \dots, c_g$ совпадает с их ориентацией как границы одной из поверхностей P_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим существующий согласно лемме 1.2 набор попарно непересекающихся инвариантных контуров $c_1, \dots, c_g, c \subset P$ такой, что $P^\tau = \bigcup_{i=1}^k c_i$ и $P \setminus (\bigcup_{i=1}^g c_i \cup c)$ — распадается на 2 сферы с дырками. Снабдим контуры $c_1, \dots, c_g$ ориентацией, порожденной поднятием $\tilde{\Gamma}^*$. Их образы на поверхности $\tilde{P} = P \setminus \bigcup_{i=1}^g c_i$ представляются парами контуров противоположной ориентации c'_i, c''_i , где c'_i и c'_j лежат в одной связной компоненте поверхности $\tilde{P} \setminus c$ (см. рис. 4.2). Симметрично меняя контур c так, как показано на рис. 4.2, можно перейти от контура c к симметричному контуру c_{g+1} , разделяющему контуры разной ориентации.

§ 5. Спиноры ранга 1 на вещественных алгебраических кривых

1. Напомним, что линейное расслоение $e: E \rightarrow P$ называется *спинорным расслоением ранга 1*, если его тензорный квадрат является кокасательным расслоением. Далее, если не оговорено противное, под спинорным расслоением понимается спинорное расслоение ранга 1 над римановой поверхностью P .

В [47; § 10] установлено взаимно однозначное соответствие между поднятиями Γ^* фуксовой группы Γ и спинорными расслоениями на $P = \Lambda/\Gamma$. Спинорное расслоение e_{Γ^*} , соответствующее Γ^* , имеет вид

$$(\Lambda \times \mathbb{C})/\Gamma^* \rightarrow \Lambda/\Gamma,$$

где Γ^* действует на $(\Lambda \times \mathbb{C})$ по правилу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (z, x) = \left(\frac{az + b}{cz + d}, (cz + d)x \right).$$

Таким образом, соответствие $e_{\Gamma^*} \rightarrow \Gamma^* \rightarrow \omega_{\Gamma^*}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие $e \rightarrow \omega_e$ между спинорными расслоениями и функциями Арфа на $P = \Lambda/\Gamma$.

2. Спинорным расслоением на вещественной кривой (P, τ) называется пара (e, β) , где $e: E \rightarrow P$ — спинорное расслоение, а $\beta: E \rightarrow E$ — антиголоморфная инволюция такая, что $e\beta = \tau e$. Два спинорных расслоения (e_1, β_1) и (e_2, β_2) на кривых (P_1, τ_1) и (P_2, τ_2) соответственно считаются изоморфными, если существуют биголоморфные отображения $\varphi_E: E_1 \rightarrow E_2$ и $\varphi_P: P_1 \rightarrow P_2$ такие, что

$$e_2 \varphi_E = \varphi_P e_1, \quad \beta_2 \varphi_E = \varphi_P \beta_1, \quad \tau_2 \varphi_P = \varphi_P \tau_1.$$

Обычно мы не будем различать изоморфные расслоения.

Сопоставим теперь каждому поднятию $\tilde{\Gamma}^*$ вещественной фуксовой группы $\tilde{\Gamma}$ спинорное расслоение $e_{\tilde{\Gamma}^*}$ на вещественной кривой $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$. По определению расслоение $e_{\tilde{\Gamma}^*}$ имеет вид $(e_{\Gamma^*}, \beta_{\tilde{\Gamma}^*})$, где $\beta_{\tilde{\Gamma}^*}: (\Lambda \times \mathbb{C})/\Gamma^* \rightarrow (\Lambda \times \mathbb{C})/\Gamma^*$ порождается отображением

$$(z, x) \mapsto \left(\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, (c\bar{z} + d)\bar{x} \right), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}^* \setminus \tilde{\Gamma}.$$

ЛЕММА 5.1. *Соответствие $\tilde{\Gamma}^* \mapsto e_{\tilde{\Gamma}^*}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами подобия поднятий $\tilde{\Gamma}^*$ вещественной фуксовой группы $\tilde{\Gamma}$ и спинорными расслоениями на $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (e, β) – произвольное спинорное расслоение на (P, τ) . Согласно [47; § 10] существует единственное поднятие Γ^* группы $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(\Lambda)$ такое, что

$$e: (\Lambda \times \mathbb{C})/\Gamma^* \rightarrow \Lambda/\Gamma.$$

Меняя группу $\tilde{\Gamma}$ на сопряженную, можно считать, что $\tilde{\Gamma}$ содержит отображение вида

$$z \mapsto -\mu\bar{z},$$

где $\mu \geq 1$. Пусть μ_* – минимальное среди всех таких μ . Положим $\nu = \sqrt{\mu_*}$. Тогда группа Γ^* и матрицы $\pm \begin{pmatrix} -\nu^{-1} & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$ порождают поднятия $\tilde{\Gamma}_+^*$ и $\tilde{\Gamma}_-^*$ группы $\tilde{\Gamma}$. Это единственные, содержащие Γ^* , поднятия группы $\tilde{\Gamma}$. Кроме того, $e_{\tilde{\Gamma}_\pm^*} = e$, причем изоморфизм между $e_{\tilde{\Gamma}_+^*}$ и $e_{\tilde{\Gamma}_-^*}$ порождается инволюцией $(z, x) \mapsto (z, -x)$.

Согласно лемме 2.1 и теореме 4.1 отсюда сразу следует

ТЕОРЕМА 5.1 [36], [44]. *Соответствие $e \mapsto \omega_e$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между спинорными расслоениями и неособыми функциями Арфа на вещественной кривой (P, τ) .*

Пусть (e, β) – спинорное расслоение на вещественной кривой (P, τ) . Используя леммы 2.1 и 5.1, построим изоморфизм

$$(e, \beta) \rightarrow (e_{\tilde{\Gamma}^*}, \beta_{\tilde{\Gamma}^*}),$$

где $\tilde{\Gamma}^*$ – поднятие вещественной фуксовой группы $\tilde{\Gamma}$ и $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$. Наделим овалы и непересекающие их инвариантные контуры кривой $[\tilde{\Gamma}]$ ориентацией, индуцированной поднятием $\tilde{\Gamma}^*$ (см. § 4). Таким образом, спинорное расслоение (e, β) на вещественной кривой (P, τ) порождает ориентацию на овалах и непересекающих их инвариантных контурах кривой (P, τ) . Она определена с точностью до одновременного обращения ориентации на всех овалах и инвариантных контурах.

3. Голоморфное сечение $\eta: P \rightarrow E$ спинорного расслоения $e: E \rightarrow P$ называется *спинором*. Сечение η произвольного спинорного расслоения (e, β) на вещественной кривой (P, τ) называется *вещественным спинором*, если $\beta\eta = \eta\tau$. Пусть $\{\tilde{\Gamma}_1^*, \tilde{\Gamma}_2^*\}$ – класс подобия, отвечающий согласно лемме 5.1 расслоению (e, β) . Тогда спинор η можно рассматривать как сечение спинорного расслоения e_{Γ^*} , где $\Gamma^* = \tilde{\Gamma}_1^* \cap \tilde{\Gamma}_2^*$. При этом η будет инвариантен относительно одной из инволюций $\beta_{\tilde{\Gamma}_i^*}$ и антиинвариантен относительно другой. Пусть для определенности $\beta_{\tilde{\Gamma}_1^*}\eta = \eta\tau$. Ориентацию, порожденную поднятием $\tilde{\Gamma}_1^*$ на овалах и инвариантных контурах (P, τ) , будем называть *ориентацией, порожденной η* .

Локальную карту $u: U \rightarrow \mathbb{C}$ в окрестности вещественной точки $p_0 \in P^\tau$ назовем *вещественной*, если $\tau U = U$ и $u(\tau p) = u(p)$. В этом случае $u(U \cap P^\tau) \subset \mathbb{R}$. Будем

говорить, что локальная карта *согласована со спинором* η , если порожденная спинором ориентация овала $a \ni p_0$ переходит под действием u в ориентацию по возрастанию вещественных значений $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Локальная карта на римановой поверхности задает локальную тривиализацию касательного расслоения и, следовательно, локальную тривиализацию спинорного расслоения. Таким образом, в локальной карте u спинору отвечает функция $f(u) \in \mathbb{C}$.

ЛЕММА 5.2. *Пусть (e, β) – спинорное расслоение на вещественной кривой (P, τ) и η – вещественный спинор этого расслоения. Тогда в любой вещественной карте $u: U \rightarrow \mathbb{C}$, согласованной с η , спинор η описывается функцией $f(u)$ такой, что $f(u\tau) = \overline{f(u)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $i_e: (z, x) \mapsto (iz, x)$. Согласно леммам 2.1 и 5.1 можно считать, что

$$(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}], \quad e: (\Lambda \times C)/\Gamma^* \rightarrow [\Gamma], \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}^* \setminus \Gamma^*$$

и $e i_e: (-i\Lambda \times 0) \rightarrow P$ порождает вещественную карту u , согласованную с η . В ней соотношение $\beta\eta = \eta\tau$ имеет вид

$$(u\tau, \overline{f(u)}) = \beta_{\tilde{\Gamma}^*}(u, f(u)) = (u\tau, f(u\tau)),$$

откуда $\overline{f(u)} = f(u\tau)$. Переход к любой другой вещественной карте, согласованной с η , сохраняет это соотношение.

ТЕОРЕМА 5.2 [42], [44]. *Пусть (e, β) – спинорное расслоение на вещественной кривой (P, τ) , η – вещественный спинор этого расслоения и a – овал кривой (P, τ) . Тогда четность числа нулей спинора η на овале a противоположна четности $\omega_e(a)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммам 2.1 и 5.1 можно считать, что

$$(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}], \quad e: (\Lambda \times \mathbb{C})/\Gamma^* \rightarrow [\Gamma], \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}^* \setminus \Gamma^*,$$

$$a = I/\Gamma, \quad \text{где } I = \{z \in \Lambda \mid \operatorname{Re} z = 0\}.$$

В локальной карте u , порожденной проекцией $e: (\Lambda \times 0) \rightarrow P$, спинор η представляется в виде $(u, f(u))$, где $u \in \Lambda$ и $f(u)$ – голоморфная функция такая, что

$$f\left(\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}\right) = f(u)(\gamma u + \delta)$$

для любой $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma^*$.

Контур a отвечает матрица

$$A = \sigma(a) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma^*,$$

где

$$\sigma(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega(a) = 1, \\ -1, & \text{если } \omega(a) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $f(\lambda^2 u) = \sigma(a)f(u)$. Кроме того, естественная проекция $\Lambda \rightarrow \Lambda/\Gamma$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между интервалом $(v, \lambda^2 v] \in I$ и контуром a . Следовательно, количество нулей спинора η на a равно числу нулей функции $f(u)$ на интервале $(v, \lambda^2 v] \in I$. С другой стороны, отображение $e: (\Lambda \times 0) \rightarrow P$ порождает вещественные карты в окрестности каждой точки овала a и, следовательно, согласно лемме 5.2 функция $f(u)$ вещественна на $(v, \lambda^2 v] \in I$. Таким образом, число нулей f на интервале $(v, \lambda^2 v] \in I$ четно, если $\sigma(a) = 1$, и нечетно, если $\sigma(a) = -1$.

4. ТЕОРЕМА 5.3 [42], [44]. Пусть $c_1, \dots, c_k$ — ориентированные овалы вещественной алгебраической кривой (P, τ) типа $(g, k, 0)$. Пусть $0 \leq m \leq k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}_2$ и $\sum_{i=1}^k \alpha_i \equiv g+1 \pmod{2}$. Тогда существует вещественный спинор η на (P, τ) такой, что 1) ориентация овала c_i , порожденная η , совпадает с первоначальной ориентацией, если и только если $i \leq m$; 2) четность числа нулей спинора η на овале c_i равна α_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1.2 существует набор попарно непересекающихся инвариантных относительно τ контуров $c_1, \dots, c_{g+1}$, разбивающих P на сферы с дырами P_1 и P_2 . Ориентация P_1 порождает на $\partial P_1 = \{c_1, \dots, c_{g+1}\}$ некоторую новую ориентацию. Без ограничения общности можно считать, что на c_1 она совпадает с исходной. Соединим контуры c_{g+1} и c_i отрезком $\ell_i \subset P_1$ и рассмотрим простой контур $d_i = \ell_i \cup \tau \ell_i \cup r_i \cup r_{g+1}$, где $r_j \subset c_j$. Положим $\omega(c_i) = 1 - \alpha_i$ при $i \leq k$, $\omega(c_i) = 1$ при $k < i \leq g$. При $1 \leq i \leq m$ положим $\omega(d_i) = 0$, если и только если ориентация, порожденная P_1 , совпадает с первоначальной ориентацией c_i . При $m < i \leq k$ положим $\omega(d_i) = 0$, если и только если ориентация, порожденная P_1 , противоположна первоначальной ориентации c_i . При $k < i \leq g$ положим $\omega(d_i) = 0$. Функция ω однозначно продолжается до функции Арфа $\omega: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, причем $\omega(c_{g+1}) = 1$ ввиду $\sum_{i=1}^k \alpha_i \equiv g+1 \pmod{2}$. Кроме того $\tau d_i = -d_i + c_{g+1} + \tilde{c}_i$, где

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq k, \\ c_i & \text{при } i > k. \end{cases}$$

Таким образом, $\omega(\tau d_i) = \omega(-d_i + c_{g+1} + \tilde{c}_i) = \omega(d_i)$ и, следовательно, ω — вещественная функция Арфа. Согласно лемме 3.3 она неособа. Согласно лемме 2.1 $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$, где $\tilde{\Gamma}$ — вещественная фуксова группа. Согласно лемме 4.2 $\omega = \omega_{\tilde{\Gamma}^*}$, где $\tilde{\Gamma}^*$ — некоторое поднятие группы $\tilde{\Gamma}$. По определению $\omega_e = \omega$, где $(e, \beta) = (e_{\tilde{\Gamma}^*}, \beta_{\tilde{\Gamma}^*})$.

Наряду с ω рассмотрим вещественную функцию Арфа ω' такую, что $\omega'(c_i) = \omega(c_i)$, $\omega'(d_i) = 1 - \omega(d_i)$. Ей отвечает вещественное спинорное расслоение (e', β') такое, что $\omega_{e'} = \omega'$. Кроме того,

$$\delta(\omega) + \delta(\omega') = \sum_{i=1}^g \omega(c_i) = 1$$

ввиду $\sum_{i=1}^k \alpha_i \equiv g+1 \pmod{2}$. Следовательно, или $\delta(\omega) = 1$, или $\delta(\omega') = 1$. Пусть для определенности $\delta(\omega_e) = \delta(\omega) = 1$. Согласно [2], [30] отсюда следует, что расслоение e имеет голоморфное сечение ξ . Тогда одно из сечений $\eta = \xi + \beta\xi$ или $\eta = i(\xi - \beta\xi)$

является вещественным ненулевым сечением расслоения (e, β) . Согласно лемме 4.3 и теореме 5.2 оно удовлетворяет свойствам, указанным в формулировке теоремы 5.3.

ТЕОРЕМА 5.4 [42], [44]. Пусть (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая типа $(g, k, 1)$. Ориентируем ее овалы $c_1, \dots, c_k$ как границу связной компоненты P_1 множества $P \setminus P^\tau$. Рассмотрим набор $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}_2$, содержащий четное число нулей, причем $\alpha_1 = \alpha_k = 0$. Пусть $1 \leq m < k$ и $\sum_{i=1}^m \alpha_i \equiv m+1 \pmod{2}$. Тогда существует вещественный спинор η на (P, τ) такой, что: 1) ориентация овала c_i , порожденная спинором η , совпадает с первоначальной, если и только если $i \leq m$; 2) четность числа нулей спинора η на овале c_i равна α_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соединим овалы c_i и c_k отрезком $\ell_i \subset P_1$ и положим $d_i = \ell_i \cup \tau\ell_i$ ($i = 1, \dots, k-1$). Рассмотрим произвольную функцию Арфа ω_1 на P_1 такую, что $\omega_1(c_i) = 1 - \alpha_i$. (Такая функция существует ввиду [47; лемма 8.1].) Продолжим ее до функции Арфа ω на P , считая, что $\omega(\tau w) = \omega(w)$ при $w \in H_1(P_1, \mathbb{Z}_2)$ и $\omega(d_i) = 1$, если и только если $i \leq m$. Тогда $\delta(\omega) = 1$. Завершение доказательства совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы 5.3.

§ 6. Голоморфные дифференциалы на вещественных алгебраических кривых

1. В этом параграфе мы считаем, что овалы вещественной алгебраической кривой $X = (P, \tau)$ наделены ориентацией. Эта ориентация индуцирована ориентацией одной из связных компонент множества $P \setminus P^\tau$, если $\varepsilon(X) = 1$. Будем считать, что вещественная карта $u: U \rightarrow \mathbb{C}$ согласована с ориентацией множества P^τ , если u переводит ориентированный отрезок $\ell = U \cap P^\tau$ в отрезок $u(\ell) \subset \mathbb{R}$, ориентированный по возрастанию вещественных чисел.

Напомним, что голоморфным дифференциалом на римановой поверхности P называется сечение $\xi: P \rightarrow T^*$ кокасательного расслоения $t: T^* \rightarrow P$. Пусть теперь (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая. Инволюция τ индуцирует антиголоморфную инволюцию $\tau^*: T^* \rightarrow T^*$ такую, что $t\tau^* = \tau t$. Дифференциал ξ называется вещественным, если $\tau^*\xi = \xi\tau$. В вещественной карте он имеет вид $\xi = f(u)du$, где $f(\bar{u}) = \overline{f(u)}$. В частности, $f(u(p)) \in \mathbb{R}$ при $p \in P^\tau$. Знак числа $f(u(p)) \in \mathbb{R}$ одинаков для всех вещественных карт, согласованных с ориентацией множества P^τ , и будет называться знаком дифференциала ξ в точке $p \in P^\tau$.

Будем говорить, что вещественный дифференциал ξ положителен (неотрицателен, неположителен, отрицателен) на овале $a \in P^\tau$, если он положителен (соответственно неотрицателен, неположителен, отрицателен) в каждой точке овала.

