Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Джанашия, Е. Т. Лагвилава, Л. Н. Эпремидзе, О приближенной факторизации положительно определенной матриц-функции, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 07:42:45

О ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦ-ФУНКЦИИ

Г. А. Джанашия, Е. Т. Лагвилава, Л. Н. Эпемидзе

В [1], [2] Винер показал, что для положительно определенной матриц-функции

$$(1) \quad S(t) = (f_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,r}},$$

$|t| = 1$, с интегрируемыми членами, $f_{ij}(t) \in L_1$, если логарифм детерминанта интегрируем,

$$(2) \quad \log \det(S(t)) \in L_1,$$

то существует факторизация

$$(3) \quad S(t) = \chi^+(t) \cdot (\chi^+(t))^*,$$

где χ^+ – внешняя аналитическая матриц-функция с членами из класса Харди H_2 , а $(\chi^+)^*$ – ее эрмитово сопряжение (в (3) подразумевается, что $\chi^+(t) = \chi^+(z)|_{|z|=t}$ и равенство выполняются почти всюду).

В целях единственности факторизации (3) (она единственна с точностью до постоянного унитарного множителя с правой стороны) будем требовать, чтобы матрица $\chi^+(0)$ была положительно определена.

Условие (2) является также необходимым для существования такой факторизации.

Создавая теорию линейного прогнозирования стационарных процессов, Колмогоров и Винер показали, что если (1) – спектральная матриц-функция такого процесса, то его коэффициенты Вольда совпадают с коэффициентами аналитической матриц-функции $\chi^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ (см. [3], [2]). По этим коэффициентам, в свою очередь, легко вычисляются коэффициенты прогноза. Таким образом, Колмогоровым и Винером нахождение прогноза для стационарного процесса было сведено к решению задачи факторизации положительно определенной матриц-функции. В общем случае факторизацию (3) в явном виде решить невозможно. Поэтому существенный интерес приобретают методы приближенного нахождения χ^+ (см. [4]–[6]).

Очень часто для данного стационарного процесса строится эмпирическая спектральная матриц-функция, которая является лишь приближением теоретически существующей спектральной матриц-функции. Так как, вообще говоря, факторизация не устойчива, т.е. “малое” изменение матриц-функции $S(t)$ может привести к “большому” изменению матриц-функции $\chi^+(t)$, естественно ставится вопрос: насколько мы можем быть уверены в том, что коэффициенты Вольда, соответствующие эмпирической спектральной матриц-функции, остаются близки к коэффициентам Вольда данного стационарного процесса.

На фоне сказанного выше для приложений может оказаться интересной следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $S_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, и $S(t)$ – положительно определенные матриц-функции с интегрируемым логарифмом детерминантов, и имеет место сходимость

$$(4) \quad \|S_n(t) - S(t)\|_{L_1} \rightarrow 0$$

(подразумевается почленная сходимость в L_1). В этом случае

$$(5) \quad \|\chi_n^+(t) - \chi^+(t)\|_{H_2} \rightarrow 0$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$(6) \quad \log \det(S_n(t)) \xrightarrow{\text{слабо}} \log \det(S(t))$$

(под слабой сходимостью последовательности из L_1 подразумеваем слабую сходимость последовательности соответствующих функционалов на классе непрерывных функций $C[0, 2\pi)$).

Так как $\det(\chi_n^+(z))$ и $\det(\chi^+(z))$ внешние аналитические функции из класса Неванлинны, из (5) легко следует, что

$$\log|\det(\chi_n^+(t))| \xrightarrow{\text{слабо}} \log|\det(\chi^+(t))|,$$

что означает, ввиду (3), справедливость (6).

Доказательство достаточной части теоремы существенно опирается на алгоритм факторизации положительно определенной матриц-функции, предложенный в [6].

В этой статье для $S(t)$ строится последовательность $(S_n(t))_{n=1}^{\infty}$ с тем же детерминантом, $\det(S(t)) = \det(S_n(t))$, удовлетворяющая (4), для которой $\chi_n^+(t)$ найдено в явном виде и выполняется (5).

В общем случае сформулированная теорема не дает ответа на практически важный вопрос: каков порядок сходимости в (5)?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wiener N., Masani P. // Acta Math. 1957. V. 98. P. 111–150. [2] Wiener N., Akutowicz E. J. // J. Math. Mech. 1959. V. 8. P. 111–120. [3] Колмогоров А. Н. // Бюлл. МГУ. 1941. Т. 2. №6. С. 1–40. [4] Wiener N., Masani P. // Acta Math. 1958. V. 99. P. 93–137. [5] Masani P. // Acta Math. 1960. V. 104. P. 141–162. [6] Janashia G., Lagvilava E. // Studia Math. 1999. V. 137. №1. P. 93–100.

Тбилисский математический институт им. Размадзе АН Грузии

Принято редколлегией
02.10.1999