Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М.-М. Деза, М. И. Штогрин, Прimitives полициклы и гелицены, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:32:33

ПРИМИТИВНЫЕ ПОЛИЦИКЛЫ И ГЕЛИЦЕНЫ

М. ДЕЗА, М. И. ШТОГРИН

Пусть (r^3) – разбиение сферы S^2 при $r = 3, 4, 5$, евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ при $r = 6$ и плоскости Лобачевского H^2 при $r \geq 7$ на правильные r -угольники с углами $\frac{2\pi}{r}$ при вершинах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Край r -угольника является кратчайшим циклом в разбиении (r^3) .*

Каждому разбиению (r^3) однозначно сопоставим комбинаторно изоморфный ему абстрактный двумерный полиэдр $K(r^3)$, составленный из правильных евклидовых r -угольников.

Плоский граф G вместе со всеми его внутренними гранями (см. [2]) назовем примитивным *поли- r -циклом* и обозначим его через $\Pi(G)$, если выполнены следующие три условия:

- (1) граница внешней грани G , совпадающая с границей $\Pi(G)$, есть простой цикл;
- (2) все внутренние грани ограничены простыми циклами одной и той же длины r ;
- (3) пересечение любых двух внутренних граней либо есть одно ребро, либо пусто.

Если $\Pi(G)$ есть поли- r -цикл, то степень каждой вершины графа G равна 2 или 3, граф G является 2-связным, сам полицикл $\Pi(G)$ и все его (внутренние, [2]) грани изоморфны диску.

Назовем поли- r -цикл $\Pi(G)$ *собственным*, если граф G является частичным подграфом реберного остова правильного разбиения (r^3) , и *несобственным* в противном случае. Несобственный поли- r -цикл $\Pi(G)$ назовем *гелиценом* над (r^3) , если существует комбинаторное отображение $\Pi(G) \rightarrow (r^3)$, при котором не менее двух ребер имеют один и тот же образ.

ТЕОРЕМА 1. *Если планарный граф G допускает на плоскости реализацию плоской карты (см. [2]) в виде полицикла $\Pi(G)$, то все такие реализации изоморфны.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Реберный остов тетраэдра, куба, додекаэдра имеет соответственно 4, 6, 12 изоморфных реализаций. У любого другого *допустимого* графа реализация единственна.

Существует единственный абстрактный двумерный полиэдр $P(G)$, все грани которого суть евклидовы правильные r -угольники, комбинаторно изоморфный поли- r -циклу $\Pi(G)$.

ПРИМЕЧАНИЕ. Полиэдр $P(G)$ состоит из таких же правильных r -угольников, как и полиэдр $K(r^3)$. Поэтому отдельный r -угольник полиэдра $P(G)$ допускает изометрическое отображение на r -угольник полиэдра $K(r^3)$ (причем это отображение однозначно определяется указанием барицентрического треугольника и его образа при отображении). У полиэдров $P(G)$ и $K(r^3)$ изометричны *пары* смежных по внутренней стороне r -угольников и *тройки* сходящихся во внутренней вершине r -угольников. Как изометрия пары, так и изометрия тройки однозначно определяется по своему ограничению на одном r -угольнике.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть $\Pi(G)$ есть произвольный поли- r -цикл. Тогда существует непрерывное локально изометрическое клеточное отображение $f: P(G) \rightarrow K(r^3)$.*

Если f является топологическим отображением полиэдра $P(G)$ на его образ в $K(r^3)$, то полицикл $\Pi(G)$ является собственным. Если же отображение f полиэдра $P(G)$ на его образ в $K(r^3)$ является не топологическим отображением, а гомоморфизмом, то полицикл $\Pi(G)$ является гелиценом над (r^3) . Этим исчерпываются все возможности для отображения f .

ТЕОРЕМА 2. *Любой несобственный поли- r -цикл $\Pi(G)$ является гелиценом над (r^3) . Комбинаторное отображение полицикла $\Pi(G)$ в разбиение (r^3) однозначно определяется заданием образов фиксированной вершины, инцидентного ей ребра и инцидентной ему грани.*

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ. *Любой r -цикл в любом поли- r -цикле $\Pi(G)$ ограничивает грань.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00251).

В трех исключительных случаях $\Pi(3^3)$, $\Pi(4^3)$, $\Pi(5^3)$, когда $\mathbf{P}(3^3) = \mathbf{K}(3^3) - \mathbf{f}$, $\mathbf{P}(4^3) = \mathbf{K}(4^3) - \mathbf{f}$, $\mathbf{P}(5^3) = \mathbf{K}(5^3) - \mathbf{f}$ соответственно, имеется один r -цикл, ограничивающий удаленную грань $\mathbf{f}$. Любой другой r -цикл в этих трех случаях, а также любой r -цикл в любом ином поли- r -цикле ограничивает грань самого полицикла $\Pi(G)$, т.е. внутреннюю грань плоского графа G .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если поли- r -цикл $\Pi(G)$ имеет не менее двух граней, то пересечение края хотя бы одной из граней с краем поли- r -цикла $\Pi(G)$ есть простая цепь.