ЛЕММА 6.1. Пусть η – вещественный спинор на кривой (P, τ) . Тогда $\xi = \eta^2$ – вещественный дифференциал, неотрицательный на овале $a \in P^\tau$, если ориентация, порожденная η , совпадает с исходной, и неположительный на овале a , если ориентация, порожденная η , противоположна исходной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в вещественной карте $u: U \rightarrow \mathbb{C}$, согласованной с ориентацией P^τ , спинор η описывается функцией $f(u)$, то $\xi = f^2(u)du$. Если, кроме того, ориентация овала a порождена η , то согласно лемме 5.2 $f(u\tau) = \overline{f(u)}$ и f^2 неотрицателен на a . Изменение ориентации овала меняет знак у f^2 .

ТЕОРЕМА 6.1 [34], [44]. Пусть (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая типа (g, k, ε) с овалами $c_1, \dots, c_k$, где $k = k_+ + k_- + k_0$, $k_0 < g$, причем $k_+ \cdot k_- \neq 0$ при $\varepsilon = 1$. Тогда существует вещественный дифференциал на (P, τ) , неотрицательный на c_i при $i \leq k_+$, неположительный на c_i при $k_+ < i \leq k_+ + k_-$ и имеющий нули на c_i при $i > k_+ + k_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теоремам 5.3 и 5.4 существует вещественный спинор η , имеющий нули на $c_{k_++k_-+1}, \dots, c_k$ и порождающий на остальных овалах c_i ориентацию, совпадающую с ориентацией P^τ при $i \leq k_+$, и противоположную ориентации P^τ при $k_+ < i \leq k_+ + k_-$. Тогда согласно лемме 6.1 дифференциал $\xi = \eta^2$ обладает всеми нужными свойствами.

2. Рассмотрим более детально вещественные M -кривые, т.е. кривые типа $(g, g+1, 1)$.

ЛЕММА 6.2. Пусть $c_1, \dots, c_{g+1}$ – овалы M -кривой рода g и $1 \leq \alpha \leq n < \beta \leq g+1$. Тогда существует вещественный дифференциал ξ_1 , положительный на c_α , неотрицательный на $c_1, \dots, c_n$, отрицательный на c_β и неположительный на $c_{n+1}, \dots, c_{g+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 5.4 существует вещественный спинор η , порождающий на $c_1, \dots, c_n$ ориентацию, совпадающую с исходной, порождающий на $c_{n+1}, \dots, c_{g+1}$ ориентацию, противоположную исходной, и имеющий нули на овалах c_i , где $i \neq \alpha, \beta$. Но суммарное число нулей спинора равно $g-1$ [30]. Следовательно, η не имеет нулей на c_α и c_β . Таким образом, согласно лемме 6.1 вещественный дифференциал $\xi = \eta^2$ удовлетворяет всем условиям леммы.

Отсюда сразу следует

ЛЕММА 6.3. Пусть $c_1, \dots, c_{g+1}$ – овалы M -кривой рода g и $1 \leq n < g+1$. Тогда существует вещественный дифференциал ξ , положительный на $c_1, \dots, c_n$ и отрицательный на $c_{n+1}, \dots, c_{g+1}$.

ЛЕММА 6.4. Пусть $\alpha_1 < \dots < \alpha_{2g+2}$ – вещественные числа, $h(x) = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \alpha_i)$, P – риманова поверхность алгебраической кривой $y^2 = h(x)$ и $\tau: P \rightarrow P$ – антиголоморфная инволюция, порожденная соответствием $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$. Тогда (P, τ) – вещественная M -кривая рода g , всякий вещественный дифференциал которой положителен на одном из овалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Овалы кривой (P, τ) отвечают отрезкам $[\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]$. Вещественные дифференциалы на (P, τ) имеют вид

$$\xi_f = \frac{f(x) dx}{\sqrt{h(x)}},$$

где f – многочлен с вещественными коэффициентами степени не выше $g-1$. Если $f(x) > 0$, то на овалах, отвечающих соседним отрезкам, дифференциал имеет разные знаки. Поэтому если дифференциал ξ_f на каждом овале не является положительным, то f имеет более $g-1$ нулей. Это невозможно, поскольку $\deg f \leq g-1$.

ТЕОРЕМА 6.2 [34]. *Для всякого вещественного дифференциала на M -кривой существует овал, на котором он положителен, и овал, на котором он отрицателен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{M}$ – множество всех M -кривых рода g с упорядоченным множеством овалов $c_1, \dots, c_{g+1}$. Рассмотрим расслоение $\tilde{e}: \widetilde{E} \rightarrow \widetilde{M}$ со слоем $\tilde{e}^{-1}(P, \tau)$, состоящим из всех вещественных дифференциалов на (P, τ) . Рассмотрим базис слоя $\tilde{e}^{-1}(P, \tau)$, состоящий из дифференциалов $\xi_i = \xi_i(P, \tau)$ таких, что $\oint_{c_i} \xi_j = \delta_{ij}$ ($i, j \leq g$). Соответствие $\xi_i(P, \tau) \mapsto \xi_i(P', \tau')$ определяет связность F на $\widetilde{E}$.

Вещественный дифференциал назовем дифференциалом типа A (типа B), если на каждом овале имеются точки, где он неположителен (соответственно отрицателен). Пусть M^A (соответственно M^B) – множество M -кривых, имеющих дифференциал типа A (типа B). Тогда M^A – замкнутое множество. Используя связность F , нетрудно доказать, что M^B – открытое множество. Кроме того, $M^A \supset M^B$. Докажем, что $M^A \subset M^B$. Пусть $(P, \tau) \in M^A$ и ξ – дифференциал типа A на (P, τ) . Ввиду

$$\sum_{i=1}^{g+1} \int_{c_i} \xi = 0$$

дифференциал отрицателен хотя бы в одной точке. Пусть c – овал, содержащий такую точку. Согласно лемме 6.3 существует вещественный дифференциал γ , положительный на c и отрицательный на всех остальных овалах. Тогда при достаточно маленьком α $\xi + \alpha\gamma$ – дифференциал типа B . Таким образом, $M^A = M^B$ – открытое и связное множество в $\widetilde{M}$.

Но согласно теореме 2.1 $\widetilde{M}$ – связное множество и, следовательно, если $M^A \neq \emptyset$, то $M^A = \widetilde{M}$. Последнее противоречит лемме 6.4, согласно которой множество $\widetilde{M} \setminus M^A$ содержит гиперэллиптические кривые. Таким образом, $M^A = \emptyset$, т.е. любой вещественный дифференциал на M -кривой положителен на одном из овалов. Аналогично доказывается, что он также отрицателен на одном из овалов.

ТЕОРЕМА 6.3 [34]. *Пусть $1 \leq k \leq g+1$, $k \equiv g+1 \pmod{2}$ и $m \geq k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Тогда существует вещественная алгебраическая кривая типа $(g, k, 1)$ с овалами $c_1, \dots, c_k$, на которой всякий вещественный дифференциал, не имеющий нулей на овалах $c_1, \dots, c_m$, обязательно на одном из овалов вещественной кривой положителен, а на другом – отрицателен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим риманову поверхность P кривой

$$y^4 - 2y^2[(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_m) - (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)] + [(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_m) + (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)]^2 = 0,$$

где $\alpha_1 < \dots < \alpha_n \leq \beta_1 < \dots < \beta_m \in \mathbb{R}$, $n > 0$, $n, m \equiv 0 \pmod{2}$. Она получается разрешением особенностей из множества

$$((x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y = \pm \sqrt{(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)} \pm \sqrt{-(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_m)}).$$

Соответствия

$$\tau: (x, y) \mapsto (\overline{x}, \overline{y}),$$

$$\begin{aligned}\tau_\alpha: (x, \pm \sqrt{-(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)} \pm \sqrt{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)}) \\ \mapsto (x, \mp \sqrt{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)} \pm \sqrt{-(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\tau_\beta: (x, \pm \sqrt{-(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)} \pm \sqrt{(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)}) \\ \mapsto (x, \pm \sqrt{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)} \mp \sqrt{-(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m)})\end{aligned}$$

задают коммутирующие инволюции на P .

Нетрудно видеть, что (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая типа $(g, k, 1)$, где

$$g = \begin{cases} n + m - 1 & \text{при } \alpha_n < \beta_1, \\ n + m - 2 & \text{при } \alpha_n = \beta_1 \end{cases}$$

и

$$k = \begin{cases} n & \text{при } \alpha_n < \beta_1, \\ n - 1 & \text{при } \alpha_n = \beta_1. \end{cases}$$

Инволюция τ_α сохраняет каждый овал, а инволюция τ_β попарно переставляет все овалы при $\alpha_n < \beta_1$ и сохраняет ровно один овал при $\alpha_n = \beta_1$. Занумеруем овалы $c_1, \dots, c_k$ так, чтобы $\tau c_i = c_{k+1-i}$. Предположим, что существует вещественный дифференциал ξ , положительный на овалах $c_1, \dots, c_{\frac{n}{2}}$ и не являющийся отрицательным на остальных овалах. Тогда дифференциал $\xi + \xi\beta$ не является отрицательным ни на одном овале. Инволюция τ индуцирует антиголоморфную инволюцию $\tilde{\tau}: \tilde{P} \rightarrow \tilde{P}$ на поверхности $\tilde{P} = P/\langle \beta \rangle$. Нетрудно видеть, что $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$ – M -кривая рода $\frac{n}{2} - 1$. Дифференциал $\xi + \xi\beta$ индуцирует вещественный дифференциал кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$, не являющийся отрицательным ни на одном овале. Противоречие с теоремой 6.2 доказывает, что такого ξ не существует.

§ 7. Аналоги рядов Фурье и теорема Штурма–Гурвица на вещественных алгебраических кривых произвольного рода

1. Простейшей вещественной алгебраической кривой является сфера Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ с антиголоморфной инволюцией $\tau_{\mathbb{C}}: z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. Кривая $(\overline{\mathbb{C}}, \tau_{\mathbb{C}})$ имеет единственный овал

$$c = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\psi} \mid \psi \in \mathbb{R}\}.$$

Мы будем рассматривать мероморфные функции $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ такие, что $f(\tau_{\mathbb{C}} z) = \overline{f(z)}$. Простейшие из них – это функции, голоморфные вне 0 и ∞ . Они представляются в виде рядов Фурье

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c_n(z) + b_n s_n(z)),$$

где

$$c_n(z) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$$

и

$$s_n(z) = \frac{1}{2i}(z^n - z^{-n}).$$

Ограничения s_n и c_n на c — это классические тригонометрические функции

$$s_n(e^{i\psi}) = \sin n\psi, \quad c_n(e^{i\psi}) = \cos n\psi.$$

2. Пусть теперь (P, τ) — вещественная алгебраическая кривая типа $(g, k, 1)$ с точками $p_+, p_- \in P \setminus P^\tau$ общего положения такими, что $\tau p_+ = p_-$. Вместо функций мы будем рассматривать тензоры целого и полуцелого веса λ , т.е. мероморфные на P и голоморфные на $\tilde{P} = P \setminus (p_+ \cup p_-)$ сечения линейного расслоения $E^{\otimes 2\lambda} \rightarrow \tilde{P}$, где (E, β) — вещественное спинорное расслоение на $(\tilde{P}, \tau)$ и $2\lambda \in \mathbb{Z}$. Пусть M_λ — пространство таких тензоров. Согласно [27] если $\lambda \neq 0, 1$ или $|n| > \frac{g}{2}$, то для любого целого $n + \frac{g}{2}$ существует единственный тензор $f_n^\lambda \in M_\lambda$ с асимптотиками

$$f_n^\lambda = z_\pm^{\pm n - s}(1 + O(z_\pm))(dz_\pm)^\lambda$$

в окрестности $z_\pm$ точек $p_\pm$, где $s = s(\lambda, g) = \frac{g}{2} - \lambda(g-1)$. Инволюции β и τ индуцируют инволюции $\beta_\lambda: E^{\otimes 2\lambda} \rightarrow E^{\otimes 2\lambda}$ и $\tau_\lambda: M_\lambda \rightarrow M_\lambda$, где $\tau_\lambda f(p) = \beta_\lambda f(\tau p)$. Нетрудно видеть, что $\tau_\lambda f_n^\lambda = f_{-n}^\lambda$. Тензор $\xi \in M_\lambda$ называется *вещественным*, если $\tau_\lambda \xi = \xi$. В вещественной локальной карте он имеет вещественные значения на P^τ .

Аналогами $\cos nx$ и $\sin nx$ являются вещественные тензоры

$$c_n^\lambda = \frac{1}{2}(f_n^\lambda + f_{-n}^\lambda) \quad \text{и} \quad s_n^\lambda = \frac{1}{2i}(f_n^\lambda - f_{-n}^\lambda),$$

где $n \geq 0$. Аналогом теоремы сложения тригонометрических функций является

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, 1$ или $n_1 + n_2 > g$. Тогда

$$c_{n_1}^{\lambda_1} c_{n_2}^{\lambda_2} - s_{n_1}^{\lambda_1} s_{n_2}^{\lambda_2} = \sum_{n=-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \delta_n c_{n_1+n_2-n}^{\lambda_1+\lambda_2},$$

$$c_{n_1}^{\lambda_1} s_{n_2}^{\lambda_2} - c_{n_2}^{\lambda_2} s_{n_1}^{\lambda_1} = \sum_{n=-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \eta_n s_{n_1+n_2-n}^{\lambda_1+\lambda_2},$$

где $\delta_n, \eta_n \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [27]

$$f_n^\lambda f_m^\mu = \sum_{k=-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} Q_{n,m}^{\lambda,\mu,k} f_{n+m-k}^{\lambda+\mu}.$$

Равенство $\tau_\lambda f_n^\lambda = f_{-n}^\lambda$ влечет

$$Q_{-n,-m}^{\lambda,\mu,k} = \overline{Q}_{n,m}^{\lambda,\mu,-k}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
c_{n_1}^{\lambda_1} c_{n_2}^{\lambda_2} - s_{n_1}^{\lambda_1} s_{n_2}^{\lambda_2} &= \frac{1}{4} (f_{n_1}^{\lambda_1} + f_{-n_1}^{\lambda_1}) (f_{n_2}^{\lambda_2} + f_{-n_2}^{\lambda_2}) + \frac{1}{4} (f_{n_1}^{\lambda_1} - f_{-n_1}^{\lambda_1}) (f_{n_2}^{\lambda_2} - f_{-n_2}^{\lambda_2}) \\
&= \frac{1}{2} (f_{n_1}^{\lambda_1} f_{n_2}^{\lambda_2} + f_{-n_1}^{\lambda_1} f_{-n_2}^{\lambda_2}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} (Q_{-n_1, -n_2}^{\lambda_1, \lambda_2, n} + \overline{Q}_{n_1, n_2}^{\lambda_1, \lambda_2, n}) (f_{n_1+n_2-n}^{\lambda_1+\lambda_2} + f_{-n_1-n_2+n}^{\lambda_1+\lambda_2}) \\
&= \sum_{n=-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} \delta_n c_{n_1+n_2-n}^{\lambda_1+\lambda_2},
\end{aligned}$$

где $\delta_n = 2 \operatorname{Re} Q_{n_1, n_2}^{\lambda_1, \lambda_2, n}$. Второе равенство доказывается аналогично.

Аналогом теоремы Фурье является

ТЕОРЕМА 7.2 [43]. *Всякий вещественный тензор f^λ веса $\lambda \neq 0, 1$ однозначно представляется в виде*

$$f^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k c_k^\lambda + b_k s_k^\lambda),$$

где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [27]

$$f^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n f_n^\lambda + \beta_n f_{-n}^\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c_n^\lambda + b_n s_n^\lambda),$$

где $a_n = \alpha_n + \beta_n$ и $b_n = i(\alpha_n - \beta_n)$. Равенство $\tau f^\lambda = f^\lambda$ влечет $\beta_n = \overline{a_n}$, откуда $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Следующая теорема является аналогом классической теоремы Штурма–Гурвица [22].

ТЕОРЕМА 7.3 [43]. *Пусть $\lambda \neq 0, 1$ или $n > \frac{g}{2}$. Тогда вещественный тензор*

$$F = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k c_k^\lambda + b_k s_k^\lambda)$$

имеет на овалах P^τ не менее $2n - g$ нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – дивизор тензора c_n^λ . Он имеет вид $D = D_1 + D_0 + D_2$, где $D_0 \in P^\tau$, $P \setminus P^\tau = P_1 \cup P_2$, $D_i \in P_i$, $\tau D_1 = D_2$. Пусть $p_+ \in P_1$, n_0 – степень D_0 и n_1 – степень D_1 . Положим $G = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k f_k^\lambda$, где $\alpha_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$. Рассмотрим систему попарно непересекающихся дуг и контуров $L \subset P_1$ такую, что $Q = P_1 \setminus L$ – односвязная область (см. рис. 7.1). Пусть $c \subset Q$ – простой, не гомотопный 0, контур на $Q - p_+$. Функция $f = G/c_n^\lambda$ имеет в области, ограниченной контуром c , нуль в p_+ кратности $2n$ и не более n_1 полюсов. Поэтому контур $f(c)$ обходит 0 не менее $2n - n_1$ раз и, следовательно, пересекает $\operatorname{Im} \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$ не менее $2(2n - n_1)$

Рис. 7.1

раз. Устремляя s к границе области Q , находим, что $f(P^\tau)$ пересекает $\text{Im } C$ не менее $4n - (2n_1 + n_0) = 2n - g$ раз. Но если $p \in P^\tau$ и $f(p) \in \text{Im } C$, то

$$F(p) = G(p) + (\tau G)(p) = c_1^\lambda(p) (f(p) + \overline{f(\tau(p))}) = 0.$$

Следовательно, F имеет на P^τ не менее $2n - g$ нулей.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $g = \lambda = 0$ теорема 7.3 была доказана Гурвишем [22]. В этом случае она неоднократно передоказывалась различными способами в связи с важными приложениями в теории особенностей. Приведенное выше доказательство аналогично первоначальному доказательству Гурвица для случая $g = \lambda = 0$ в интерпретации В.И. Арнольда.

