Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Гриншпон, $f.i.$ -корректные абелевы группы, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:35:21

***f.i.*-КОРРЕКТНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ**

С. Я. Гриншпон

Две абелевы группы называются *почти изоморфными*, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы [1]. Две абелевы группы называются *почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством*, если каждая из них изоморфна некоторой подгруппе другой группы, обладающей этим свойством. Задача об изоморфизме почти изоморфных групп привлекала внимание многих алгебраистов. В одной из тестовых проблем Капланского [2] ставится вопрос об изоморфизме абелевых групп, почти изоморфных по прямым слагаемым. Для счетных редуцированных примарных групп эта проблема имеет положительное решение [2], однако в работе [3] приведен пример неизоморфных p -групп, каждая из которых изоморфна прямому слагаемому другой группы. Для групп без кручения пример такого рода был построен в [4]. В ряде работ исследуется, когда из почти изоморфизма абелевых групп по сервантным или вполне характеристическим подгруппам вытекает их изоморфизм (см., например, [5]–[10]).

Известная теоретико-множественная теорема Кантора–Шредера–Бернштейна явилась источником постановки аналогичных задач в алгебре не только для абелевых групп. В [11] изучается теоретико-кольцевой, а в [12] теоретико-категорный аналог теоремы Кантора–Шредера–Бернштейна. Рассматриваются также почти изоморфные модули (см., например, [13], [14]). Подобные задачи возникают и в других областях математики, в частности, в топологии ([15; с. 20–21]).

Для рассмотренных аналогов теоремы Кантора–Шредера–Бернштейна характерно, в отличие от самой теоремы, наличие примеров отрицательного решения соответствующих задач, а также изучение классов объектов, для которых эти задачи имеют положительное решение.

При изучении абелевых групп, почти изоморфных по некоторым подгруппам, удобно считать, что одна группа зафиксирована, а другая – пробегает весь класс абелевых групп. Назовем абелеву группу A *$f.i.$ -корректной*, если для любой абелевой группы B из того, что $A \cong B'$ и $B \cong A'$, где A', B' – вполне характеристические подгруппы групп A и B соответственно (т.е. A и B почти изоморфны по вполне характеристическим подгруппам), следует изоморфизм $A \cong B$.

Для исследования *$f.i.$ -корректности* периодических абелевых групп введем следующие определения.

Последовательность $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ кардинальных чисел назовем *сильно зависимой*, если существует возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $m_0, m_1, \dots, m_n, \dots$, отличная от последовательности всех целых неотрицательных чисел, расположенных в естественном порядке, такая, что при $k = 0, 1, 2, \dots$ выполняются равенства: $a_k = \sum_{m=m_k}^{m_{k+1}-1} a_m$, причем если $m_0 = 1$, $m_1 = 1$ и n_1 – наименьшее натуральное число, не являющееся членом последовательности $m_0, m_1, \dots, m_k, \dots$, то при выполнении условия $a_{n_1} \geq \aleph_0$ в последовательности $a_{n_1}, a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots$ должна существовать хотя бы одна пара не равных между собой чисел.

Напомним, что σ -*инвариант Ульма–Капланского* $f_A(\sigma)$ для группы A (σ – порядковое число) это ранг группы $p^\sigma A[p]/p^{\sigma+1}A[p]$.

Периодическую абелеву группу G назовем *U -группой*, если каждая примарная компонента $T_p(G)$ группы G удовлетворяет одному из трех условий: а) $T_p(G)$ – ограниченная группа; б) существует такое бесконечное кардинальное число α , что $f_{T_p(G)}(i) = \alpha$ для всякого целого неотрицательного числа i ; в) последовательность $f_{T_p(G)}(0), f_{T_p(G)}(1), \dots, f_{T_p(G)}(n), \dots$ не является сильно зависимой.

Напомним, что *периодически полной (замкнутой) p -группой* называется периодическая часть p -адического пополнения прямой суммы циклических p -групп.

Получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – периодическая абелева группа, каждая примарная компонента которой является периодически полной группой или группой, разложимой в прямую сумму циклических групп. Группа G *$f.i.$ -корректна* тогда и только тогда, когда G – U -группа.

При доказательстве теоремы существенно используется описание вполне характеристических подгрупп абелевых p -групп, полученное в [16].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-00795, 96-15-96095).

