Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кагарманов, О несуществовании полинома, восстанавливающего кольцо функций по алгебре Ли векторных полей над полями положительной характеристики, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm24>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:25:48

**О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛИНОМА, ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО
КОЛЬЦО ФУНКЦИЙ ПО АЛГЕБРЕ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ
НАД ПОЛЯМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

А. А. КАГАРМАНОВ

Пусть $W_n = \text{der } E_n$ — алгебра Ли дифференцирований кольца многочленов $E_n = K[x_1, \dots, x_n]$ от n коммутирующих переменных. Алгебру W_n можно рассматривать как левый E_n -модуль, и тогда $E_n \subset \text{End}_K W_n$. В работе [1] доказано, что над полями K нулевой характеристики существует такой ассоциативный полином $f(t_1, \dots, t_l)$, что для любых $g_1, \dots, g_l \in W_n$ значение $f(\text{ad}(g_1), \dots, \text{ad}(g_l)) \in E_n$ и отображение $f: (\text{ad } W_n)^{\otimes l} \rightarrow E_n$ является эпиморфизмом.

Этот полином позволяет достаточно конструктивно восстанавливать коммутативную алгебру бесконечно дифференцируемых функций гладкого n -мерного многообразия по алгебре Ли его векторных полей. Такие полиномы мы будем называть *восстанавливающими* полиномами. Цель данной заметки — доказать, что без дополнительных ограничений на поля положительной характеристики этот результат не переносится. Нами получена следующая

ТЕОРЕМА. *Если $\text{char } K = 2$, то полинома f , восстанавливающего по алгебре Ли W_1 специальных дифференцирований кольца $E_1 = O[x]$ саму алгебру E_1 , не существует.*

Определения специальных дифференцирований в случае полей положительной характеристики можно посмотреть в [2].

ЛЕММА 1. *Для любого натурального m векторное подпространство H_m , натянутое на $\langle e_{-1}, e_0, \dots, e_{p^m-2} \rangle$ в алгебре W_1 над полем характеристики p , является подалгеброй в W_1 ; здесь $e_k = x^{(k+1)}\partial_x$ — стандартный базис в W_1 .*

Рассмотрим подалгебру в $O[x]$ — алгебре разделенных степеней вида $O_m(x) = \langle 1, x, x^{(2)}, \dots, x^{(p^m-1)} \rangle_K$; это подалгебра, так как $x^{(k)} \cdot x^{(l)} = \binom{k+l}{k} x^{(k+l)} = 0$, если $k+l \geq p^m$, $k, l < p^m$. Это следует из того, что если рассматривать целую функцию $\tau_p(n)$ — максимальную степень числа p , на которую делится $n!$, то

$$(1) \quad \tau_p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k} \right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x . Поэтому максимальная степень числа p , на которую в данном случае делится $\binom{k+l}{k}$, очевидно, есть $\tau_p(k+l) - \tau_p(k) - \tau_p(l) = \sum_{i=1}^m \left(\left[\frac{k+l}{p^i} \right] - \left[\frac{k}{p^i} \right] - \left[\frac{l}{p^i} \right] \right)$. Каждое слагаемое в этой сумме неотрицательно, так как $[x+y] \geq [x] + [y]$, а последнее слагаемое ($i = m$) равно 1, поэтому в нашем поле K биномиальный коэффициент $\binom{k+l}{k} \equiv 0$. Очевидно, что алгебра дифференцирований $O_m(x)$ есть $H_m(x)$, что и требовалось.

ЛЕММА 2. *Если $\text{char } K = 2$, то в W_1 подалгебры H_m из леммы 1 содержат идеалы I_m вида $I_m = \langle e_{-1}, e_0, \dots, e_{2^m-3} \rangle_K$ и только такие.*

Пусть в H_m есть идеал I и ненулевой элемент $\omega = \sum_{k=-1}^N a_k e_k \in I$. В силу $[e_k, e_{-1}] = e_{k-1}$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [e_{-1}, \omega] &= \sum_{k=-1}^{N-1} a_{k+1} e_k \in I, \\ &\dots\dots\dots \\ [\underbrace{e_1, \dots, e_{-1}}_s, \omega] &= \sum_{k=-1}^{N-s} a_{k+s} e_k \in I, \end{aligned}$$