§ 8. Якобианы и θ -функции вещественных алгебраических кривых

1. Напомним некоторые факты классической теории римановых поверхностей [19]. Пусть P — компактная риманова поверхность рода g . Базис гомологий

$$\{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g)\} \in H_1(P, \mathbb{Z})$$

назовем *симплектическим*, если индексы пересечения циклов имеют вид

$$(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0, \quad (a_i, b_j) = \delta_{ij}.$$

Будем говорить, что базис $\xi_1, \dots, \xi_g$ пространства голоморфных дифференциалов на P порожден симплектическим базисом $\{a_i, b_i\}$, если $\oint_{a_k} \xi_j = 2\pi i \delta_{kj}$. В этом случае матрица $B = (B_{kj})$, где $B_{kj} = \oint_{b_k} \xi_j$, — симметрична и имеет отрицательно определенную вещественную часть $\text{Re } B = (\text{Re } B_{ij})$. Это позволяет определить θ -функцию $\theta: \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$ равенством

$$\theta(z) = \theta(z | B) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle BN, N \rangle + \langle N, z \rangle \right\},$$

где

$$\langle (x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g) \rangle = \sum_{i=1}^g x_i y_i.$$

Пусть G – группа, порожденная векторами

$$\ell_k = 2\pi i(\delta_{k1}, \dots, \delta_{kg}) \quad \text{и} \quad h_k = (B_{k1}, \dots, B_{kg}) \quad (k = 1, \dots, g).$$

Комплексный тор $J = J(P) = \mathbb{C}^g/G$ называется *якобианом поверхности P* . Пусть $\Phi: \mathbb{C}^g \rightarrow J$ – естественная проекция.

Неупорядоченный набор из k точек на P называется (*положительным*) *дивизором степени k* . Пусть S_k – множество всех положительных дивизоров степени k . Зафиксируем на P точку q и сопоставим дивизору $D = \sum_{i=1}^k p_i$ точку якобиана

$$A_q(D) = \Phi\left(\int_q^D \xi_1, \dots, \int_q^D \xi_g\right) = \Phi\left(\sum_{i=1}^k \left(\int_q^{p_i} \xi_1, \dots, \int_q^{p_i} \xi_g\right)\right).$$

Тогда $A_q(S_g) = J$, причем в общей точке *отображение Абеля* A_q обратимо. Образ K_q на J вектора $(K_q^1, \dots, K_q^g)$, где

$$K_q^j = \frac{2\pi i + B_{jj}}{2} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell \neq j} \int_{a_\ell} \left(\omega_\ell(p) \int_q^p \omega_j \right)$$

называется *вектором римановых констант*. При этом $2K_q = -A_q(D_\xi)$, где D_ξ – дивизор нулей произвольного (голоморфного) дифференциала ξ на P . Множество

$$(\theta) = A_q(S_{g-1}) + K_q \in J$$

совпадает с образом на J множества нулей θ -функции и называется *θ -дивизором*. Подмножество $\Sigma \subset J$ назовем особым, если $\Sigma \cap A_q(S_{g-1}) \neq \emptyset$. В этом случае множество $\Sigma + K_q$ содержит нуль θ -функции.

2. Пусть теперь (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая. В этом и двух следующих параграфах мы будем рассматривать лишь кривые с вещественными точками. Пусть $q \in P^\tau$ – одна из них. Нам понадобится согласованный с τ симплектический базис

$$\{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g)\} \subset H_1(P, \mathbb{Z}),$$

который будет называться *вещественным базисом гомологий*. Для кривых типа $(g, k, 0)$ – это базис со свойствами: 1) $\tau(a_i) = a_i$ ($i = 1, \dots, g$), $\tau(b_i) = -b_i$ ($i = 1, \dots, k-1$), $\tau(b_i) = -b_i + a_i$ ($i = k, \dots, g$); 2) овал, на котором лежит точка q , гомологичен $\sum_{i=1}^g a_i$. Для кривых типа $(g, k, 1)$ – это базис со свойствами 1) $\tau(a_i) = a_i$, $\tau(b_i) = -b_i$ ($i = 1, \dots, k-1$), $\tau(a_i) = a_{i+m}$, $\tau(b_i) = -b_{i+m}$ ($i = k, \dots, k+m-1$), где $m = \frac{1}{2}(g+1-k)$; 2) овал, на котором лежит точка q , гомологичен $\sum_{i=1}^{k-1} a_i$.

ЛЕММА 8.1. *Вещественный базис существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (P, τ) – вещественная кривая типа $(g, k, 0)$. Тогда согласно лемме 1.2 существует набор попарно непересекающихся контуров $a_0, a_1, \dots, a_g$ такой, что

$$\tau(a_i) = a_i, \quad P^\tau = \bigcup_{i=0}^k a_i$$

и $P \setminus \bigcup_{i=0}^g a_i$ распадается на компоненты P_1 и P_2 . Занумеруем контуры так, чтобы $q \in a_0$. Положим $b_i = c_i \cup \tau c_i \cup r_i$, где $c_i \subset P_1$ соединяет a_0 и a_i , а $r_i \subset a_i$ соединяет $r_i = c_i \cap a_i$ и τr_i . Случай $(g, k, 1)$ разбирается аналогично.

Из определений сразу следует

ЛЕММА 8.2. Пусть $\{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g)\}$ – вещественный базис алгебраической кривой (P, τ) типа (g, k, ε) . Тогда $\bar{h}_j = h_j$ при $j \leq k-1$, $\bar{h}_j = h_j - \ell_j$ при $\varepsilon = 0$, $j = k, \dots, g$ и $\bar{h}_j = h_{j+m}$ при $\varepsilon = 1$, $j = k, \dots, k+m-1$.

Далее в этом параграфе мы считаем базис гомологий вещественным.

3. Пусть (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая типа (g, k, ε) и $J = J(P)$. Рассмотрим инволюцию $\tilde{\tau}: \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^g$, которая в базисе $(\ell_i, h_i \ (i = 1, \dots, g))$ пространства $\mathbb{R}^{2g} = \mathbb{C}^g$ задается линейным отображением $\ell_j \mapsto \ell_j, h_j \mapsto -h_j$, если $j \leq k-1$ или $\varepsilon = 0$; $\ell_j \mapsto \ell_{j+m}, h_j \mapsto -h_{j+m}$ при $\varepsilon = 1, j = k, \dots, k+m-1$ и $\ell_j \mapsto \ell_{j-m}, h_j \mapsto -h_{j-m}$ при $\varepsilon = 1, j = k+m, \dots, g$. Согласно лемме 8.2 отображение $\tilde{\tau}$ индуцирует инволюцию $\tau_{\mathbb{R}}: J \rightarrow J$. Из этой же леммы следует, что отображение Абеля A_q отождествляет $\tau_{\mathbb{R}}$ с инволюцией $S_g \rightarrow S_g$, сопоставляющей дивизору $D \in S_g$ дивизор τD .

Неподвижные точки инволюции $\tau_{\mathbb{R}}$ называются *вещественными точками якобиана* кривой (P, τ) . Они образуют *вещественную часть* $J_{\mathbb{R}}$ якобиана.

ТЕОРЕМА 8.1. Вещественная часть якобиана вещественной алгебраической кривой (P, τ) типа (g, k, ε) , где $k > 0$, распадается на 2^{k-1} вещественных торов вида

$$\Phi(T_{\mathbb{R}} + \delta),$$

где

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j h_j, \quad \delta_j \in \{0, 1\},$$

причем $T_{\mathbb{R}} = i\mathbb{R}^g$, если $\varepsilon = 0$, и

$$T_{\mathbb{R}} = \{(x_1, \dots, x_g) \in \mathbb{C}^g \mid x_j \in i\mathbb{R} \text{ при } j \leq k-1, \bar{x}_k = -x_{j+m} \text{ при } k \leq j \leq k+m\},$$

если $\varepsilon = 1$.

Такой тор неособый, если и только если $\varepsilon = 1$, $k = g+1$, $\delta_1 = \dots = \delta_g = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения на вещественную часть находятся прямым вычислением. Если $p \in P$, то

$$\left(\int_q^p \xi_1 + \int_q^{\tau p} \xi_1, \dots, \int_q^p \xi_g + \int_q^{\tau p} \xi_g \right) \in T_{\mathbb{R}}.$$

Если $p \in a_j$, то

$$\left(\int_q^p \xi_1, \dots, \int_q^p \xi_g \right) = \frac{1}{2} h_j.$$

Поэтому $x \in \Phi(T_{\mathbb{R}} + \delta)$, если и только если $x = A_q(D)$, где $D \in R_\delta = \{D \in S_g \mid \tau D = D, \text{ четность степени дивизора } D \cap a_j \text{ равна } \delta_i\}$.

С другой стороны, $R_\delta \cap S_{g-1} = \emptyset$, если и только если

$$\sum_{i=1}^{k-1} \delta_i > g-1,$$

т.е. $k = g+1, \delta_1 = \dots = \delta_g = 1$.

4. Наряду с инволюцией $\tau_{\mathbb{R}}$ рассмотрим инволюцию $\tau_{\mathbb{I}} = -\tau_{\mathbb{R}}: J \rightarrow J$. Неподвижные точки этой инволюции образуют мнимую часть $J_{\mathbb{I}}$ якобиана J .

ТЕОРЕМА 8.2. *Мнимая часть якобиана вещественной алгебраической кривой (P, τ) типа (g, k, ε) , где $k > 0$, распадается на 2^{k-1} вещественных торов вида $\Phi(T_{\mathbb{I}} + \delta)$, где $\delta = \pi i(\delta_1, \dots, \delta_{k-1}), \delta_i \in \{0, 1\}$, причем $T_{\mathbb{I}} = \mathbb{R}^g$, если $\varepsilon = 0$, и $T_{\mathbb{I}} = \{(x_1, \dots, x_g) \in \mathbb{C}^g \mid x_j \in \mathbb{R} \text{ при } j \leq k-1, \bar{x}_j = -x_{j+m} \text{ при } k \leq j \leq k+m\}$, если $\varepsilon = 1$. При $\varepsilon = 0$ все торы особые. При $\varepsilon = 1$ среди них есть ровно один неособый тор, отвечающий $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{k-1} = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения на мнимую часть находятся прямым вычислением. Рассмотрим множество $I = \{D \in S_g \mid D + \tau D = (\text{дивизор нулей мероморфного дифференциала, голоморфного вне } q \text{ и имеющего в } q \text{ полюс порядка } 0 \text{ или } 2)\}$. Тогда, ввиду $\tau_{\mathbb{R}} K_q = K_q, A_q(I) - K_q = J_{\mathbb{I}}$.

По определению дивизору $D \in I$ отвечает мероморфный дифференциал ξ_D . Пусть $A_1 \cup A_2$ — произвольное разбиение множества овалов $A = (a_0, \dots, a_{k-1})$. Обозначим через $I_{A_1, A_2} = I_{A_2, A_1} \subset I$ подмножество таких $D \in I$, что дифференциал ξ_D или дифференциал $-\xi_D$ неотрицателен на овалах из A_1 и неположителен на овалах A_2 . Лежащие на овалах нули и полюсы дифференциала ξ_D имеют четную степень и, следовательно, $I = \bigcup I_{A_1, A_2}$.

Согласно теореме 6.1 для любого разбиения $A = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$, существует голоморфный вещественный дифференциал ξ , неотрицательный на A_1 и неположительный на A_2 . Прибавляя дифференциал $\lambda \xi$ к произвольному дифференциалу $\xi_D, D \in I$, легко доказать, что $I_{A_1, A_2} \neq \emptyset$. Таким образом, $I = \bigcup I_{A_1, A_2}$ состоит из не менее чем 2^{k-1} компонент связности. Но, как уже доказано, множество $J_{\mathbb{I}} = A_q(I) - K_q$ состоит из 2^{k-1} компонент связности. Таким образом, всякое I_{A_1, A_2} — связно. Если $A_1 \neq \emptyset$ и $A_2 \neq \emptyset$ или $\varepsilon = 0$, то согласно теореме 6.1 существует $D \in I_{A_1, A_2}$ такой, что ξ_D — голоморфен. В этом случае $q \in D$,

$$A_q(D) = A_q(D \setminus q) \in A_q(S_{g-1})$$

и, следовательно, компонента I_{A_1, A_2} — особа. Если $A_1 = \emptyset$ или $A_2 = \emptyset$, то условие $A_q(D) \subset A_q(S_{g-1})$ означает, что дифференциал ξ_D голоморфен и имеет одинаковые знаки на всех овалах. Это невозможно при $\varepsilon = 1$ ввиду $\sum_{i=0}^{k-1} a_i = 0$. Следовательно, при $\varepsilon = 1$ компонента $A_q(I_{\emptyset, A})$ — неособа.

Найдем, какому вектору δ отвечает эта компонента. Пусть сначала $k = g + 1$ и (P, τ) — гиперэллиптическая кривая. Тогда мнимая часть якобиана кривой (P, τ) совпадает с вещественной частью якобиана кривой $(P, \alpha\tau)$, где $\alpha: P \rightarrow P$ — гиперэллиптическая инволюция. Будем считать, что $q \in P^\tau \cap P^{\alpha\tau}$ — неподвижная точка этой инволюции. Из теоремы 8.1 следует, что неособый мнимый тор якобиана кривой (P, τ) (он же неособый вещественный тор якобиана кривой $(P, \alpha\tau)$) отвечает вектору $\delta = \pi i(1, \dots, 1)$. Этот вектор не меняется при непрерывной деформации кривой (P, τ) . Ввиду связности множества $M_{g,g+1,1}$ (теорема 2.1) этот же вектор отвечает неособому тору мнимой части якобиана для любой M -кривой.

Случай $k < g + 1$ сводится к случаю $k = g + 1$ следующим образом. Рассмотрим простой контур a такой, что $a \cup \tau a$ высекает на поверхности P поверхность $\tilde{P}$ рода $k - 1$ с 2 дырами. Рассмотрим непрерывную деформацию кривой (P, τ) , стягивающую контур a в точку. В процессе деформации вектор, отвечающий неособому тору мнимой части якобиана, не меняется. В пределе он дает вектор, отвечающий M -кривой, т.е. $\pi i(1, \dots, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Число действительных и мнимых торов примианы впервые найдено в [11]. Число особых и неособых торов найдено для $\varepsilon = 1$ в [19], для $\varepsilon = 0$ в [13], [34]. Другим способом это было доказано в [50].

§ 9. Примианы вещественных алгебраических кривых

1. В классической алгебраической геометрии (см., например, [19]) кривым с автоморфизмами сопоставляют похожие на якобианы, но не совпадающие с ними алгебраические многообразия — примианы. Мы рассмотрим лишь простейший, но важный для приложений пример таких многообразий.

Пусть P — компактная риманова поверхность рода $2g$ и $\alpha: P \rightarrow P$ — голоморфная инволюция с 2 неподвижными точками q_1 и q_2 . Симплектический базис $\{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, 2g)\}$ назовем *симметричным*, если $\alpha a_i = -a_{i+g}$, $\alpha b_i = -b_{i+g}$ ($i = 1, \dots, g$). Отображение дивизоров $D \mapsto \alpha(D)$ индуцирует инволюцию $\alpha^*: S_g \rightarrow S_g$. Отображение Абеля A_{q_1} переносит ее на $J = J(P)$, порождая инволюцию $\alpha^*: J \rightarrow J$. Подмножество

$$Pr = Pr(P, \alpha) = \{x \in J \mid \alpha^* x = -x\}$$

называется *примианом* поверхности с инволюцией (P, α) . Примианы изоморфны тору $\mathbb{C}^g / G$, где G — решетка, порожденная векторами ℓ_i и вектор-столбцами ξ_i матрицы

$$A_{ij} = \int_{b_i} \xi_j + \xi_{j+g} \quad (i, j = 1, \dots, g)$$

в обозначениях § 7.

2. Вещественной кривой с инволюцией (P, τ_1, α) называется компактная риманова поверхность P рода $2g$ с двумя коммутирующими инволюциями, одна из которых, τ_1 — антиголоморфна, а другая, α — голоморфна и имеет ровно 2 неподвижные точки q_1, q_2 , причем $\tau_1 q_1 = q_2$. Положим $\tau_2 = \tau_1 \alpha$. Пусть среди овалов инволюции τ_i имеется r_i овалов, инвариантных относительно α , и $2t_i$, попарно переставляемых инволюцией α . Тогда

$$(\tilde{P}, \tilde{\tau}) = (P / \langle \alpha \rangle, \tau_i / \langle \alpha \rangle)$$

– вещественная алгебраическая кривая типа (g, k, ε) , где $k = t_1 + r_1 + t_2 + r_2$. При этом прообраз множества $\tilde{P}^{\tilde{\tau}}$ совпадает с $P^{\tau_1} \cup P^{\tau_2}$. Он разбивает P на 2 части, если и только если $\varepsilon = 1$. Набор $(g, \varepsilon, t_1, r_1, t_2, r_2)$ назовем типом вещественной кривой с инволюцией (P, τ_1, α) .

ПРИМЕР 9.1. Пусть $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$ – вещественная кривая типа $(g, k, 1)$ и $k = t_1 + r_1 + t_2 + r_2$, где $r_1 + r_2 = 1 \pmod{2}$. Рассмотрим компоненту связности $\tilde{P}_1$ множества $\tilde{P} \setminus \tilde{P}^{\tilde{\tau}}$ и двулистное накрытие $\varphi_1: P_1 \rightarrow \tilde{P}_1$ с единственной точкой ветвления $q_1 \in P_1$, двулистное на $r_1 + r_2$ контурах $c_1, \dots, c_{r_1+r_2} \in \partial P_1$ и однолистное на остальных граничных контурах $c_{r_1+r_2+1}, \dots, c_{\hat{k}}$, где $\hat{k} = r_1 + r_2 + 2t_1 + 2t_2$. Используя конструкцию примера 1.1, построим вещественную алгебраическую кривую $(\hat{P}, \hat{\tau})$ такую, что $\hat{P}^{\hat{\tau}} = \bigcup_{i=1}^{\hat{k}} c_i$ разбивает $\hat{P}$ на P_1 и $P_2 = \hat{\tau}P_1$. Накрытие φ_1 индуцирует двулистное накрытие $\hat{\varphi}: \hat{P} \rightarrow \tilde{P}$, где $\hat{\varphi}\hat{\tau} = \tilde{\tau}\hat{\varphi}$. Пусть $\alpha: \hat{P} \rightarrow \hat{P}$ – инволюция перестановки его листов. Она коммутирует с $\hat{\tau}$ и имеет ровно 2 неподвижные точки q_1 и $q_2 = \hat{\tau}q_1$. Разрежем поверхность $\hat{P}$ по контурам $c_{r_1+1}, \dots, c_{r_1+r_2}$ и $c_{r_1+r_2+2t_1+1}, \dots, c_{r_1+r_2+2t_1+2t_2}$ и склеим граничные контуры по отображению $\alpha\hat{\tau}$. На полученной поверхности P инволюция $\hat{\tau}$ индуцирует инволюцию $\tau_1: P \rightarrow P$, коммутирующую с α . Положим $\tau_2 = \alpha\tau_1$. Нетрудно видеть, что (P, τ_1, α) – вещественная кривая с инволюцией типа $(g, 1, t_1, r_1, t_2, r_2)$.