Смешанные группы, периодические части которых являются U -группами, не обязательно $f.i.$ -корректны. Для смешанных групп G из ряда классов с условием: $T(G) - U$ -группа, удалось получить критерии $f.i.$ -корректности.

При изучении вполне характеристических подгрупп абелевых групп A без кручения интерес представляют группы, в которых каждая вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A(v) = \{a \in A \mid \chi(a) \geq v\}$, где v – некоторая последовательность, состоящая из целых неотрицательных чисел и символов ∞ , $\chi(a)$ – характеристика элемента a . Такие редуцированные группы без кручения были названы в [17] χ -группами. Всякая χ -группа является *вовне транзитивной* группой, т.е. группой, в которой для любых двух элементов x и y таких, что $\chi(x) \leq \chi(y)$, существует эндоморфизм φ этой группы со свойством $\varphi x = y$; обратное в общем случае неверно [17].

Абелева группа без кручения называется *квазиоднородной*, если характеристики любых двух ее ненулевых элементов содержат символы ∞ на одних и тех же местах.

Рассмотрим абелевы группы без кручения конечного ранга. Нам понадобятся два понятия, касающиеся колец. Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей. Групповые термины, примененные к кольцу, относятся к его аддитивной группе.

Кольцо R называется *сильно однородным*, если каждый его элемент есть целое кратное некоторого обратимого в R элемента.

Кольцо R называется *E -кольцом*, если левое регулярное представление кольца R является изоморфизмом, т.е. каждый эндоморфизм группы R^+ совпадает с умножением кольца R слева на некоторый элемент из R [18].

Для абелевой группы A обозначим через $\pi(A)$ – множество всех тех простых чисел p , для которых $pA \neq A$.

Получено следующее описание χ -групп конечного ранга.

ТЕОРЕМА 2. *Для абелевой группы без кручения конечного ранга следующие условия эквивалентны:*

- 1) A – χ -группа;
- 2) A – *вовне транзитивная группа*, и всякое квазиоднородное прямое слагаемое группы A является *однородной группой*;
- 3) A – *однородно разложимая вполне транзитивная группа*;
- 4) $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, $\pi(A_{i_1}) \cap \pi(A_{i_2}) = \emptyset$ при $i_1 \neq i_2$ ($i_1, i_2 = \overline{1, n}$), каждая группа A_i – *однородная* и $A_i \cong R_i^{n_i} \otimes Z B_i$, где R_i – *сильно однородное E -кольцо без кручения конечного ранга*, B_i – *группа без кручения ранга 1*, и если для простого числа p $pB_i = B_i$, то $pR_i = R_i$.

Используя теорему 2, получаем такой результат.

ТЕОРЕМА 3. *χ -группа конечного ранга $f.i.$ -корректна.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jonsson B. // Math. Scand. 1960. V. 7. P. 361–371. [2] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. Ann. Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954. [3] Crawley P. // J. Algebra. 1965. V. 2. № 4. P. 413–431. [4] Sasiada E. // Bull. Polish Acad. Sci. Math. Astron. Phys. 1961. V. 5. P. 331–334. [5] de Groot J. // Canad. J. Math. 1957. V. 9. P. 291–297. [6] Росошек С. К. // Абелевы группы и модули. 1979. С. 143–150. [7] Приходько И. А. // Абелевы группы и модули. 1984. С. 90–99. [8] Пятков В. С. // Группы и модули. 1976. С. 49–56. [9] Гриншпон С. Я. // Абелевы группы и модули. 1989. № 8. С. 65–79. [10] Ботыгина А. И., Гриншпон С. Я. // Междун. алг. конф. Санкт-Петербург. Тезисы докладов, 1997. С. 171–172. [11] Connell I. // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 132. P. 335–351. [12] Trnkova V., Koubek V. // Comment. Math. Univ. Carolin. 1973. V. 14. P. 197–204. [13] Holzinger R., Hallahan C. // Arch. Math. 1974. V. 25. P. 591–592. [14] Росошек С. К. // Абелевы группы и модули. 1979. С. 127–142. [15] Борсук К. Теория ретрактов. М.: Мир, 1971. [16] Гриншпон С. Я. // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. № 4. С. 1281–1307. [17] Гриншпон С. Я. // Абелевы группы и модули. 1982. С. 56–92. [18] Arnold D. M. Finite Rank Torsion-Free Abelian Groups and Rings. Berlin: Springer-Verlag 1982. (Lecture Notes in Math. V. 931.)