где $s = 1, \dots, N + 1$. Из этой треугольной относительно $e_{-1}, \dots, e_N$ системы получаем, что $\{e_{-1}, e_0, \dots, e_N\}_K \in I$. Далее, учитывая, что $H_m = \langle e_{-1}, e_0, \dots, e_{2^m-2} \rangle_K$, получаем, что $\langle e_{-1}, e_0, \dots, e_{2^m-3} \rangle_K \in I$. Осталось показать, что $I_m = \langle e_{-1}, e_0, \dots, e_{2^m-3} \rangle_K$ — идеал в H_m . Для этого достаточно показать, что для любых положительных целых q и l таких, что $q + l = 2^m - 2$, выполняется равенство $[e_q, e_l] = 0$. Это следует из того, что все $\binom{2^m}{i}$ четны, а значит, все $\binom{2^m-1}{i}$ нечетны, поэтому

$$[e_q, e_l] = \left(\binom{q+l+1}{q+1} - \binom{q+l+1}{l+1} \right) \cdot e_{q+l} = \left(\binom{2^m-1}{q+1} - \binom{2^m-1}{l+1} \right) \cdot e_{2^m-2} = 0$$

над нашим полем K . Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\text{char } K = 2$, A — любая конечномерная подалгебра вида $\langle 1, x, x^{(2)}, \dots, x^{(l)} \rangle_K$ в $O[x]$. Тогда $l + 1$ есть степень числа 2.

Если $l + 1$ — степень числа 2, то получаем лемму 1. Обратно, если A — подалгебра, то для $k = 1, \dots, l$ выполняется $0 = x^{(k)} \cdot x^{(l+1-k)} = \binom{l+1}{k} \cdot x^{(l+1)}$, поэтому в треугольнике Паскаля $(l + 1)$ -я строка $\binom{l+1}{k}$ ($k = 1, \dots, l$) состоит из четных чисел. Покажем, что $n = l + 1$ — степень числа 2. Представим $n = 2^k + r$, $0 \leq r < 2^k$. Пусть $r > 0$. Если все $\binom{n}{i}$ ($i = 1, \dots, n - 1$) четны, то над $\mathbb{Z}_2$

$$(1+x)^n = 1+x^n = (1+x)^{2^k} \cdot (1+x)^r = (1+x^{2^k})(1+rx+\dots+x^r) = 1+\dots+x^r+\dots+x^n.$$

Противоречие с тем, что $0 < r < 2^k$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть существует полином f , осуществляющий ненулевое отображение $f: (\text{ad } W_1)^{\otimes l} \rightarrow O_1[x]$. Тогда существует набор $e_{i_1}, \dots, e_{i_l}$ из стандартного базиса W_1 такой, что $f(\text{ad}(e_{i_1}), \dots, \text{ad}(e_{i_l})) \neq 0$. Выберем натуральное m таким, что $e_{i_1}, \dots, e_{i_l} \in H_m$ из леммы 1. Тогда отображение $f|_{H_m}$ — ненулевое. Поэтому, если обозначить через A линейное пространство в $\text{End}_K H_m$, порожденное $f(\text{ad } \omega_1, \dots, \text{ad } \omega_l)$, то $H = A \cap O(x)$ — ненулевая подалгебра в $\text{End}_K H_m \cap O(x)$. Более того, в силу

$$[g(\text{ad } \omega_1, \dots, \text{ad } \omega_l), \text{ad } \vartheta] = \sum_{i=1}^l g|_{t_i=[\omega_i, \vartheta]}^{t_k=\omega_k, k \neq i}$$

выполняется включение

$$(2) \quad [\text{ad } H_m, H] \subset H.$$

В силу того, что H — ненулевая подалгебра и выполняется (2), $H \circ \partial$ выдерживает действие $e_{-1}, e_0, e_1, \dots$, т.е.

$$(3) \quad [\text{ad } e_k, H \circ \partial] \subset H \circ \partial.$$

С другой стороны, $H \circ \partial$ конечномерна, и, более того, так как H — подалгебра, то из леммы 3, которую можно применять в силу того, что $H \circ \partial$ имеет вид $\langle e_{-1}, e_0, \dots, e_N \rangle_K$ и $H = \langle 1, x, x^{(2)}, \dots, x^{(2^{m_1}-1)} \rangle_K$, следует $\dim_K H = 2^{m_1}$. Очевидно, что $m_1 \leq m$. В силу (3) $H \circ \partial$ содержит $e_{-1}, e_0, \dots, e_{2^m-3}$, а значит, $m_1 = m$ и $H \circ \partial = H_m$. С другой стороны, $H \circ \partial \subseteq I_m \not\subseteq H$, так как $\partial \in I_m$ и H порождена мономами $\text{ad } \omega_1 \cdot \dots \cdot \text{ad } \omega_l$, т.е. $H \circ \partial$ лежит в идеале I_m . Противоречие. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Размыслов Ю. П. // Матем. сб. 1983. Т. 112. № 1. С. 97–125. [2] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 2. С. 251–322.

Институт физики высоких энергий
E-mail: albert@oea.ihep.su

Принято редколлегией
24.12.1997