Нетрудно видеть также, что справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 9.1. *Конструкция примера 9.1 позволяет построить все вещественные кривые с инволюцией типа $(g, 1, t_1, r_1, t_2, r_2)$.*

ПРИМЕР 9.2. Пусть $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$ – вещественная кривая типа $(g, k, 0)$ и $k = t_1 + r_1 + t_2 + r_2$, где $r_1 + r_2 = 1 \pmod{2}$. Используя лемму 1.2, построим набор попарно непересекающихся контуров $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{g+1}$ таких, что $\tilde{\tau}\tilde{c}_i = \tilde{c}_i$ и $\tilde{P}^{\tilde{\tau}} = \bigcup_{i=1}^k \tilde{c}_i$. Рассмотрим компоненту связности $\tilde{P}_1$ множества $\tilde{P} \setminus \bigcup_{i=1}^{g+1} \tilde{c}_i$ и двулистное накрытие $\varphi_1: P_1 \rightarrow \tilde{P}_1$ с единственной точкой ветвления $q_1 \in P_1$, двулистное на контурах $c_1, \dots, c_{r_1+r_2}$ и однолистное на остальных контурах $c_{r_1+r_2+1}, \dots, c_v$. Используя конструкцию примера 1.2, построим вещественную алгебраическую кривую $(\hat{P}, \hat{\tau})$ такую, что $\hat{P} \setminus \bigcup_{i=1}^v c_i$ разбивает $\hat{P}$ на P_1 и $P_2 = \hat{\tau}P_1$, причем $\hat{P}^{\hat{\tau}} = \bigcup_{i=1}^{\hat{k}} c_i$, где $\hat{k} = r_1 + r_2 + 2t_1 + 2t_2$. Дословно повторяя разрезы и склейки, описанные в примере 9.1, получаем вещественную кривую с инволюцией (P, τ_1, α) типа $(g, 0, t_1, r_1, t_2, r_2)$.

ЛЕММА 9.2 [7], [35]. *Конструкция примера 9.2 позволяет построить все вещественные кривые с инволюцией типа $(g, 0, t_1, r_1, t_2, r_2)$.*

3. Пусть (P, τ_1, α) – вещественная кривая с инволюцией типа $(g, \varepsilon, t_1, r_1, t_2, r_2)$. Пересечение приммиана $Pr = Pr(P, \alpha) \subset J(P) = J$ с вещественной частью якобиана кривой (P, τ_1) называется *вещественной частью приммиана* вещественной кривой с инволюцией (P, τ_1, α) . Ее связные компоненты называются *вещественными торами приммиана* кривой (P, τ_1, α) . Они составляют неподвижные точки инволюции $(\tau_1)_{\mathbb{R}}|_{Pr}: Pr \rightarrow Pr$.

ТЕОРЕМА 9.1. *Вещественная часть приммиана вещественной кривой с инволюцией (P, τ_1, α) типа $(g, \varepsilon, t_1, r_1, t_2, r_2)$, где $k = t_1 + r_1 + t_2 + r_2 > 0$, распадается на 2^{k-1} вещественных тора размерности g .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем симметричный базис $\Delta = \{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g)\}$ пары (P, α) таким образом, чтобы проекция циклов $\{a_i, b_i \ (i = 1, \dots, g)\}$ давала вещественный базис $\tilde{\Delta}$ вещественной кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau}) = (P/\langle \alpha \rangle, \tau_1/\langle \alpha \rangle)$ типа (g, k, ε) . Пусть $\{\ell_i, d_i\}$ – образующие решетки примитива Pr вещественной кривой с инволюцией (P, τ_1, α) , отвечающей базису Δ , и $\{\tilde{\ell}_i, \tilde{h}_i\}$ – образующие решетки якобиана $\tilde{J}$ вещественной кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$. В этих базисах инволюции $(\tau_1)_{\mathbb{R}}|_{Pr}: Pr \rightarrow Pr$ и $\tilde{\tau}_{\mathbb{R}}: \tilde{J} \rightarrow \tilde{J}$ описываются одинаковыми формулами и, следовательно, имеют одинаковое число неподвижных торов.

4. Пусть (P, τ_1, α) – вещественная кривая с инволюцией типа $(g, \varepsilon, t_1, r_1, t_2, r_2)$. Занумеруем овалы $a_1^j, \dots, a_{2t_j+r_j}^j$ инволюции τ_j так, чтобы $\alpha a_i^j = a_{t_j+i}^j$ при $i \leq t_j$. Дивизор $D \subset P$ степени g отнесем к множеству Ω , если $\tau_1 D = D$ и $\alpha D + D$ – дивизор нулей мероморфного дифференциала ξ_D , голоморфного вне неподвижных точек q_1, q_2 инволюции α и имеющего в этих точках полюс порядка 0 или 1. Будем говорить, что ξ_D положительно определен на овале $a = a_i^1$, где $i > 2t_1$, если или 1) ξ_D неотрицателен на a , или 2) существует точка $p \in a \cap D$, которая вместе с точкой αp разбивает контур a на 2 открытые дуги таким образом, что та из них, на которой дифференциал положителен, в окрестности p содержит четное число точек дивизора D . В противном случае будем говорить, что ξ_D отрицательно определен на a . Будем говорить, что ξ_D положительно (отрицательно) определен на овале a_i^2 , если он неотрицателен (неположителен) на нем как вещественный дифференциал кривой (P, τ_2) .

Разобьем множество

$$a_{2t_1+1}^1, \dots, a_{2t_1+r_1}^1, a_1^2, \dots, a_{2t_2+r_2}^2$$

на подмножества A_1 и A_2 . Пусть

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{t_1}) \in \mathbb{Z}_2^{t_1}.$$

Обозначим через $\Omega(\delta, A_1, A_2)$ подмножество Ω , состоящее из дивизоров $D \in \Omega$ таких, что дифференциал ξ_D или $-\xi_D$ положительно определен на A_1 , отрицательно определен на A_2 и четность степени дивизора $D \cap a_i^1$ при $i \leq t_1$ совпадает с четностью δ_i .

ЛЕММА 9.3. *Каждое из множеств $\Omega(\delta, A_1, A_2)$ непусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что на любой вещественной алгебраической кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$ с овалами $c_1, \dots, c_k$, где $k = k_+ + k_- + k_0$, и любой пары точек $q_1 \neq q_2$, где $q_2 = \tilde{\tau} q_1$, существует мероморфный вещественный дифференциал ξ , голоморфный вне q_1, q_2 , имеющий в этих точках полюс степени не выше 1, неотрицательный на c_i при $i \leq k_+$, неположительный на c_i при $k_+ < i \leq k_+ + k_-$ и имеющий нули на c_i при $i > k_+ + k_-$. Для этого окружим точки q_1 и q_2 непересекающимися окрестностями $U_i \supset q_i$ такими, что $\tilde{\tau} U_1 = U_2$, и склеим границы поверхности $\tilde{P} \setminus (U_1 \cup U_2)$ с помощью инволюции $\tilde{\tau}$. Граница переходит при этом в овал c_0 новой вещественной алгебраической кривой (P', τ') . Применяя к ней теорему 6.1, находим вещественный дифференциал ξ' с нужными свойствами на овалах $c_1, \dots, c_k$. Вырождая овал c_0 , получаем нужный дифференциал на кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$.

Применяя только что доказанный результат к вещественной кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau}) = (P/\langle \alpha \rangle, \tau_1/\langle \alpha \rangle)$, находим мероморфный дифференциал, голоморфный вне образов

$\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ точек q_1, q_2 , имеющий не более чем простые полюсы в этих точках, неотрицательный на образах овалов из A_1 , неположительный на образах овалов из A_2 и имеющий нули на остальных овалах. Его прообраз ξ на P является мероморфным дифференциалом, голоморфным вне q_1 и q_2 , имеющим не более чем простой полюс в этих точках, положительно определенным на овалах из A_1 и отрицательно определенным на овалах из A_2 . Его дивизор нулей, пересеченный с $a_i^1 \cup \alpha a_i^1$ ($i \leq t_1$), имеет положительную степень, кратную 4, и симметричен относительно α . Следовательно, существует такой $D \in \Omega$, что $\xi_D = \xi$ и четность степени дивизора $D \cap a_i^1$ совпадает с четностью δ_i при $i \leq t_1$.

ТЕОРЕМА 9.2 [34], [42]. Пусть (P, τ, α) – вещественная кривая с инволюцией типа $(g, \varepsilon, t_1, r_1, t_2, r_2)$, где $k = t_1 + r_1 + t_2 + r_2 > 0$. Тогда:

- 1) при $\varepsilon = 0$ все вещественные торы ее примиана особые,
- 2) при $\varepsilon = 1$ существует не более одного неособого вещественного тора примиана,
- 3) при $\varepsilon = 1$, $k = g + 1$ неособый вещественный тор примиана всегда существует,
- 4) при $\varepsilon = 1$, $t_1 + r_1 \leq \frac{k}{2}$ существуют кривые (P, τ_1, α) типа $(g, \varepsilon, t_1, r_1, t_2, r_2)$, среди вещественных торов примиана которых имеется неособый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что

$$\Omega(\delta, A_1, A_2) \cap \Omega(\delta', A'_1, A'_2) \neq \emptyset,$$

если и только если $\delta' = \delta$, $A'_1 = A_2$, $A'_2 = A_1$, причем в этом случае эти множества совпадают. Таким образом, число не пересекающихся множеств вида $\Omega(\delta, A_1, A_2)$ равно 2^{k-1} . С другой стороны, вещественная часть примиана кривой с инволюцией (P, τ_1, α) совпадает с $\bigcup A_{q_1}(\Omega(\delta, A_1, A_2)) - K_{q_1}$ и согласно теореме 9.1 состоит из 2^{k-1} компонент связности. Таким образом, согласно лемме 9.3 каждый вещественный тор примиана имеет вид

$$A_{q_1}(\Omega(\delta, A_1, A_2)) - K_{q_1}.$$

Тор особый, если и только если существует $D \in \Omega(\delta, A_1, A_2)$ такой, что $\alpha D + D$ – дивизор нулей голоморфного дифференциала на P .

1) Пусть $\varepsilon = 0$ и $T = A_{q_1}(\Omega(\delta, A_1, A_2)) - K_{q_1}$ – произвольный вещественный тор примиана. Пусть $\tilde{A}_i$ – образ множества A_i на вещественной кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau}) = (P/\langle \alpha \rangle, \tau_1/\langle \alpha \rangle)$. Согласно теореме 6.1 существует голоморфный вещественный дифференциал $\tilde{\xi}$ на $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$, неотрицательный на $\tilde{A}_1$, неположительный на $\tilde{A}_2$ и имеющий нули на остальных овалах. Его прообраз ξ на P является голоморфным дифференциалом, положительно определенным на овалах из A_1 и отрицательно определенным на овалах из A_2 . Его дивизор нулей, пересеченный с $a_i^1 \cup \alpha a_i^1$ ($i \leq t_1$), имеет положительную степень, кратную 4, и симметричен относительно α . Следовательно, существует $D \in \Omega(\delta, A_1, A_2)$ такой, что $\xi_D = \xi$ и T – особый тор.

2) Пусть $\varepsilon = 1$ и $T = A_{q_1}(\Omega(\delta, A_1, A_2)) - K_{q_1}$ – тор, отличный от $A_{q_1}(\Omega(\delta, A, \emptyset)) - K_{q_1}$, где $\delta = (1, \dots, 1)$. Тогда, повторяя рассуждение, использованное в случае $\varepsilon = 0$, находим, что T – особый тор.

3) Пусть $\varepsilon = 1$ и $k = g + 1$. Докажем, что при $\delta = (1, \dots, 1)$ вещественный тор $A_{q_1}(\Omega(\delta, A_1, \emptyset)) - K_{q_1}$ — неособый. Действительно, в противном случае существовал бы вещественный голоморфный дифференциал ξ на P , положительно определенный на всех овалах инволюций τ_1 и τ_2 , где он не имеет нулей, и такой, что $\alpha\xi = \xi$. Он индуцирует голоморфный вещественный дифференциал $\tilde{\xi}$ на M -кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau}) = (P/\langle\alpha\rangle, \tau_1/\langle\alpha\rangle)$, положительный на всех овалах, где он не имеет нулей. Но согласно теореме 6.2 таких дифференциалов не существует.

4) Пусть $\varepsilon = 1$, $t_1 + k_1 \leq \frac{k}{2}$ и T — вещественный тор вида $A_{q_1}(\Omega(\delta, A_1, \emptyset)) - K_{q_1}$, где $\delta = (1, \dots, 1)$. Если T — особый, то повторяя рассуждение, использованное в случае $k = g + 1$, находим дифференциал $\tilde{\xi}$ на вещественной кривой $(\tilde{P}, \tilde{\tau}) = (P/\langle\alpha\rangle, \tau_1/\langle\alpha\rangle)$, неотрицательный на $t_2 + k_2 > \frac{k}{2}$ образах овалов из множества A_1 и имеющий нули или положительный на остальных овалах кривой. Пример 9.1 показывает, что в качестве кривых $(\tilde{P}, \tilde{\tau})$ могут выступать любые вещественные кривые и, в частности, кривые, построенные в теореме 6.3, на которых таких дифференциалов не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ. При малой деформации кривой с инволюцией (P, τ_1, α) неособый тор переходит в неособый. Поэтому кривые с инволюцией (P, τ_1, α) , обладающие неособым вещественным тором приманиана, образуют открытое множество в пространстве всех кривых данного типа.

§ 10. Униформизация вещественных алгебраических кривых группами Шоттки

1. Пусть $\psi \in \tilde{T}_{\tilde{g}, k}$, где $k > 0$, и $\{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i \ (i = 1, \dots, k)\} = \psi(\gamma_{\tilde{g}, k})$ — соответствующий последовательный набор сдвигов. Положим

$$\Delta = \{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i \ (i = 1, \dots, k-1)\}.$$

Инвариантные прямые $\ell(\Delta)$ набора Δ изображены на рис. 10.1.

Рис. 10.1

Согласно [33], [47; §1–3] для любого $D \in \Delta$ существуют круги S_D и S_{D^*} с центром на $\mathbb{R} \cup \infty$, такие, что $S_D \cap \ell(\Delta) \subset \ell(D)$, $S_{D^*} \cap \ell(\Delta) \subset \ell(D)$, $D(\ell(\Delta) \setminus \ell(D)) \subset S_D$ и $D^{-1}(\ell(\Delta) \setminus \ell(D)) \subset S_{D^*}$. Методами, описанными в [33], [47; §1–3], легко показать, что круги S_D и S_{D^*} можно выбрать таким образом, чтобы

$$S_{D_1} \cap S_{D_2} = S_{D_1^*} \cap S_{D_2} = S_{D_1^*} \cap S_{D_2^*} = \emptyset \quad \text{при} \quad D_1 \neq D_2$$

и $D(\partial S_{D^*}) = \partial S_D$. В этом случае $\Omega = \mathbb{C} \cup \infty \setminus \bigcup_{D \in \Delta} (S_D \cup S_{D^*})$ будет фундаментальной областью группы Шоттки G , порожденной Δ . На фактор-поверхности $P = \Omega/G$ рода $g = 2\tilde{g} + k - 1$ инволюция $z \mapsto \bar{z}$ индуцирует разделяющую инволюцию $\tau: P \rightarrow P$ с k овалами.

Для того, чтобы доказать, что конструкция дает все разделяющие вещественные алгебраические кривые, достаточно построить для такой кривой (P, τ) систему разрезов на связной компоненте P_1 поверхности $P \setminus P^\tau$, превращающую P_1 в половину фундаментальной области группы Шоттки нужного вида. Такая система разрезов приведена в [5] и изображена на рис. 10.2.

Рис. 10.2

Таким образом (см. [5], [6]), соответствие $\psi \mapsto (P, \tau)$ определяет отображение

$$\Psi_k: T_{\tilde{g},k} \rightarrow M_{g,k,1},$$

где $\Psi_k(T_{\tilde{g},k}) = M_{g,k,1}$.

Аналогичное описание неразделяющих кривых с вещественными точками получается, если систему образующих Δ группы Шоттки G заменить набором

$$\Delta^* = \{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i \ (i = 1, \dots, \tilde{k}), C_i^* \ (i = \tilde{k} + 1, \dots, k - 1)\},$$

где C_i^* получается из

$$C_i(z) = \frac{(\lambda_i \alpha_i - \beta_i)z - (1 - \lambda_i)\alpha_i \beta_i}{(\lambda_i - 1)z + (\alpha_i - \lambda_i \beta_i)}$$

заменой λ_i на $-\lambda_i$. Система Δ^* порождает группу Шоттки G^* . На фактор-поверхности $P^* = \Omega/G^*$ инволюция $z \mapsto \bar{z}$ индуцирует неразделяющую инволюцию $\tau^*: P^* \rightarrow P^*$ с $\tilde{k} + 1$ овалами. Таким образом, соответствие $\psi \mapsto (P^*, \tau^*)$ порождает отображение

$$\Psi_{\tilde{k}+1}: T_{\tilde{g},k} \rightarrow M_{g,\tilde{k}+1,0}.$$

Равенство

$$\Psi_{\tilde{k}+1}(T_{\tilde{g},k}) = M_{g,\tilde{k}+1,0}$$

доказывается по той же схеме, что и в случае разделяющих кривых. Надо лишь дополнить множество овалов кривой (P^*, τ^*) до системы попарно непересекающихся инвариантных контуров $c_1, \dots, c_k$ так, чтобы поверхность $P^* \setminus \bigcup_{i=1}^k c_i$ распадалась на 2 компоненты связности. Таким образом, всякое пространство модулей $M_{g,\tilde{k},\varepsilon}$ имеет представление

$$M_{g,\tilde{k},\varepsilon} = \Psi_k^-(T_{\tilde{g},k}).$$

Вместе с теоремой

$$T_{\tilde{g},k} \cong \mathbb{R}^{6\tilde{g}+3k-6},$$

приведенной в [33], [47], это дает другое доказательство следствия 2.1:

$$M_{g,k,\varepsilon} \cong \mathbb{R}^{6g-6} / \text{Mod}_{g,k,\varepsilon}.$$

2. Униформизация Шоттки дает возможность решить проблему Шоттки для вещественных алгебраических кривых, т.е. найти матрицы B_{ij} , описанные в § 8.

