Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Бродский, Продолжение отображений в гиперпространство UV^n -компактов, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:21:35

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ В ГИПЕРПРОСТРАНСТВО UV^n -КОМПАКТОВ

Н. Б. Бродский

Для данного метрического пространства X рассмотрим гиперпространство $\text{exr}_{UV^n} X$ всех UV^n -подкомпактов X , наделенное метрикой Хаусдорфа. Какими экстензорными свойствами обладает такое пространство? В простейшем случае $n = 0$ для континуума X пространство $\text{exr}_{UV^0} X$ всех подконтинуумов X является абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда $X \in LC^0$ [1]. При $n > 0$ ответ известен лишь для обобщенных гильбертовых пространств $l_2(\tau)$ веса τ : гиперпространство $\text{exr}_{UV^n} l_2(\tau)$ является абсолютным экстензором для класса всех метрических пространств [2]. В данной статье показано, что для широкого класса пространств X гиперпространство $\text{exr}_{UV^n} X$ является абсолютным экстензором.

В терминах многозначных отображений свойство $\text{exr}_{UV^n} X \in AE$ означает, что мы можем продолжать в X непрерывные (т.е. полунепрерывные сверху и снизу) UV^n -значные отображения. Не менее важно уметь продолжать полунепрерывные сверху UV^n -значные отображения. И для таких отображений аналог доказанной ниже теоремы содержится в работе [3].

Представляется интересным рассмотрение множества всех n -ациклических подкомпактов данного пространства X (т.е. таких компактов $K \subset X$, что гомологии Александрова–Чеха $\check{H}_m(K)$ нулевые при $m \leq n$). Вопрос о возможности продолжения полунепрерывных сверху (а также непрерывных) многозначных отображений с n -ациклическими компактными образами точек поставлен Е. В. Щепиным и до сих пор является открытым.

Напомним, что метризуемый компакт K называется *аппроксимативно n -связным* (кратко, *UV^n -компактом*), если для любого вложения K в ANR-пространство всякая его окрестность U содержит такую его окрестность V , что любое отображение сферы размерности $\leq n$ в V гомотопно нулю в U . Непрерывное совершенное отображение, все слои которого являются UV^n -компактами, называется *UV^n -отображением*. Метрическое пространство X удовлетворяет свойству дизъюнктивности n -мерных дисков (кратко, свойству $DD^n P$), если для любой пары отображений $f, g: D^n \rightarrow X$ стандартного n -мерного диска D^n и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие отображения $f', g': D^n \rightarrow X$, что $\text{dist}(f, f') < \varepsilon$, $\text{dist}(g, g') < \varepsilon$ и $f'(D^n) \cap g'(D^n) = \emptyset$.

ТЕОРЕМА. *Если полное метрическое пространство X n -связно, локально n -связно и удовлетворяет свойству $DD^{n+1}P$, то гиперпространство $\text{exr}_{UV^n} X$ является абсолютным экстензором для класса сепарабельных метрических пространств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на замкнутом подмножестве A сепарабельного метрического пространства Z задано непрерывное отображение $F: A \rightarrow \text{exr}_{UV^n} X$. Будем считать пространство X вложенным в качестве замкнутого подмножества в гильбертово пространство l_2 . Отображение F можно продолжить до непрерывного отображения $\tilde{F}: Z \rightarrow \text{exr}_{UV^n} l_2$ [2]. Рассмотрим множество $\Gamma = \{\{z\} \times \tilde{F}(z) \mid z \in Z\} \subset Z \times l_2$ (график отображения $\tilde{F}$) и открытое UV^n -отображение $q: Y \rightarrow \Gamma$ некоторого сепарабельного метрического пространства Y размерности $\dim Y \leq n + 1$ [4]. Обозначим множество $\{y \in Y \mid pr_Z \circ q(y) \in A\}$ через B . Поскольку $X \in AE(n + 1)$, мы можем продолжить отображение $pr_{l_2} \circ q|_B: B \rightarrow X$ до непрерывного отображения $f: Y \rightarrow X$.

Определим непрерывную положительную функцию $\varepsilon: Y \setminus B \rightarrow \mathbb{R}$ формулой $\varepsilon(y) = \text{dist}(A, pr_Z \circ q(y))$. Согласно лемме 5.3 из работы [3] найдется непрерывное отображение $\tilde{f}: Y \rightarrow X$, совпадающее с f на множестве B , являющееся вложением на каждом множестве $q^{-1}(\{z\} \times \tilde{F}(z))$ при $z \in Z \setminus A$, и такое, что $\text{dist}(f(y), \tilde{f}(y)) < \varepsilon(y)$. Прообраз UV^n -компакта $\{z\} \times \tilde{F}(z)$ при UV^n -отображении q является UV^n -компактом [5]. А поскольку отображение $\tilde{f}$ при ограничении на каждый такой прообраз является вложением, то мы можем определить непрерывное продолжение $F': Z \rightarrow \text{exr}_{UV^n} X$ отображения F , полагая $F'(z) = \tilde{f} \circ q^{-1}(\{z\} \times \tilde{F}(z))$.

Следующее замечание дает ответ на вопрос из работы [2].

ЗАМЕЧАНИЕ. Если для полного сепарабельного метрического пространства X выполняется $\text{exp}_{UV^n} X \in AE$, то X n -связно и локально n -связно [3; теорема 4.4]. При этом если X компактно, то нетрудно показать, что X будет UV^n -компактом.

Автор выражает глубокую благодарность Е. В. Щепину за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wojdyslawski M. // Fund. Math. 1939. V. 32. P. 184–192. [2] Ageev S. M., Repovš D., Ščepin E. V. // Tsukuba J. Math. 1999. V. 23. № 1. P. 97–111. [3] Бродский Н. Б. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 3. С. 351–363. [4] Дранишников А. Н. // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 55–96. [5] Ferry S. C. // Lecture Notes in Math. 1987. V. 1283. P. 88–114.

Принято редколлегией
02.10.1999