Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Чеботарь, Функциональные тождества в первичных кольцах, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 207–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm23>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:04:10

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА В ПЕРВИЧНЫХ КОЛЬЦАХ

М. А. ЧЕБОТАРЬ

Мы будем использовать следующие обозначения: R – первичное кольцо, $Q_s(R)$ – симметрическое мартиндейловское кольцо частных для кольца R , C – расширенный центроид кольца R , $R_c = RC$ – центральное замыкание кольца R (см. [4]). Недавно Брешаром [3] было показано, что если в кольце R выполняется нетривиальное функциональное тождество степени 2, то R является кольцом с обобщенными полиномиальными тождествами, а для этого класса колец применим известный результат Мартиндейла [4, теорема 3]. В настоящей работе представлен результат о функциональных тождествах степени n с фиксированным антиавтоморфизмом. Всюду далее верхние индексы функций будут давать информацию о несущественных переменных этих функций, поэтому сами несущественные переменные мы выделять не будем. Например, мы будем писать $F^{1,i}(x_1, \dots, x_n)$ вместо $F^{1,i}(x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Мы будем называть N -аддитивной функцией функцию n переменных, аддитивную по каждой переменной, и для удобства будем подразумевать под 0-аддитивной функцией константу.

ТЕОРЕМА. Пусть R – первичное кольцо с антиавтоморфизмом τ и пусть $N > 1$ – натуральное число и n_i, m_i, u_i, v_i – натуральные числа, где $i = 1, \dots, N$. Предположим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1} F_i^1(x_1, \dots, x_N) x_1 a_i^1 + \sum_{i=1}^{m_1} b_i^1 x_1 G_i^1(x_1, \dots, x_N) \\ & + \sum_{i=1}^{v_1} H_i^1(x_1, \dots, x_N) x_1^\tau d_i^1 + \sum_{i=1}^{u_1} e_i^1 x_1^\tau K_i^1(x_1, \dots, x_N) + \dots \\ & \dots + \sum_{i=1}^{n_N} F_i^N(x_1, \dots, x_N) x_N a_i^N + \sum_{i=1}^{m_N} b_i^N x_N G_i^N(x_1, \dots, x_N) \\ & + \sum_{i=1}^{v_N} H_i^N(x_1, \dots, x_N) x_N^\tau d_i^N + \sum_{i=1}^{u_N} e_i^N x_N^\tau K_i^N(x_1, \dots, x_N) = 0 \end{aligned}$$

для всех $x_1, \dots, x_N \in R$, где $F_k^l, G_k^l, H_k^l, K_k^l: R^{N-1} \rightarrow R_c$ являются $(N-1)$ -аддитивными функциями и

$$\begin{aligned} & \{a_1^1, \dots, a_{n_1}^1\}, \dots, \{a_1^N, \dots, a_{n_N}^N\}, \{b_1^1, \dots, b_{m_1}^1\}, \dots, \{b_1^N, \dots, b_{m_N}^N\}, \\ & \{d_1^1, \dots, d_{v_1}^1\}, \dots, \{d_1^N, \dots, d_{v_N}^N\}, \{e_1^1, \dots, e_{u_1}^1\}, \dots, \{e_1^N, \dots, e_{u_N}^N\} \end{aligned}$$

суть C -независимые подмножества R . Тогда выполняется одна из двух возможностей:

(i) R_c – примитивное кольцо с ненулевым цоклем, $eR_c e$ – конечномерная алгебра с делением над C для каждого примитивного идемпотента e из R_c (т.е. R – кольцо с обобщенным тождеством),

(ii) существуют $(N-2)$ -аддитивные функции $p_{j,k}^{i,l}, \gamma_{j,k}^{i,l}, \delta_{j,k}^{i,l}, \zeta_{j,k}^{i,l}: R^{N-2} \rightarrow Q_s(R_c)$, и $(N-1)$ -аддитивные функции $\lambda_{j,k}^l, \omega_{j,k}^l: R^{N-1} \rightarrow C$ такие, что

$$F_k^l(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1, i \neq l}^N \sum_{j=1}^{m_i} b_j^i x_i p_{j,k}^{i,l}(x_1, \dots, x_N) + \sum_{j=1}^{m_l} b_j^l \lambda_{j,k}^l(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i=1, i \neq l}^N \sum_{j=1}^{u_i} e_j^i x_i^\tau \gamma_{j,k}^{i,l}(x_1, \dots, x_N),$$

для всех $x_1, \dots, x_N \in R$, $l = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n_l$,

$$G_k^l(x_1, \dots, x_N) = - \sum_{i=1, i \neq l}^N \sum_{j=1}^{n_i} p_{k,j}^{l,i}(x_1, \dots, x_N) x_i a_j^i - \sum_{j=1}^{n_l} a_j^l \lambda_{k,j}^l(x_1, \dots, x_N) - \sum_{i=1, i \neq l}^N \sum_{j=1}^{v_i} \delta_{k,j}^{l,i}(x_1, \dots, x_N) x_i^\tau d_j^i,$$

для всех $x_1, \dots, x_N \in R$, $l = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, m_l$,

$$H_k^l(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1, i \neq l}^N \sum_{j=1}^{m_i} b_j^i x_i \delta_{j,k}^{i,l}(x_1, \dots, x_N) + \sum_{j=1}^{u_l} \omega_{j,k}^l(x_1, \dots, x_N) e_j^l + \sum_{i=1, i \neq l}^N \sum_{j=1}^{u_i} e_j^i x_i^\tau \zeta_{j,k}^{i,l}(x_1, \dots, x_N),$$

для всех $x_1, \dots, x_N \in R$, $l = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, v_l$,

$$K_k^l(x_1, \dots, x_N) = - \sum_{i=1, i \neq l}^N \sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{k,j}^{l,i}(x_1, \dots, x_N) x_i a_j^i - \sum_{j=1}^{v_l} \omega_{k,j}^l(x_1, \dots, x_N) d_j^l - \sum_{i=1, i \neq l}^N \sum_{j=1}^{v_i} \zeta_{k,j}^{l,i}(x_1, \dots, x_N) x_i^\tau d_j^i,$$

для всех $x_1, \dots, x_N \in R$, $l = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, u_l$.

При доказательстве существенно используются идеи и техника работ [1], [3] и главы 6 книги [2].

Автор выражает благодарность К.И. Бейдару и А.В. Михалеву за постановку задачи и научное руководство работой, а также В.Т. Маркову за внимание и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Beidar K. I., Martindale W. S. III, Mikhalev A. V. // J. Algebra. 1994. V. 169. №1. P. 304–327. [2] Beidar K. I., Martindale W. S. III, Mikhalev A. V. Rings with generalized identities. New York: Marcel Dekker, 1996. [3] Bresar M. // J. Algebra. 1995. V. 172. №3. P. 690–720. [4] Martindale W. S. III // J. Algebra. 1969. V. 12. P. 576–584.