Опишем матрицу, отвечающую системе образующих

$$\tilde{\Delta} = \{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), \tilde{C}_i \ (i = 1, \dots, k-1)\} = \{\tilde{D}_i \ (i = 1, \dots, 2\tilde{g} + k - 1)\}$$

группы Шоттки $\tilde{G}$ описанного выше вида. Пусть

$$D_i(z) = \frac{(\lambda_i \alpha_i - \beta_i)z - (1 - \lambda)\alpha_i \beta_i}{(\lambda_i - 1)z + (\alpha_i - \lambda_i \beta_i)}.$$

Обозначим через G_{mn} подмножество группы G , состоящее из элементов вида

$$D = D_{i_1}^{j_1} \dots D_{i_k}^{j_k},$$

где $j_\ell \neq 0$, $i_1 \neq m$, $i_k \neq n$. Положим $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \frac{(z_1 - z_2)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$. Тогда согласно [3], [8] отвечающая образующим $\tilde{\Delta}$ матрица Якоби (B_{nm}) алгебраической кривой $\Omega/\tilde{G}$ дается сходящимися рядами

$$B_{nn} = \ln \lambda_n + \sum_{D \in G_{nn}} \ln \{\alpha_n, \beta_n, D\alpha_n, D\beta_n\} \quad (1)$$

и

$$B_{nm} = \sum_{D \in G_{mn}} \ln \{\alpha_m, \beta_m, D\alpha_n, D\beta_n\} \quad \text{при } m \neq n. \quad (2)$$

Таким образом, формулы (1), (2) вместе с явным описанием пространства $T_{\tilde{g},k}$ в координатах $\{\alpha_i, \beta_i, \lambda_i \ (i = 1, \dots, 2\tilde{g} + k)\}$ [33], [47; § 3, 4] позволяют найти якобианы алгебраических вещественных кривых и с помощью формул из § 8 их вещественные и мнимые торы.

Модификация этого подхода позволяет описать примитивы вещественных кривых [34].

§ 11. Пространство модулей спинорных расслоений ранга 1 на вещественных алгебраических кривых

1. Напомним, что фуксовы группы, униформизирующие римановы поверхности рода 0, имеют вид $\psi(\gamma_{0,g+1})$, где $\gamma_{0,g+1}$ — группа, порожденная образующими $c_1, \dots, c_{g+1}$ с определяющим соотношением $c_1 \dots c_{g+1} = 1$, и $\psi: \gamma_{0,g+1} \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ — мономорфизм, принадлежащий множеству $\tilde{T}_{0,g+1}$ [47; § 1, 2]. Такому мономорфизму отвечает группа Γ_ψ^k ($k \leq g$), порожденная $\psi(\gamma_{0,g+1})$ и отображениями

$$\hat{C}_i = \begin{cases} \bar{C}_i & \text{при } i \leq k, \\ \tilde{C}_i & \text{при } i > k, \end{cases}$$

где $C_i = \psi(c_i)$. Положим $D_i = \widehat{C}_{g+1}\widehat{C}_i$ ($i = 1, \dots, g$). Естественный изоморфизм $\Gamma_\psi^k \rightarrow \pi_1(P, p)$, где $P = \Lambda/\Gamma_\psi^k$, переводит $\{C_i, D_i$ ($i = 1, \dots, g$) $\}$ в образующие $\{c_i, d_i$ ($i = 1, \dots, g$) $\}$ группы $\pi_1(P, p)$ — порождающие ее с определяющим соотношением

$$\prod_{i=1}^g c_i \prod_{i=g}^1 d_i c_i^{-1} d_i^{-1} = 1.$$

ЛЕММА 11.1. Пусть $\widetilde{\Gamma}^*$ — поднятие вещественной фуксовой группы $\widetilde{\Gamma}$, где $[\widetilde{\Gamma}] = (P, \tau)$ — вещественная алгебраическая кривая типа $(g, k, 0)$. Тогда существует мономорфизм $\psi \in \widetilde{T}_{0, g+1}$ такой, что $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_\psi^k$ и $\omega_{\widetilde{\Gamma}^*}(d_i) = \omega_{\widetilde{\Gamma}^*}(d_j)$ для всех $i, j \leq g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим набор контуров $c_1, \dots, c_{g+1}$, обладающий свойствами, описанными в теореме 4.2. Пусть P_1 — сфера с $g+1$ дырами, граница которой ∂P_1 состоит из контуров $\widetilde{c}_1, \dots, \widetilde{c}_{g+1}$ с ориентацией, порожденной $\widetilde{\Gamma}^*$. Рассмотрим связанную с ними стандартную систему образующих $(c_1, \dots, c_{g+1})$ группы $\pi(P_1, p)$. отождествим c_i со стандартными образующими группы $\gamma_{0, g+1}$. Тогда естественный изоморфизм $\pi_1(P, p) \rightarrow \Gamma$ индуцирует $\psi \in \widetilde{T}_{0, g+1}$. Нетрудно видеть, что $\Gamma_\psi^k = \widetilde{\Gamma}$.

Найдем теперь $\omega_{\widetilde{\Gamma}^*}(d_i)$. Положим $\widehat{C}_i^* = J^{-1}(\widehat{C}_i) \cap \widetilde{\Gamma}^*$. Заменяя $\widetilde{\Gamma}$ на сопряженную группу, можно считать, что

$$\widehat{C}_{g+1} = \sigma_{g+1} \begin{pmatrix} -\mu_{g+1} & 0 \\ 0 & \mu_{g+1}^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\mu_{g+1} > 0$, $\sigma_{g+1} = \pm 1$. Сдвиги $C_1, \dots, C_{g+1}$ образуют последовательный набор (см. §2) и, следовательно, их инвариантные прямые $\ell(C_i)$ расположены как на рис. 11.1.

Рис. 11.1

Таким образом,

$$\overline{C}_i = F_i \overline{C}_{g+1} F_i^{-1},$$

где

$$F_i = \frac{(\lambda_i \alpha_i + \alpha_i)z - (1 - \lambda_i)\alpha_i^2}{(1 - \lambda_i)z + (\alpha_i + \lambda_i \alpha_i)} = \frac{\alpha_i(\lambda_i + 1)z + (\lambda_i - 1)\alpha_i^2}{(1 - \lambda_i)z + \alpha_i(\lambda_i + 1)}.$$

Положим

$$F_i^* = \begin{pmatrix} \alpha_i(\lambda_i + 1) & (\lambda_i - 1) \\ (1 - \lambda_i) & \alpha_i(\lambda_i + 1) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\widehat{C}_i^* = \sigma_i F_i^* \begin{pmatrix} -\mu_i & 0 \\ 0 & \mu_i^{-1} \end{pmatrix} (F_i^*)^{-1},$$

где $\mu_i > 0$, $\sigma_i = \pm 1$. Докажем, что при $i \leq g$ $\sigma_i = -1$. Действительно, по построению ориентация контура c_i , порожденная $\tilde{\Gamma}^*$, совпадает с его ориентацией как границы поверхности P_1 . Эта ориентация индуцирует ориентацию линии $\ell(C_i)$, указанную на рис. 11.1. Отображение F^{-1} переводит ее в ориентацию мнимой оси I по направлению убывания значений $\text{Im } z$ (см. рис. 11.1). А это и означает, что $\sigma_i = -1$.

Таким образом,

$$\hat{C}_{g+1}^* \hat{C}_i^* = -\sigma_{g+1} \begin{pmatrix} \mu_{g+1} & 0 \\ 0 & \mu_{g+1}^{-1} \end{pmatrix} F_i^* \begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \mu_i^{-1} \end{pmatrix} (F_i^*)^{-1},$$

откуда

$$\omega_{\Gamma^*}(d_i) = \text{sign}(\text{Sp}(D_i)) = \text{sign}(\text{Sp}(\hat{C}_{g+1}^* \hat{C}_i^*)) = -\sigma_{g+1}$$

и, следовательно, $\omega_{\tilde{\Gamma}^*}(d_i)$ одинаков для всех $i \leq g$.

ЛЕММА 11.2. Пусть ω – неособая функция Арфа на вещественной алгебраической кривой (P, τ) типа $(g, k, 0)$. Тогда существует стандартный базис

$$\{c_i, d_i \ (i = 1, \dots, g)\} \in H_1(P, \mathbb{Z}_2)$$

такой, что $c_i, \dots, c_g$ – попарно непересекающиеся инвариантные контуры, $\tau(d_i) = d_i + c_{g+1} + \tilde{c}_i$, где

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq k, \\ c_i & \text{при } i > k, \end{cases}$$

и $\omega(d_i) = \omega(d_j)$ для всех $i, j \leq g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.1 существует вещественная фуксова группа $\tilde{\Gamma}$ такая, что $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$. Согласно лемме 4.2 существует ее поднятие $\tilde{\Gamma}^*$ такое, что $\omega_{\tilde{\Gamma}^*} = \omega$. Поэтому утверждение леммы 11.2 следует из леммы 11.1.

2. Пусть (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая. Функции Арфа ω_1 и ω_2 на (P, τ) назовем *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: P \rightarrow P$ такой, что $\varphi\tau = \tau\varphi$ и индуцированный автоморфизм $\varphi: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(P, \mathbb{Z}_2)$ удовлетворяет условию $\omega_1 = \omega_2\varphi$.

ТЕОРЕМА 11.1 [41]. Все особые функции Арфа на произвольной вещественной кривой (P, τ) топологически эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.2 $P^\tau = \emptyset$. Поэтому согласно лемме 1.2 существует набор попарно непересекающихся инвариантных контуров $c_1, \dots, c_{g+1}$ такой, что $P \setminus \bigcup_{i=1}^{g+1} c_i$ распадается на 2 сферы с дырками P_1 и P_2 . Соединим контур c_i простым отрезком $\ell_i \subset P_1$ с контуром c_{g+1} . Рассмотрим простой замкнутый контур $d_i = \ell_i \cup \tau\ell_i \cup r_i \cup r_{g+1}$, где $r_j \subset c_j$. Пусть ω_1 и ω_2 – особые функции Арфа на (P, τ) . Согласно лемме 3.3 $\omega_1(c_i) = \omega_2(c_i) = 0$. При каждом i , где $\omega_1(d_i) \neq \omega_2(d_i)$, применим к P скручивание Дена по c_i , т.е. разрежем P по c_i и склеим с поворотом на 2π по этому же контуру. Нетрудно видеть, что полученный гомеоморфизм φ коммутирует с τ . С другой стороны, для таких i

$$\omega_2(\varphi(d_i)) = \omega_2(d_i + c_i) = \omega_2(d_i) + \omega(c_i) + 1 = \omega_1(d_i).$$

Таким образом, $\omega_2\varphi = \omega_1$.

ТЕОРЕМА 11.2 [41]. Пусть (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая типа $(g, k, 0)$. Тогда неособые функции Арфа на (P, τ) топологически эквивалентны, если и только если они имеют одинаковый топологический тип (g, δ, k_α) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_1 и ω_2 – неособые функции Арфа на (P, τ) типа (g, δ, k_α) . Используя лемму 11.2, свяжем с функцией Арфа ω_m стандартный базис $\{c_i^m, d_i^m \mid i = 1, \dots, g\}$, где c_i^m – попарно непересекающиеся инвариантные контуры и $\omega_m(d_i^m) = \omega_m(d_j^m)$ для всех $i, j \leq g$. После перенумерации можно считать, что $c_1^m, \dots, c_{k_0+1}^m$ – овалы, причем $\omega_m(c_i^m) = 0$ при $i \leq k_0$ и $\omega_m(c_i^m) = 1$ при $i > k_0$. Согласно теореме 3.2 $k_0 \equiv g + 1 \pmod{2}$ и, следовательно,

$$\delta(P, \omega_m) = \sum_{j=1}^{g+1} \omega_m(c_j^m) \omega_m(d_j^m) = \sum_{j=k_0+1}^g \omega_m(d_j^m) = \omega_m(d_j^m).$$

Таким образом, $\omega_1(d_j^1) = \delta = \omega_2(d_j^2)$. Согласно лемме 1.2 набор $c_1^m, \dots, c_g^m$ можно дополнить контуром c_{g+1}^m до полного набора инвариантных контуров. Пусть

$$P_1^m \cup P_2^m = P \setminus \bigcup_{i=1}^{g+1} c_i^m.$$

Выберем c_{g+1}^m таким образом, чтобы гомеоморфизм $\varphi: P_1^1 \rightarrow P_1^2$ продолжался до коммутирующего с τ гомеоморфизма $\varphi: P^1 \rightarrow P^2$, переводящего $\{c_i^1, d_i^1\}$ в $\{c_i^2, d_i^2\}$. Тогда $\omega_1 = \omega_2 \varphi$.

ТЕОРЕМА 11.3 [41]. Пусть (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая типа $(g, k, 1)$. Тогда функции Арфа на (P, τ) топологически эквивалентны, если и только если они имеют одинаковый топологический тип $(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_1 и ω_2 – функции Арфа на (P, τ) типа $(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$. Овалы P^τ разбивают P на 2 связные компоненты P_1 и P_2 . По условию $\omega_1|_{P_1}$ и $\omega_2|_{P_1}$ имеют одинаковый топологический тип и, следовательно, согласно [47; § 8] существует гомеоморфизм $\varphi_1: P_1 \rightarrow P_1$, переводящий $\omega_1|_{P_1}$ в $\omega_2|_{P_1}$. Совпадение топологического типа функций ω_1 и ω_2 позволяет выбрать φ_1 так, чтобы овалы, подобные относительно ω_1 , перешли в овалы, подобные относительно ω_2 . Положим теперь $\varphi_2 = \tau \varphi_1 \tau: P_2 \rightarrow P_2$. Тогда $\varphi_1 \cup \varphi_2: P \rightarrow P$ коммутирует с τ и переводит ω_1 в ω_2 .

3. Далее в этом параграфе под спинорным расслоением мы всегда понимаем спинорное расслоение ранга 1.

Теорема 5.1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между спинорным расслоением на вещественной алгебраической кривой (P, τ) и вещественными функциями Арфа на ней. Типом спинорного расслоения назовем тип соответствующей функции Арфа.

Пространством модулей спинорных расслоений на вещественных алгебраических кривых называется пространство пар $((P, \tau), (e, E))$, где (P, τ) – вещественная алгебраическая кривая, а (e, E) – спинорное расслоение на (P, τ) . Согласно теореме 5.1 на вещественной кривой существует лишь конечное число спинорных расслоений, и поэтому топология пространства модулей вещественных кривых индуцирует топологию в пространстве модулей спинорных расслоений на них.

ТЕОРЕМА 11.4 [36]. *Пространство спинорных расслоений на неразделяющих вещественных алгебраических кривых распадается на связные компоненты $S_p(g, \delta, k_\alpha)$, где (g, δ, k_α) – произвольный топологический тип неособой функции Арфа на неразделяющей вещественной кривой. Каждая из компонент $S(g, \delta, k_\alpha)$ диффеоморфна*

$$\mathbb{R}^{3g-3} / \text{Mod}_{g, \delta, k_\alpha}$$

(где $\text{Mod}_{g, \delta, k_\alpha}$ – дискретная группа диффеоморфизмов) и $C_k^{k_0} \cdot 2^{g-1}$ -листно накрывает $M_{g, k, 0}$, где $k = k_0 + k_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению каждому $\psi \in \tilde{T}_{0, g+1}$ отвечает последовательный набор

$$V = (C_1, \dots, C_{g+1}) \in \text{Aut}(\Lambda)$$

типа $(0, g+1)$, который вместе с

$$\hat{C}_i = \begin{cases} \bar{C}_i & \text{при } i \leq k, \\ \tilde{C}_i & \text{при } i > k \end{cases}$$

порождает вещественную фуксову группу $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{\psi, g+1}^k$. На вещественной кривой $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$ рассмотрим базис гомологий $\{c_i, d_i \ (i = 1, \dots, g)\} \in H_1(P, \mathbb{Z}_2)$, отвечающий сдвигам $\{C_i, D_i = \tilde{C}_{g+1} \hat{C}_i \ (i = 1, \dots, g)\}$. Рассмотрим неособую вещественную функцию Арфа $\omega = \omega_\psi$, определенную условиями $\omega(c_i) = 0$ при $i \leq k_0$, $\omega(c_i) = 1$ при $i > k_0$, $\omega(d_i) = 0$ при $i < g$, $\omega(d_g) = \delta$. Согласно теореме 3.2 $k_0 \equiv g+1 \pmod{2}$, отсюда сразу следует, что ω – неособая вещественная функция Арфа типа (g, δ, k_α) . Согласно теореме 5.1 ей отвечает спинорное расслоение $\Omega(\psi) \in S_p(g, \delta, k_\alpha)$. Соответствие $\psi \mapsto \Omega(\psi)$ индуцирует отображение $\Omega: T_{0, g+1} \rightarrow S_p(g, \delta, k_\alpha)$.

Докажем, что $\Omega(T_{0, g+1}) = S_p(g, \delta, k_\alpha)$. Действительно, согласно теореме 2.2 отображение

$$\Psi: T_{0, g+1} \xrightarrow{\Omega} S_p(g, \delta, k_\alpha) \xrightarrow{\Phi} M_{g, k, 0},$$

где Φ – естественная проекция, таково, что

$$\Psi(T_{0, g+1}) = M_{g, k, 0}.$$

Слой отображения Ψ представляется группой $\text{Mod}_{g, k, 0}$ всех автогомеоморфизмов кривой (P, τ) , т.е. автогомеоморфизмов P , коммутирующих с τ . Согласно теореме 11.2 эта группа $\text{Mod}_{g, k, 0}$ транзитивно действует на множестве неособых вещественных функций Арфа типа (g, δ, k_α) и, следовательно, ввиду теоремы 5.1 транзитивно действует на слоях $\Phi^{-1}((P, \tau))$. Таким образом,

$$\Omega(T_{0, g+1}) = S_p(g, \delta, k) \quad \text{и} \quad S_p(g, \delta, k_\alpha) = T_{0, g+1} / \text{Mod}_{g, \delta, k_\alpha},$$

где

$$\text{Mod}_{g, \delta, k_\alpha} \subset \text{Mod}_{g, k, 0}.$$

Согласно [47; §4] пространство $T_{0, g+1}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{3g-3}$. Согласно теореме 3.2 индекс подгруппы $\text{Mod}_{g, \delta, k_\alpha}$ в $\text{Mod}_{g, k_0+k_1, 0}$ равен $C_k^{k_0} 2^{g-1}$.