В самом деле, край $\partial\Pi(G)$ поли- r -цикла $\Pi(G)$ в силу условия (1) есть простой цикл z . Возьмем ребро e_1 из z . Оно принадлежит некоторой грани $\mathbf{f}_1$. Пусть $\partial\mathbf{f}_1 \cap \partial\Pi(G)$ не связно. Тогда будем перемещаться вдоль z в определенном направлении, начиная с ребра e_1 . Первое ребро e_2 из z , не принадлежащее $\mathbf{f}_1$, принадлежит грани $\mathbf{f}_2$. Если $\partial\mathbf{f}_2 \cap \partial\Pi(G)$ не связно, идем вдоль z далее. Первое ребро e_3 из z , не принадлежащее $\mathbf{f}_2$, принадлежит грани $\mathbf{f}_3$, отличной не только от $\mathbf{f}_2$, но и от $\mathbf{f}_1$, так как грань $\mathbf{f}_2$, примыкающая к краю полицикла $\Pi(G)$ в разных местах, отгораживает $\mathbf{f}_3$ от $\mathbf{f}_1$. Если $\partial\mathbf{f}_3 \cap \partial\Pi(G)$ не связно, идем далее ... Через конечное число шагов получим грань $\mathbf{f}_n$, для которой пересечение $\partial\mathbf{f}_n \cap \partial\Pi(G)$ связно. Так как $\Pi(G)$ содержит не менее двух граней, то $\partial\mathbf{f}_n$ не совпадает с z . Утверждение доказано.

Доказательство основной леммы. Если полиэдр $\mathbf{P}(G)$ состоит из одного r -угольника, а он равен r -угольнику из $\mathbf{K}(r^3)$, то лемма выполняется. Пусть лемма справедлива для всех полиэдров $\mathbf{P}(G)$ с числом граней, не превышающим $k-1$. Докажем ее для любого полиэдра $\mathbf{P}(G)$ с k гранями, $k \geq 2$. В силу утверждения полиэдр $\mathbf{P}(G) \sim \Pi(G)$ имеет такую грань $\mathbf{f}$, что пересечение $\partial\mathbf{f} \cap \partial\mathbf{P}(G)$ есть простая цепь x . Край $\partial\mathbf{f}$ грани $\mathbf{f}$ в силу условия (2) является простым циклом $x+y$. Простая цепь y не пуста. Удалив из полиэдра $\mathbf{P}(G)$ грань $\mathbf{f}$, получим соответствующий графу $G-x$ полиэдр $\mathbf{P}(G-x) = \mathbf{P}(G) - \mathbf{f}$ с $k-1$ гранями. Край $\partial\mathbf{P}(G-x)$ полиэдра $\mathbf{P}(G) - \mathbf{f}$ является простым циклом $z-x+y$. Проверено условие (1), а (2) и (3) верны по наследству. По предположению индукции имеется отображение $\mathbf{P}(G-x)$ в $\mathbf{K}(r^3)$. Возьмем цепь y и ее образ при этом отображении. В силу условия (3) по всем ребрам цепи y с гранью $\mathbf{f}$ смежны разные грани полиэдра $\mathbf{P}(G)$, принадлежащие полиэдру $\mathbf{P}(G-x)$. Все их образы в $\mathbf{K}(r^3)$ также различны и примыкают к образу цепи y , принадлежащему одному r -угольнику из $\mathbf{K}(r^3)$. Учитывая примечание, на этот r -угольник однозначно отображается грань $\mathbf{f}$, дополняющая полиэдр $\mathbf{P}(G-x)$ до полиэдра $\mathbf{P}(G)$. Лемма доказана.

Доказательство следствия. В силу предложения и наличия отображения $f: \mathbf{P}(G) \rightarrow \mathbf{K}(r^3)$ длина кратчайшего цикла в $\mathbf{P}(G)$ равна r . Рассмотрим любой r -цикл в $\mathbf{P}(G)$. Его образ при отображении f есть r -цикл в $\mathbf{K}(r^3)$ и является краем плоского r -угольника в $\mathbf{K}(r^3)$. Пусть этот плоский r -угольник не имеет прообраза при отображении f . Тогда все r смежных с ним плоских r -угольников обязаны иметь прообразы, иначе образу r -цикла неоткуда было бы взяться. Им принадлежит ε -окрестность образа r -цикла, гомеоморфная кольцу. Прообраз этого кольца при отображении f есть опять кольцо, совпадающее с ε -окрестностью исходного r -цикла в $\mathbf{P}(G)$. Отсюда и в силу условия (1) следует, что исходный r -цикл исчерпывает весь край полиэдра $\mathbf{P}(G)$. А так как полиэдр $\mathbf{P}(G)$ гомеоморфен диску, то он имеет вид $\mathbf{P}(3^3) = \mathbf{K}(3^3) - \mathbf{f}$, $\mathbf{P}(4^3) = \mathbf{K}(4^3) - \mathbf{f}$, $\mathbf{P}(5^3) = \mathbf{K}(5^3) - \mathbf{f}$, когда r -цикл является краем выкинутой из многогранника грани $\mathbf{f}$. Во всех остальных случаях r -цикл является краем наличной (внутренней, см. [2]) грани полиэдра $\mathbf{P}(G)$. Так как $\mathbf{P}(G) \sim \Pi(G)$, то следствие доказано.

Доказательство теоремы 1 вытекает из следствия из основной леммы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Deza M., Shtogrin M. I. // Voronoi's conference on analytic number theory and space tilings, Kyiv, September, 7–14, 1998. Abstracts. Kyiv, 1998. P. 19–23. [2] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.