ТЕОРЕМА 11.5 [36]. *Пространство спинорных расслоений на разделяющих вещественных алгебраических кривых распадается на связные компоненты $S_p(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$, где $(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$ – произвольный топологический тип функции Арфа на разделяющей вещественной алгебраической кривой. Каждая из компонент $S_p(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$ диффеоморфна $\mathbb{R}^{3g-3}/\text{Mod}_{g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma}$ (где $\text{Mod}_{g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma}$ – дискретная группа диффеоморфизмов) и покрывает $M_{g, k, 1}$ с числом листов $C_k^{k_0} \cdot C_{k_0}^{k_1^0} \cdot C_{k_1^1}^{k_1^0} \cdot 2^{\tilde{g}-2} \cdot (2^{\tilde{g}} + m)$, где $m = 2^{\tilde{g}}$, если $k_1 > 0$, $m = 1$, если $\tilde{\delta} = 0$, $m = -1$, если $k_1 = 0$ и $\tilde{\delta} = 1$, $k_\alpha = k_\alpha^0 + k_\alpha^1$, $k = k_0 + k_1$, $g = 2\tilde{g} + k - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению каждому $\psi \in \tilde{T}_{\tilde{g}, k}$ отвечает последовательный набор $V = \{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i \ (i = 1, \dots, k)\}$ типа $(\tilde{g}, k)$, который вместе с $\overline{C}_i \ (i = 1, \dots, k)$ порождает вещественную фуксову группу $\tilde{\Gamma} = \Gamma_\psi^k$. На вещественной кривой $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$ рассмотрим базис гомологий $\{a_i, b_i, a'_i, b'_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), c_i, d_i \ (i = 1, \dots, k-1)\} \in H_1(P, \mathbb{Z}_2)$, порожденный сдвигами

$$\{A_i, B_i, \overline{C}_k A_i \overline{C}_k, \overline{C}_k B_i \overline{C}_k \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i, \overline{C}_k \overline{C}_i \ (i = 1, \dots, k-1)\}.$$

Пусть для определенности $k_1^1 > 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Рассмотрим вещественную функцию Арфа $\omega = \omega_\psi$, определенную условиями: 1) $\omega(a_i) = \omega(b_i) = \omega(a'_i) = \omega(b'_i) = \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = 0$ при $i < \tilde{g}$ и $\varepsilon_i = \tilde{\delta}$ при $i = \tilde{g}$; 2) $\omega(c_i) = 0$ при $i \leq k_0$, $\omega(c_i) = 1$ при $i > k_0$; 3) $\omega(d_i) = 0$ при $i = k_0^0 + 1, \dots, k_0$ или $i = k_0 + k_1^0 + 1, \dots, k-1$ и $\omega(d_i) = 1$ в остальных случаях. Согласно теореме 5.1 ей отвечает спинорное расслоение $\Omega(\psi) \in S_p(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$. Завершающая часть доказательства почти дословно совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы 11.4.

§ 12. Вещественные алгебраические $N = 1$ суперкривые и их пространство модулей

1. Напомним некоторые определения [4], [47; § 11].

Пусть $L = L(\mathbb{K})$ – грасманова алгебра над полем $\mathbb{K}$ с бесконечным числом образующих $1, \ell_1, \ell_2, \dots$. Каждый элемент $a \in L(\mathbb{K})$ является конечной линейной комбинацией мономов $\ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_n}$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$, т.е.

$$a = a^\# + \sum a_i e_i + \sum_{ij} a_{ij} e_i \wedge e_j + \dots$$

Соответствие $a \mapsto a^\#$ определяет эпиморфизм $\#: L(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$.

Моном $\ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_n} \neq 0$ называется *четным*, если n четно, и *нечетным*, если n нечетно. Константы также считаются четными мономами. Линейные комбинации с коэффициентами из $\mathbb{K}$ четных (нечетных) мономов порождают линейное пространство $L_0(\mathbb{K})$ четных ($L_1(\mathbb{K})$ нечетных) элементов алгебры $L(\mathbb{K})$. Супераналог линейного пространства – это множество

$$\mathbb{K}^{(n|m)} = \{(z_1, \dots, z_n \mid \theta_1, \dots, \theta_m) : z_i \in L_0(\mathbb{K}), \theta_j \in L_1(\mathbb{K})\}.$$

В качестве поля $\mathbb{K}$ будем рассматривать поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ или вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Множество

$$\Lambda^{NS} = \{(z \mid \theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbb{C}^{(1|N)} \mid \operatorname{Im} z^\# > 0\}$$

называется *верхней N -суперполуплоскостью*. В этом параграфе мы будем иметь дело с 1-суперполуплоскостями $\Lambda^S = \Lambda^{1S}$. Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}(\Lambda^S)$ суперобласти Λ^S состоит из преобразований $A = A[a, b, c, d, \sigma \mid \varepsilon, \delta]$ вида

$$A(z \mid \theta) = \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{(ad - bc)(\varepsilon + \delta z)}{(cz + d)^2} \theta, \frac{\sigma \sqrt{ad - bc}}{cz + d} \left(\theta + \varepsilon + \delta z + \frac{1}{2} \varepsilon \delta \theta \right) \right),$$

где $a, b, c, d \in L_0(\mathbb{R})$, $\sigma = \pm 1$, $\varepsilon, \delta \in L_1(\mathbb{R})$, $(ad - bc)^\# > 0$, а символом $\sqrt{\Delta}$ обозначается элемент из $L_0(\mathbb{R})$, однозначно определяемый свойствами $(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$ и $(\sqrt{\Delta})^\# > 0$.

Соответствие

$$A \mapsto A^\#, \quad \text{где} \quad A^\#(z) = \frac{a^\# z + b^\#}{c^\# z + d^\#},$$

порождает эпиморфизм

$$\#: \operatorname{Aut}(\Lambda^S) \rightarrow \operatorname{Aut}(\Lambda).$$

Преобразования, переводящие под действием этого эпиморфизма в гиперболические, называются *супергиперболическими*.

Сопоставим автоморфизму $A = A[a, b, c, d, \sigma \mid \varepsilon, \delta]$ матрицу

$$\bar{J}(A) = \frac{\sigma}{\sqrt{a^\# d^\# - c^\# b^\#}} \begin{pmatrix} a^\# & b^\# \\ c^\# & d^\# \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Подгруппу $\Gamma \subset \operatorname{Aut}(\Lambda^S)$ мы называем *суперфуксовой*, если $\Gamma^\# = \#(\Gamma)$ – фуксова группа и $\#: \Gamma \rightarrow \Gamma^\#$ – изоморфизм. В этом параграфе мы будем рассматривать (не оговаривая это специально) лишь суперфуксовы группы, состоящие из супергиперболических автоморфизмов Λ^S .

Фактор-множество $P = \Lambda^S / \Gamma$ называется $(N = 1)$ *римановой суперповерхностью* (или *суперримановой поверхностью*). Соответствие $\bar{J}$ порождает поднятие

$$J^*: \Gamma^\# \rightarrow \Gamma^* \subset SL(2, \mathbb{R}).$$

Тип соответствующей функции Арфа $\omega_\Gamma = \omega_{\Gamma^*}$ на $P^\# = \Lambda / \Gamma^\#$ называется *типом суперповерхности*.

2. Пусть теперь $\widetilde{\operatorname{Aut}}(\Lambda^S)$ – группа, порожденная $\operatorname{Aut}(\Lambda^S)$ и инволюциями

$$\sigma_\pm: (z \mid \theta) \mapsto (-\bar{z} \mid \pm \bar{\theta}).$$

Если $C \in \operatorname{Aut}(\Lambda^S)$ – гиперболический автоморфизм, то существует $g \in \operatorname{Aut}(\Lambda^S)$ такой, что $g^{-1} C g(z) = (\lambda z \mid \sqrt{\lambda} \theta)$, где $\lambda^\# > 0$. Положим

$$\bar{C}^\pm = g \sigma_\pm g^{-1}, \quad \tilde{C}^\pm = \sqrt{C} \bar{C}_\pm \in \widetilde{\operatorname{Aut}}(\Lambda^S),$$

где $\widetilde{\sqrt{C}} g(z \mid \theta) = (\sqrt{\lambda} z \mid \sqrt[4]{\lambda} \theta)$. Продолжим $\#: \operatorname{Aut}(\Lambda^S) \rightarrow \operatorname{Aut}(\Lambda)$ до $\#: \widetilde{\operatorname{Aut}}(\Lambda^S) \rightarrow \operatorname{Aut}(\Lambda)$, считая, что $\#(\sigma_\pm) = \sigma_\pm^\#: z \mapsto -\bar{z}$.

Подгруппу $\tilde{\Gamma} \subset \widetilde{\text{Aut}}(\Lambda^S)$ назовем *вещественной суперфуксовой группой*, если $\tilde{\Gamma}^\#$ – вещественная фуксова группа. Вещественной суперфуксовой группе $\tilde{\Gamma}$ отвечают суперфуксова группа $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(\Lambda^S)$, риманова суперповерхность $P = \Lambda^S/\Gamma$ и *вещественная алгебраическая суперкривая* $[\Gamma] = (P, \tau)$, где $\tau = (\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma)/\Gamma: P \rightarrow P$ – суперантиголоморфная инволюция. Суперкривой (P, τ) отвечает вещественная алгебраическая кривая

$$\#(P, \tau) = (P^\#, \tau^\#) = [\tilde{\Gamma}^\#],$$

называемая *подложкой суперкривой* (P, τ) . Нетрудно видеть, что ω_Γ – вещественная функция Арфа на $(P^\#, \tau^\#)$. Ее топологический тип называется *топологическим типом* вещественной суперкривой (P, τ) .

3. Пусть $t = (\tilde{g}, \delta, k_\alpha)$ – топологический тип римановой суперповерхности рода $\tilde{g}$ с k дырами. Обозначим через M^t множество всех таких суперповерхностей. Согласно [47; §12] оно “униформизируется” пространством

$$T^t = \tilde{T}^t / \text{Aut}(\Lambda^S),$$

где $\tilde{T}^t$ – пространство мономорфизмов $\psi: \gamma_{\tilde{g}, n} \rightarrow \text{Aut}(\Lambda^S)$ (где $n = \tilde{g} + k$) таких, что $\psi(v_{\tilde{g}, n})^\#$ – последовательный набор типа (g, k) и $\Lambda^S/\psi(\gamma_{\tilde{g}, n}) \in M^t$, а группа $\text{Aut}(\Lambda^S)$ – действует сопряжениями.

Множество Q называется сильно диффеоморфным $\mathbb{R}^{(p, q)}$, если существует вложение $Q \subset \mathbb{R}^{(p|q)}$ такое, что $Q^\#$ диффеоморфно $\mathbb{R}^p$ и $Q = \#^{-1}(\#(Q))$. Согласно [47; §12] T^t сильно диффеоморфно

$$\mathbb{R}^{(p|q)} / \mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}^{(6\tilde{g}+3k-6|4\tilde{g}+2k-4)} / \mathbb{Z}_2.$$

При этом

$$M^t = T^t / \text{Mod}_t,$$

где Mod_t – дискретная группа.

ТЕОРЕМА 12.1 [36], [38]. *Пространство модулей вещественных алгебраических суперкривых с неразделяющей подложкой распадается на связанные компоненты $S(g, \delta, k_\alpha)$, где (g, δ, k_α) – произвольный топологический тип неособой функции Арфа на неразделяющей вещественной кривой. Каждая из компонент имеет вид*

$$S(g, \delta, k_\alpha) = T_{g, \delta, k_\alpha} / \text{Mod}_{g, \delta, k_\alpha},$$

где T_{g, δ, k_α} сильно диффеоморфна $\mathbb{R}^{(3g-3|2g-2)} / \mathbb{Z}_2$ и $\text{Mod}_{g, \delta, k_\alpha}$ – дискретная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $t = (0, 0, k_0, g+1-k_0)$. По определению каждому $\psi \in \tilde{T}^t$ отвечает набор

$$V = (C_1, \dots, C_{g+1}) \in \text{Aut}(\Lambda^S)$$

такой, что $V^\# = (C_1^\#, \dots, C_{g+1}^\#)$ – последовательный набор типа $(0, g+1)$. Этот набор вместе с

$$\hat{C}_i = \begin{cases} \bar{C}_i^+ & \text{при } i \leq k, \\ \tilde{C}_i^+ & \text{при } k < i < g, \\ \tilde{C}_g^+ & \text{при } i = g, \delta = 0, \\ \tilde{C}_i^- & \text{при } i = g, \delta = 1 \end{cases}$$

(где $k = k_0 + k_1$) порождает вещественную суперфуксову группу $\tilde{\Gamma}$. На вещественной кривой $(P^\#, \tau^\#) = [\tilde{\Gamma}^\#]$ рассмотрим базис гомологий

$$(c_i, d_i \ (i = 1, \dots, g)) \in H_1(P, \mathbb{Z}_2),$$

отвечающий сдвигам

$$(C_i, D_i = \tilde{C}_{g+1} \hat{C}_i \ (i = 1, \dots, g)).$$

Тогда функция Арфа $\omega = \omega_\Gamma$ удовлетворяет условиям $\omega(c_i) = 0$ при $i \leq k_0$, $\omega(c_i) = 1$ при $i > k_0$, $\omega(d_i) = 0$ при $i < g$ и $\omega(d_g) = \delta$. Таким образом, соответствие $\psi \mapsto [\tilde{\Gamma}]$ индуцирует отображение

$$\Omega: (\tilde{T}^t) \rightarrow S(g, \delta, k_\alpha).$$

Сопряженные ψ переходят при этом в одинаковые суперкривые и, следовательно, определено отображение

$$\Omega: T^t \rightarrow S(g, \delta, k_\alpha).$$

Докажем, что $\Omega(T^t) = S(g, \delta, k_\alpha)$. Пусть

$$(P, \tau) \in S(g, \delta, k_\alpha).$$

Из леммы 1.2 и теоремы 11.2 следует, что существуют простые замкнутые контуры $\{c_i, d_i \ (i = 1, \dots, g)\}$ на $(P^\#, \tau^\#)$ такие, что: 1) $\tau^\#(c_i) = c_i$, $(P^\#)^{\tau^\#} = \bigcup_{i=1}^k c_i$; 2) представляющие их элементы $H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2)$ удовлетворяют условиям $\tau^*(d_i) = -d_i + c + \hat{c}_i$, где $c = \sum_{i=1}^g c_i$,

$$\hat{c}_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq k, \\ c_i & \text{при } i > k; \end{cases}$$

3) функция Арфа $\omega = \omega_\Gamma$ удовлетворяет условиям

$$\omega(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq k_0, \\ 1 & \text{при } i > k_0, \end{cases}$$

$\omega(d_i) = 0$ при $i < g$, $\omega(d_g) = \delta$. Контуры $\{c_i\}$ разбивают поверхность $P^\#$ на компоненты $P_1^\#$ и $P_2^\#$. Положим $P_1 = \#^{-1}(P_1^\#)$. Согласно [47; §12] $P_1 = \Lambda^s / \psi(\gamma_{0,g+1})$, где $\psi \in \tilde{T}^t$. Из наших конструкций непосредственно следует, что $\Omega(\psi) = (P, \tau)$, причем $\Omega(\psi') = \Omega(\psi)$, если и только если $\psi' = \psi\alpha$, где $\alpha \in M_{odg, \delta, k_\alpha}$ и $M_{odg, \delta, k_\alpha}$ — группа из теоремы 11.5.

ТЕОРЕМА 12.2 [36], [38]. *Пространство модулей вещественных алгебраических суперкривых с разделяющей подложкой распадается на связные компоненты $S(g, \delta, k_\alpha^\gamma)$, отвечающие произвольным топологическим типам $t = (g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$ функций Арфа на разделяющих вещественных кривых. Каждая из компонент имеет вид*

$$T^t / \text{Mod}_{g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma},$$

где T^t сильно диффеоморфно $\mathbb{R}^{(3g-3|2g-2)}/\mathbb{Z}_2$ и $\text{Mod}_{g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma}$ — дискретная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $k_0 = k_0^0 + k_0^1$, $k_1 = k_1^0 + k_1^1$, $k = k_0 + k_1$, $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g + 1 - k)$ и $t = (\tilde{g}, \tilde{\delta}, k_\alpha)$. По определению каждому $\psi = \tilde{T}^t$ отвечает набор $V = (A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i \ (i = 1, \dots, k)) \subset \text{Aut}(\Lambda^S)$ такой, что $V^\# = \{A_i^\#, B_i^\# \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i^\# \ (i = 1, \dots, k)\}$ – последовательный набор типа $(\tilde{g}, k)$. Вместе с

$$\hat{C}_i = \begin{cases} \overline{C}_j^+ & \text{при } i \leq k_0^0 \text{ или } k_0 < i \leq k_0 + k_1^0, \\ \overline{C}_i^- & \text{при } k_0^0 < i \leq k_0 \text{ или } i > k_0 + k_1^0. \end{cases}$$

Набор V порождает вещественную суперфуксову группу $\tilde{\Gamma}$. Соответствие $\psi \mapsto [\tilde{\Gamma}]$ определяет отображение $\Omega: T^t \rightarrow S(g, \tilde{\delta}, k_\alpha^\gamma)$. Завершающая часть доказательства повторяет с очевидными модификациями соответствующую часть доказательства теоремы 12.1.

§ 13. Вещественные алгебраические $N = 2$ суперкривые

1. Напомним некоторые определения из [29] и [47; § 13]. Обозначим через $A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon]$ отображение $A: \Lambda^{2S} \rightarrow \Lambda^{2S}$ вида

$$A(z | \theta_1, \theta_2) = \left(\frac{az + b + \delta^{11}\theta_1 + \delta^{12}\theta_2}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2} \mid \frac{\ell^{11}\theta_1 + \ell^{12}\theta_2 + \varepsilon^{11}z + \varepsilon^{12}}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2}, \frac{\ell^{21}\theta_1 + \ell^{22}\theta_2 + \varepsilon^{21}z + \varepsilon^{22}}{cz + d + \delta^{21}\theta_1 + \delta^{22}\theta_2} \right),$$

где $a, b, c, d \in L_0(\mathbb{R})$, $\ell \in GL(2, L_0(\mathbb{R}))$, $\varepsilon^{ij}, \delta^{ij} \in L_1(\mathbb{R})$.

Согласно [29] группа автоморфизмов $\text{Aut}(\Lambda^{2S})$ суперобласти Λ^{2S} состоит из $A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon]$, где

$$\begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{11} & \delta^{12} \\ \delta^{21} & \delta^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{21} & \varepsilon^{11} \\ \varepsilon^{22} & \varepsilon^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell^{11} & \ell^{12} \\ \ell^{21} & \ell^{22} \end{pmatrix}$$

и

$$ad - bc - \varepsilon^{11}\varepsilon^{12} - \varepsilon^{21}\varepsilon^{22} = \ell^{11}\ell^{22} + \ell^{21}\ell^{12} + \delta^{11}\delta^{22} + \delta^{12}\delta^{21} = \Delta,$$

где $\Delta^\# > 0$,

$$\ell^{11}\ell^{21} + \delta^{11}\delta^{21} = \ell^{12}\ell^{22} + \delta^{12}\delta^{22} = 0.$$

Прямой выкладкой нетрудно показать, что автоморфизм $A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon]$ относится к одному из двух типов:

- 1) (нескрученные) $(\ell^{12})^\# = (\ell^{21})^\# = 0$; $(\ell^{11}\ell^{22})^\# > 0$;
- 2) (скрученные) $(\ell^{11})^\# = (\ell^{22})^\# = 0$; $(\ell^{12}\ell^{21})^\# > 0$.

Нескрученный (скрученный) автоморфизм однозначно определяется параметрами $a, b, c, d, \varepsilon^{ij}, \ell^{11}$ (соответственно $a, b, c, d, \varepsilon^{ij}, \ell^{12}$). Эти параметры могут принимать произвольные значения такие, что $a, b, c, d, \ell^{ij} \in L_0(\mathbb{R})$, $\varepsilon^{ij} \in L_1(\mathbb{R})$, $(ad - bc)^\# > 0$, $(\ell^{11} + \ell^{12})^\# \neq 0$.

Соответствие $A \mapsto A^\#$, где

$$A = A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon], \\ A^\#(z) = \frac{a^\#z + b^\#}{c^\#z + d^\#},$$

порождает эпиморфизм $\#: \text{Aut}(\Lambda^{2S}) \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$. Преобразование, переводящее под действием этого эпиморфизма в гиперболическое, называется *супергиперболическим*.

Подгруппа $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ называется $N = 2$ *суперфуксовой*, если $\Gamma^\# = \#(\Gamma)$ – фуксова группа и $\#: \Gamma \rightarrow \Gamma^\#$ – изоморфизм. В этом параграфе мы будем рассматривать (не оговаривая это специально) лишь $N = 2$ суперфуксовы группы, состоящие из супергиперболических автоморфизмов Λ^{2S} .

Сопоставим автоморфизму $A = A[a, b, c, d, \ell | \varepsilon]$ матрицу

$$\bar{J}(A) = \frac{\sigma}{\sqrt{a^\# d^\# - b^\# c^\#}} \begin{pmatrix} a^\# & b^\# \\ c^\# & d^\# \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

где $\sigma = \sigma(A) = \text{sign}(\ell^{11} + \ell^{12} + \ell^{21} + \ell^{22})^\#$.

Если $\Gamma \in \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ есть $N = 2$ суперфуксова группа, то соответствие $\bar{J}: \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ является мономорфизмом и, следовательно, определяет поднятие $J^*: \Gamma^\# \rightarrow \bar{J}(\Gamma)$.

Пусть $\Gamma \subset \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ есть $N = 2$ суперфуксова группа. Фактор-множество Λ^{2S}/Γ называется *римановой $N = 2$ суперповерхностью* или $N = 2$ *суперримановой поверхностью*. Две $N = 2$ суперповерхности $P_1 = \Lambda^{2S}/\Gamma_1$ и $P_2 = \Lambda^{2S}/\Gamma_2$ считаются совпадающими, если Γ_1 и Γ_2 сопряжены в $\text{Aut}(\Lambda^{2S})$. Проекция $\#: \Lambda^{2S} \rightarrow \Lambda$ и $\#: \Gamma \rightarrow \Gamma^\#$ определяют проекцию $\#: P \rightarrow P^\# = \Lambda/\Gamma^\#$.

Согласно [47; § 7] поднятие J^* задает функцию Арфа

$$\omega_P^1: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Определим функции $\Omega_i = \Omega_i(\Gamma): \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ($i = 1, 2$), положив

$$\Omega_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{i,j \in \{1,2\}} (h^{ij})^\# < 0, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и

$$\Omega(A) = \Omega_1(A) + \Omega_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } h^{12} = h^{21} = 0, \\ 1, & \text{если } h^{11} = h^{22} = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что Ω_1 индуцирует ω_P^1 и Ω – гомоморфизм, индуцирующий гомоморфизм $\omega_P^0: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Обозначим через ω_P^2 функцию Арфа $\omega_P^1 + \omega_P^0$, порожденную Ω_2 .

Риманову $N = 2$ суперповерхность P назовем *нескрученной*, если $\omega_P^0 = 0$. Ее *топологическим типом* назовем топологический тип (g, δ, k_α) функции Арфа $\omega_P^1 = \omega_P^2$. Если $\omega_P^0 \neq 0$, то риманову поверхность назовем *скрученной*. Ее *топологическим типом* назовем топологический тип $(g, \delta_1, \delta_2, k_{\alpha\beta})$ пары функций Арфа (ω_P^1, ω_P^2) , где $\delta_i = \delta(P^\#, \omega_i)$ и $k_{\alpha\beta}$ – число дыр c_i поверхности $P^\#$ таких, что $\omega_1(c_i) = \alpha, \omega_2(c_i) = \beta$ [47; § 8].

2. $N = 2$ супераналогом группы $\widetilde{\text{Aut}}(\Lambda)$ является группа $\widetilde{\text{Aut}}(\Lambda^{2S})$, порожденная $\text{Aut}(\Lambda^{2S})$ и отображением $\sigma: (z | \theta_1, \theta_2) \mapsto (-\bar{z} | \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2)$. Продолжим $\#: \text{Aut}(\Lambda^{2S}) \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ до гомоморфизма $\#: \widetilde{\text{Aut}}(\Lambda^{2S}) \rightarrow \widetilde{\text{Aut}}(\Lambda)$, считая, что $\#(\sigma): z \mapsto -\bar{z}$. Подгруппа $\tilde{\Gamma} \subset \widetilde{\text{Aut}}(\Lambda^{2S})$ называется *вещественной $N = 2$ суперфуксовой группой*,

если $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ – это $N = 2$ суперфуксова группа, $\tilde{\Gamma} \neq \Gamma$ и $\Lambda^\#/\Gamma^\#$ – компактная поверхность. В этом случае пара $(\Lambda^{2S}/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ называется *вещественной алгебраической $N = 2$ суперкривой*.

Вещественные $N = 2$ суперкривые $(\Lambda^{2S}/\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1/\Gamma_1)$ и $(\Lambda^{2S}/\Gamma_2, \tilde{\Gamma}_2/\Gamma_2)$ считаются совпадающими, если существует $h \in \widehat{\text{Aut}}(\Lambda^{2S})$ такой, что $\tilde{\Gamma}_2 = h\tilde{\Gamma}_1h^{-1}$. Проекция $\#$ переводит вещественную суперкривую $(P, \tau) = (\Lambda/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ в вещественную кривую $(P^\#, \tau^\#) = (\Lambda^\#/\Gamma^\#, \tilde{\Gamma}^\#/\Gamma^\#)$.

Пусть $(P, \tau) = (\Lambda^{2S}/\Gamma, \tilde{\Gamma}/\Gamma)$ – вещественная $N = 2$ суперкривая и $C \subset \Gamma$ отвечает овалу или инвариантному (не пересекающему овал) контуру c . Заменяя Γ на сопряженную группу, можно считать, что $C(z | \theta_1, \theta_2) = (\lambda z | h^1\theta_j, h^2\theta_{3-j})$. В этом случае группа $\tilde{\Gamma}$ содержит элемент S_C вида $S_C(z | \theta_1, \theta_2) = (-\rho\bar{z} | l^1\bar{\theta}_i, l^2\bar{\theta}_{3-i})$, где $\rho^\# > 0$, $\ell^1\ell^2 = \rho^2$, причем $\rho = 1$, если c – овал, и $(S_C)^2 = C$, если c – инвариантный контур. Положим $\mu(c) = 0$, если $i = 1$, и $\mu(c) = 1$, если $i = 2$.

Если $\omega_1 = \omega_2$ (где $\omega_i = \omega_P^i$), то $\mu(c)$ одинаково для всех овалов и инвариантных (не пересекающих овалы) контуров c . Это позволяет определить инвариант $\mu(P, \tau) = \mu(c)$.

Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то ядро гомоморфизма $\Omega: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$ образует подгруппу Γ_* индекса 2. На поверхности $P_*^\# = \Lambda^\#/\Gamma_*^\#$ инволюции из множества $\{F = S_C | \mu(c) = \mu\}$ порождают инволюцию $\tau_\mu^\#$ ($\mu \in \mathbb{Z}_2$). Положим $\rho_\mu(P, \tau) = \varepsilon(P_*^\#, \tau_\mu^\#)$.

Отнесем к множеству $M(g, \varepsilon)$ вещественные алгебраические $N = 2$ суперкривые (P, τ) такие, что $g(P^\#) = g$, $\varepsilon(P^\#, \tau^\#) = \varepsilon \in \mathbb{Z}_2$. Структура $N = 2$ суперкривой задает 2 функции Арфа $\omega_i = \omega_P^i: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Положим $\chi(P) = 0$, если $\omega_1 = \omega_2$, и $\chi(P) = 1$, если $\omega_1 \neq \omega_2$. Инвариант $\chi \in \mathbb{Z}_2$ разбивает $M(g, \varepsilon)$ на подмножества $M(g, \varepsilon, \chi) = \{(P, \tau) \in M(g, \varepsilon) | \chi(P) = \chi\}$.

Согласно теореме 3.2 число овалов c со свойствами $\omega_i(c) = 0$ имеет ту же четность, что $g + 1$. Для $(P, \tau) \in M(g, 0, 0)$ обозначим через $k_\alpha(P, \tau)$ число овалов c таких, что $\omega_1(c) = \omega_2(c) = \alpha \in \mathbb{Z}_2$. Разобьем множество $M(g, 0, 0)$ на подмножества

$$\begin{aligned} M(g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu) \\ = \{(P, \tau) \in M(g, 0, 0) | k_\alpha(P, \tau) = k_\alpha, \delta(\omega_1) = \delta(\omega_2) = \delta, \mu(P, \tau) = \mu\}. \end{aligned}$$

Для $(P, \tau) \in M(g, 0, 1)$ обозначим через $k_{\alpha\beta}^\mu(P, \tau)$ число овалов $c \subset P^\tau$ таких, что

$$\omega_1(c) = \alpha, \quad \omega_2(c) = \beta, \quad \mu(c) = \mu \in \mathbb{Z}_2.$$

Положим

$$\begin{aligned} M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i) \\ = \{(P, \tau) \in M(g, 0, 1) | k_{\alpha\beta}^\mu(P, \tau) = k_{\alpha\beta}^\mu, \delta(\omega_i) = \delta_i, \rho_i(P, \tau) = \rho_i\}. \end{aligned}$$

Согласно [7], [35] $M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i) = 0$, если $\rho_1 = \rho_2 = 1$ или если $k_{01}^0 + k_{10}^0 + k_{01}^1 + k_{10}^1 > 0$ и $\rho_1 + \rho_2 > 0$.

Пусть $(P^\#, \tau^\#)$ – вещественная алгебраическая кривая такая, что $\varepsilon(P^\#, \tau^\#) = 1$, и $\omega: H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ – функция Арфа такая, что $\omega(\tau^\#a) = \omega(a)$ для всех $a \in H_1(P^\#, \mathbb{Z}_2)$. Овалы $c_1, \dots, c_k$ разбивают $P^\#$ на компоненты $P_1^\#$ и $P_2^\#$. Положим

$$\eta_\omega(P^\#, \tau^\#) = \delta(P_1^\#, \omega'),$$

где ω' – ограничение ω на $P_1^\#$. В частности, $\eta_\omega(P^\#, \tau^\#) = 0$, если существует овал c такой, что $\omega(c) = 1$.

Положим

$$\begin{aligned} M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu) \\ = \{(P, \tau) \in M(g, 1, 0) \mid k_\alpha^\gamma(P^\#, \tau^\#, \omega_1) = k_\alpha^\gamma, \eta_{\omega_1}(P, \tau) = \eta, \mu(P, \tau) = \mu\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $(P, \tau) \in M(g, 1, 1)$. Обозначим через $k_{\alpha\beta}^{0\mu}(P, \tau)$ (соответственно $k_{\alpha\beta}^{1\mu}(P, \tau)$) число овалов c_i , подобных c_1 относительно ω_1 (соответственно неподобных c_1 относительно ω_1), таких, что $\omega_1(c_i) = \alpha$, $\omega_2(c_i) = \beta$, $\mu(c_i) = \mu$. Набор чисел $k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} = k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}(P, \tau)$ определен с точностью до перестановки $k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \mapsto k_{\alpha\beta}^{1-\gamma, \mu}$, связанной с выбором c_1 . Положим

$$M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i) = \{(P, \tau) \in M(g, 1, 1) \mid k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}(P, \tau) = k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_{\omega_i}(P, \tau) = \eta_i\}.$$

Таким образом, мы получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 13.1 [46]. 1) *Множество $M(g, \varepsilon, 0)$ вещественных суперкривых (P, τ) рода g со свойством $\omega_1(P) = \omega_2(P)$ распадается на подмножества*

$$M(g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu), \quad M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha, \gamma, \delta, \eta, \mu \in \mathbb{Z}_2, \quad 0 \leq k_0 + k_1 \leq g, \quad 1 \leq \sum_{\alpha\gamma} k_\alpha^\gamma \leq g + 1, \\ \sum_{\alpha\gamma} k_\alpha^\gamma \equiv g + 1 \pmod{2}, \quad k_0 \equiv g + 1 \pmod{2}, \quad k_0^0 + k_0^1 \equiv g + 1 \pmod{2} \\ \text{и} \quad \eta = 0 \quad \text{при} \quad k_1^0 + k_1^1 > 0. \end{aligned}$$

Среди них совпадают лишь множества $M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$, и $M(g, 1, 0, k_\alpha^{1-\gamma}, \eta, \mu)$.

2) *Множество $M(g, \varepsilon, 1)$ вещественных суперкривых (P, τ) рода g со свойством $\omega_1(P) \neq \omega_2(P)$ распадается на подмножества*

$$M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i), \quad M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma, \mu, i, \delta_i, \rho_i, \eta_i \in \mathbb{Z}_2, \quad 0 \leq \sum_{\alpha\beta\mu} k_{\alpha\beta}^\mu \leq g, \\ 1 \leq \sum_{\alpha\beta\gamma\mu} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \leq g + 1, \quad \sum_{\alpha\beta\gamma\mu} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \equiv g + 1 \pmod{2}, \\ \sum_{\mu\beta} k_{0\beta}^\mu \equiv \sum_{\mu\alpha} k_{\alpha 0}^\mu \equiv \sum_{\gamma\mu\beta} k_{0\beta}^{\gamma\mu} \equiv \sum_{\gamma\mu\alpha} k_{\alpha 0}^{\gamma\mu} \equiv g + 1 \pmod{2}, \\ \rho_1 + \rho_2 < 2, \quad \rho_1 = \rho_2 = 0 \quad \text{при} \quad k_{01}^0 + k_{01}^1 + k_{10}^0 + k_{10}^1 > 0, \\ \eta_1 = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{\beta\gamma\mu} k_{1\beta}^{\gamma\mu} > 0 \quad \text{и} \quad \eta_2 = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{\alpha\gamma\mu} k_{\alpha 1}^{\gamma\mu} > 0. \end{aligned}$$

Среди них совпадают лишь множества $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$ и $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{1-\gamma, \mu}, \eta_i)$.

§ 14. Пространство модулей вещественных алгебраических $N = 2$ суперкривых

1. Пусть (P, τ) – вещественные алгебраические кривые. *Двойной функцией* Арфа на (P, τ) назовем пару (ω, α) , где $\omega: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ – функция Арфа на (P, τ) , а $\alpha: H_1(P, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ – гомоморфизм такой, что $\alpha\tau = \alpha$. Двойные функции Арфа (ω_1, α_1) и (ω_2, α_2) на (P_1, τ_1) и (P_2, τ_2) назовем *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ такой, что $\varphi\tau = \tau\varphi$, $\omega_1 = \omega_2\varphi$, $\alpha_1 = \alpha_2\varphi$.

Согласно § 13 вещественные алгебраические $N = 2$ суперкривые порождают двойную функцию Арфа $(\omega_P, \alpha_P) = (\omega_P^1, \omega_P^0)$ на $(P^\#, \tau^\#)$.

ТЕОРЕМА 14.1 [46]. *Вещественные алгебраические $N = 2$ суперкривые P_1 и P_2 порождают топологически эквивалентные двойные функции Арфа, если и только если их топологические типы P_1 и P_2 совпадают или отличаются друг от друга одновременной заменой μ на $1 - \mu$, $k_{\alpha\beta}^\mu$ на $k_{\alpha\beta}^{1-\mu}$ и $k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}$ на $k_{\alpha\beta}^{\gamma, 1-\mu}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все топологические инварианты, связанные с суперкривой P , кроме $\mu(c)$ для овалов и инвариантных контуров c , однозначно определяются парой функций Арфа (ω_P^1, ω_P^0) и, следовательно, сохраняются при согласованных с $\tau_i^\#$ гомеоморфизмах $\varphi: P_1^\# \rightarrow P_2^\#$. Таким образом, из топологической эквивалентности двойных функций Арфа $(\omega_{P_1}^1, \omega_{P_1}^0)$ следуют описанные в теореме ограничения на типы P_1 и P_2 .

Доказательство обратного утверждения в случае $\varepsilon(P_i^\#, \tau_i^\#) = 1$ повторяет доказательство теоремы 11.3. Докажем обратное утверждение для кривых $(P_i^\#, \tau_i^\#)$ типа $(g, k, 0)$. Рассмотрим стандартные базисы, существующие согласно теореме 1.1,

$$\{a_j^i, b_j^i \ (i = 1, \dots, 2r), \ c_j^i, d_j^i \ (i = 1, \dots, s)\} \in H_1(P_j^\#, \mathbb{Z}_2),$$

где

$$\begin{aligned} (P_i^\#)^{\tau_i^\#} &= \bigcup_{j=1}^k c_j^i, \quad s - k \leq 1, \\ \tau_i^\#(a_j^i) &= a_{2r+1-j}^i, \quad \tau_i^\#(b_j^i) = -b_{2r+1-j}^i, \\ \tau_i^\#(c_j^i) &= c_j^i, \quad \tau_i^\#(d_j^i) = -d_j^i + c^i, \end{aligned}$$

где $c^i = \sum_{j=1}^s c_j^i$ и

$$\tau_i^\#(d_s^i) = -d_s^i + c^i + c_s^i \quad \text{при } s > k.$$

Согласно теореме 11.2 эти базисы можно выбрать таким образом, чтобы

$$\omega_{P_1}^1(d_j^1) = \omega_{P_2}^1(d_j^2)$$

при всех $j \leq s$. Выполнение условий теоремы 14.1 позволяет перенумеровать c_j^i и d_j^i таким образом, чтобы

$$\omega_{P_1}^m(c_j^1) = \omega_{P_2}^m(c_j^2), \quad \omega_{P_1}^m(d_j^1) = \omega_{P_2}^m(d_j^2)$$

при всех j и $m = 1, 2$. Кроме того, согласно [47; теорема 8.1] выполнение условий теоремы 14.1 позволяет, не меняя c_j^i, d_j^i , перейти к базису того же вида, где

$$\omega_{P_1}^m(a_j^1) = \omega_{P_2}^m(a_j^2) \quad \text{и} \quad \omega_{P_1}^m(b_j^1) = \omega_{P_2}^m(b_j^2)$$

при всех j . Тогда гомеоморфизм $\varphi: P_1^\# \rightarrow P_2^\#$, переводящий один базис в другой, порождает топологическую эквивалентность двойных функций Арфа.

2. Напомним описание пространства модулей $N = 2$ суперримановых поверхностей [47; § 14].

Пусть $2t$ – топологический тип римановой $N = 2$ суперповерхности рода $\tilde{g}$ с k дырами. Обозначим через M множество всех таких суперповерхностей. Оно “униформируется” пространством

$$T^{2t} = \tilde{T}^{2t} / \text{Aut}(\Lambda^{2S}),$$

где $\tilde{T}^{2t}$ – пространство мономорфизмов $\psi: \gamma_{\tilde{g},n} \rightarrow \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ (где $n = \tilde{g} + k$) таких, что $\psi(v_{\tilde{g},n})^\#$ – последовательный набор типа (g, k) , $\Lambda^{2S}/\psi(\gamma_{\tilde{g},n}) \in M^{2t}$, а группа $\text{Aut}(\Lambda^{2S})$ – действует сопряжениями [47; § 14]. Согласно [47; § 14] T^{2t} сильно диффеоморфно

$$\mathbb{R}^{(p|q)}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}^{(8\tilde{g}+4k-b(2t)|8\tilde{g}+4k-8)}/(\mathbb{Z}_2)^2,$$

где $b(2t) = 8$ для поверхностей скрученного типа и 7 в противном случае. При этом

$$M^{2t} = T^{2t} / \text{Mod}_{2t},$$

где Mod_{2t} – дискретная группа.

3. Перейдем теперь к описанию пространства модулей вещественных алгебраических $N = 2$ суперкривых.

ТЕОРЕМА 14.2 [46]. 1) *Пространство модулей $M(g, \varepsilon, 0)$ вещественных алгебраических $N = 2$ суперкривых (P, τ) рода g с условием $\omega_1(P) = \omega_2(P)$ распадается на компоненты связности*

$$M(g, 0, 0, k_\alpha, \delta, \mu), \quad M(g, 1, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu),$$

где

$$\alpha, \gamma, \delta, \eta, \mu \in \mathbb{Z}_2, \quad 0 \leq k = k_0 + k_1 \leq g, \quad 1 \leq \sum_{\alpha\gamma} k_\alpha^\gamma \leq g + 1,$$

$$k = \sum_{\alpha\gamma} k_\alpha^\gamma \equiv g + 1 \pmod{2}, \quad k_0 \equiv g + 1 \pmod{2},$$

$$k_0^0 + k_0^1 \equiv g + 1 \pmod{2} \quad \text{и} \quad \eta = 0 \quad \text{при} \quad k_1^0 + k_1^1 > 0.$$

Среди них совпадают лишь компоненты $M(g, 1, 0, k_\alpha^\gamma, \eta, \mu)$ и $M(g, 1, 0, k_\alpha^{1-\gamma}, \eta, \mu)$. Каждая компонента $M(\chi)$ имеет вид $T(\chi)/\text{Mod}(\chi)$, где $T(\chi)$ – сильно диффеоморфно $\mathbb{R}^{(4g-3+\mu k | 4g-4)}/(\mathbb{Z}_2)^2$ и $\text{Mod}(\chi)$ – дискретная группа.

2) Пространство модулей $M(g, \varepsilon, 1)$ вещественных алгебраических $N = 2$ суперкривых (P, τ) рода g с условием $\omega_1(P) \neq \omega_2(P)$ распадается на компоненты связности вида

$$M(g, 0, 1, k_{\alpha\beta}^\mu, \delta_i, \rho_i), \quad M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma, \mu, i, \delta_i, \rho_i, \eta_i &\in \mathbb{Z}_2, \quad 0 \leq \sum_{\alpha\beta\mu} k_{\alpha\beta}^\mu \leq g, \\ 1 &\leq \sum_{\alpha\beta\gamma\mu} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \leq g+1, \quad \sum_{\alpha\beta\gamma\mu} k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu} \equiv g+1 \pmod{2}, \\ \sum_{\mu\beta} k_{0\beta}^\mu &\equiv \sum_{\mu\alpha} k_{\alpha 0}^\mu \equiv \sum_{\gamma\mu\beta} k_{0\beta}^{\gamma\mu} \equiv \sum_{\gamma\mu\alpha} k_{\alpha 0}^{\gamma\mu} \equiv g+1 \pmod{2}, \\ \rho_1 + \rho_2 &< 2, \quad \rho_1 = \rho_2 = 0 \quad \text{при} \quad k_{01}^0 + k_{01}^1 + k_{10}^0 + k_{10}^1 > 0, \\ \eta_1 = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{\beta\gamma\mu} k_{1\beta}^{\gamma\mu} > 0 \quad \text{и} \quad \eta_2 = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{\alpha\gamma\mu} k_{\alpha 1}^{\gamma\mu} > 0. \end{aligned}$$

Среди них совпадают лишь множества $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{\gamma\mu}, \eta_i)$ и $M(g, 1, 1, k_{\alpha\beta}^{1-\gamma, \mu}, \eta_i)$. Каждая компонента $M(\chi)$ имеет вид $T(\chi)/\text{Mod}(\chi)$, где $\text{Mod}(\chi)$ – дискретная группа, а $T(\chi)$ – сильно диффеоморфно $\mathbb{R}^{(4g-4+k^1|4g-4)}/(\mathbb{Z}_2)^2$ и k^1 равно $\sum_{\alpha\beta\gamma} k_{\alpha\beta}^{\gamma 1}$ или $\sum_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\Gamma}$ – вещественная $N = 2$ суперфуксова группа, $(P, \tau) = [\tilde{\Gamma}]$, c – овал или не пересекающий овал инвариантный контур кривой $(P^\#, \tau^\#)$ и $C \subset \Gamma = \tilde{\Gamma} \cap \text{Aut}(\Lambda^{2S})$ – отвечающий ему сдвиг. Заменяя $\tilde{\Gamma}$ на сопряженную группу, можно считать, что $C(z | \theta_1, \theta_2) = (\rho z | l_1 \theta_i, l_2 \theta_{3-i})$. Обозначим через $\hat{C} \subset \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$ элемент, удовлетворяющий условиям: 1) $\hat{C}C\hat{C}^{-1} = C$; 2) $\hat{C}^2 = 1$, если c – овал; 3) $\hat{C}^2 = C$, если c – инвариантный контур. Если $\mu(c) = 0$ и c – овал, то

$$\hat{C}(z | \theta_1, \theta_2) = (-\bar{z} | \pm \bar{\theta}_1, \pm \bar{\theta}_2).$$

Если $\mu(c) = 0$ и c – инвариантный контур, то

$$\hat{C}(z | \theta_1, \theta_2) = (-\sqrt{\rho} \bar{z} | \pm \sqrt{|\ell_1|} \bar{\theta}_1, \pm \sqrt{|\ell_2|} \bar{\theta}_2).$$

Если $\mu(c) = 1$ и c – овал, то

$$\hat{C}(z | \theta_1, \theta_2) = (-\bar{z} | h \bar{\theta}_2, h^{-1} \bar{\theta}_1).$$

Если $\mu(c) = 1$ и c – инвариантный контур, то

$$\hat{C}(z | \theta_1, \theta_2) = (-\sqrt{\rho} \bar{z} | h \bar{\theta}_2, \sqrt{\rho} h^{-1} \bar{\theta}_1).$$

Дальнейшее доказательство состоит в повторении доказательства теорем 12.1 и 12.2 с заменой пространств T^t на T^{2t} и теорем 11.2, 11.3 на теорему 14.1. Единственное существенное различие возникает лишь при сопоставлении сдвигу C_i из набора

$$\{A_i, B_i \ (i = 1, \dots, \tilde{g}), C_i \ (i = 1, \dots, m)\} = \psi(V_{\tilde{g}, m}), \quad \psi \in T^{2t},$$

отображения $\widehat{C}_i$. Приведенные выше аргументы показывают, что если $\mu(c_i) = 0$ для контура c_i , отвечающего C_i , то отображение $\widehat{C}_i$ определяется сдвигом C_i с тем же произволом, что и в случае $N = 1$ (§12). При $\mu(c_i) = 1$ выбор $\widehat{C}_i$ зависит от одного произвольного дополнительного параметра $h \in L_0(\mathbb{R})$. Если однако c_i — не овал, то условие $\widehat{C}_i^2 = C_i$ фиксирует один из принадлежащих $L_0(\mathbb{R})$ параметров, от которых зависит произвольный $C_i \in \text{Aut}_2(\Lambda^{2S})$. Это и определяет размерность суперлинейных пространств, униформизирующих компоненты связности пространства модулей вещественных $N = 2$ суперкривых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alling N. L., Greenleaf N. Foundations of the Theory of Klein Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1971. (Lecture Notes in Math. V. 219.)
- [2] Atiyah M. F. Riemann surfaces and spin structures // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1971. V. 4. P. 47–62.
- [3] Baker H. F. Abel's Theorem and the Allied Theory Including the Theory of Theta Functions. Cambridge, 1897.
- [4] Baranov A. M., Manin Yu. I., Frolov I. V., Schwarz A. S. A superanalog of the Selberg trace formula and multiloop contributions for fermionic strings // Comm. Math. Phys. 1987. V. 111. P. 373–392.
- [5] Бобенко А. И. Униформизация и конечнозонное интегрирование // Препринт Р-10-86. Л.: ЛОМИ, 1986.
- [6] Бобенко А. И. Униформизация Шоттки и конечнозонное интегрирование // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. №2. С. 268–272.
- [7] Bujalance E., Costa A. F., Natanzon S., Singerman D. Involutions of compact Klein surfaces // Math. Z. 1992. V. 211. P. 461–478.
- [8] Burnside W. On a class of automorphic functions // Proc. London Math. Soc. 1892. V. 23. P. 49–88.
- [9] Carey A. L., Hannabuss K. C. Infinite dimensional groups and Riemann surface field theories // Comm. Math. Phys. 1996. V. 176. P. 321–351.
- [10] Чередник И. В. Об условиях вещественности в “конечнозонном интегрировании” // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. №5. С. 1104–1108.
- [11] Comessatti A. Sulle varietà abeliane reali // Ann. Math. Pura Appl. (4). 1925. V. 2. P. 67–102; 1926. V. 3. P. 27–71.
- [12] Дубровин Б. А. Теория операторов и вещественная алгебраическая геометрия // Глобальный анализ и матем. физика. Воронеж, 1987. P. 42–59. (Перев.: Lecture Notes in Math. 1988. V. 1334. P. 42–59.)
- [13] Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные двухзонные решения уравнения Sine-Gordon // Функци. анализ и его прил. 1982. Т. 16. №1. С. 27–43.
- [14] Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные тэта-функциональные решения уравнений Кадомцева–Петвиашвили // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. №2. С. 267–286.
- [15] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
- [16] Earle C. J. On the moduli of closed Riemann surfaces with symmetries // Ann. of Math. Stud. 1971. V. 66. P. 119–130.
- [17] Fricke F., Klein F. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Leipzig: Teubner, 1897 (V. 1); 1912 (V. 2). (Reprinted by Johnson Reprint Corp., New York and Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1965.)
- [18] Falqui G., Reina C. $N = 2$ super Riemann surfaces and algebraic geometry // J. Math. Phys. 1990. V. 31. №4. P. 948–952.
- [19] Fay J. Theta-Functions on Riemann Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1973. (Lecture Notes in Math. V. 352.)

- [20] Gross B. H., Harris J. Real algebraic curves // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1981. V. 14. №2. P. 157–182.
- [21] Harnach A. Über die Vieltheiligkeit der ebene algebraischen Kurven // Math. Ann. 1876. V. 10. P. 189–199.
- [22] Hurwitz A. Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen // Math. Ann. 1903. V. 57. P. 425–446.
- [23] Jaffe A., Klimek S., Lesniewski L. Representations of the Heigenberg algebra on a Riemann surface // Comm. Math. Phys. 1990. V. 126. №2. P. 421–433.
- [24] Karimipour V., Mostafazadeh A. Lattice topological field theory on nonorientable surfaces // J. Math. Phys. 1997. V. 38. №1. P. 49–66.
- [25] Klein F. Riemann Flächen (lit.): Vorles. B. 1, 2. Göttingen, 1892. (Neuedruck., 1906.)
- [26] Kravetz S. On the geometry of Teichmüller spaces and the structure of their modular groups // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1959. V. 278. P. 1–35.
- [27] Krichever I. M., Novikov S. P. Virasoro–Gelfand–Fuks type algebras, Riemann surfaces, operator's theory of closed strings // J. Geom. Phys. 1988. V. 5. №4. P. 631–661.
- [28] Macbeath A. M. The classification of non-euclidean plane crystallographic groups // Canad. J. Math. 1967. V. 19. №6. P. 1192–1205.
- [29] Манин Ю. И. Супералгебраические кривые и квантовые струны // Труды МИАН. 1990. Т. 183. С. 126–138.
- [30] Mumford D. Thera characteristics of an algebraic curve // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1971. V. 4. P. 181–192.
- [31] Натанзон С. М. Инвариантные прямые фуксовых групп и модули вещественных алгебраических кривых // Дисс. . . канд. физ.-матем. наук. М.: ЦЭМИ, 1974.
- [32] Натанзон С. М. Модули вещественных алгебраических кривых // УМН. 1975. Т. 30. №1. С. 251–252.
- [33] Натанзон С. М. Пространства модулей вещественных кривых // Труды ММО. 1978. Т. 37. С. 219–253.
- [34] Натанзон С. М. Примитивы вещественных кривых и их приложения к эффективизации операторов Шрёдингера // Функц. анализ и его прил. 1989. Т. 23. №1. С. 41–55.
- [35] Натанзон С. М. Клейновы поверхности // УМН. 1990. Т. 45. №6. С. 47–89.
- [36] Натанзон С. М. Клейновы суперповерхности // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №2. С. 72–82.
- [37] Натанзон С. М. Дифференциальные уравнения на тэта-функции Прима. Критерий вещественности двумерных конечнозонных потенциальных операторов Шрёдингера // Функц. анализ и его прил. 1992. Т. 26. №1. С. 17–26.
- [38] Natanzon S. Moduli spaces of Riemann and Klein supersurfaces // Developments in Mathematics: The Moscow School / ed. V. Arnold, M. Monastyrsky. London: Chapman & Hall, 1993. P. 100–130.
- [39] Natanzon S. M. Moduli spaces of Riemann $N = 1$ and $N = 2$ supersurfaces // J. Geom. Phys. 1993. V. 12. №1. P. 35–54.
- [40] Натанзон С. М. Топология двумерных покрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных кривых // Труды семин. векторн. тензорн. анал. 1988. Т. 23. С. 79–103; 1991. Т. 24. С. 104–132.
- [41] Натанзон С. М. Классификация пар функций Арфа на ориентируемых и неориентируемых поверхностях // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28. №3. С. 35–46.
- [42] Natanzon S. M. Real nonsingular finite zone solutions of soliton equations // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1995. V. 170. P. 153–183.
- [43] Натанзон С. М. Тригонометрические тензоры на алгебраических кривых произвольного рода. Аналог теоремы Штурма–Гурвица // УМН. 1995. Т. 50. №6. С. 199–200.
- [44] Natanzon S. M. Spinors and differentials of real algebraic curves. Topology of real algebraic varieties and related topics // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1996. V. 173. P. 179–186.
- [45] Natanzon S. M. Differential equations for Riemann and Prym theta-functions // J. Math. Sci. 1996. V. 82. №6. P. 3821–3823.
- [46] Натанзон С. М. Пространство модулей вещественных алгебраических суперкривых с $N = 2$ // Функц. анализ и его прил. 1996. Т. 30. №4. С. 19–30.

- [47] Натанзон С. М. Модули римановых поверхностей, пространства типа Гурвица и их супераналоги // УМН. 1999. Т. 54. № 1. С. 61–116.
- [48] Seppälä M. Teichmüller spaces of Klein surfaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes. 1978. № 15.
- [49] Vajsburd L., Radul A. Non-orientable strings // Comm. Math. Phys. 1991. V. 135. P. 413–420.
- [50] Vinnikov V. Self-adjoint determinantal representations of real plane curves // Math. Ann. 1993. V. 296. P. 453–478.
- [51] Weichold G. Über symmetrische Riemann Flächen und die Periodizitätsmoduli der zugehörigen Abelchen Normalintegrale erster Gattung // Z. Math. Phys. 1883. V. 28. P. 321–351.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;

Поступила в редакцию

Независимый московский университет

07.05.1999

E-mail: `natanzon@mccme.ru`