Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, М. Х. Шерматов, О спектре гамильтониана одной системы трех квантовых частиц на решетке, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:43:49

О СПЕКТРЕ ГАМИЛЬТониАНА ОДНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

С. Н. ЛАКАЕВ, М. Х. ШЕРМАТОВ

Одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичного оператора Шрёдингера на евклидовом пространстве является эффект Ефимова, т.е. существование бесконечно-го числа трехчастичных связанных состояний, энергии которых накапливаются к нижнему краю существенного спектра (см. [1]–[3]). Аналогичный эффект имеет место для гамильтониана трех произвольных и трех одинаковых частиц на решетке (см. [4], [5]), более того, наличие этого явления существенно зависит от значений полного квазиимпульса [5].

В настоящем сообщении для гамильтониана одной системы трех квантовых частиц (два фермиона взаимодействуют с третьей частицей другой природы) получено компактное интегральное уравнение Фаддеева–Ньютона для собственных функций, описан существенный спектр и установлено существование эффекта Ефимова в случае, когда масса фермиона в достаточной степени больше массы третьей частицы. Кроме того, этот результат в отличие от результата работы [5] основан на изучении спектра предельного фаддеевского оператора в подпространстве функций с угловым моментом $l = 1$. Отметим, что установленный нами результат вполне согласуется с результатом о наличии эффекта Томаса для аналогичной системы трех частиц с точечными взаимодействиями.

Пусть T^3 – трехмерный тор, $L_2((T^3)^3)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на $(T^3)^3$, а $L_2^a((T^3)^3)$ – подпространство пространства $L_2((T^3)^3)$, состоящее из функций $f(k_1, k_2, k_3)$, антисимметрических относительно переменных k_1 и k_2 .

В импульсном представлении гамильтониан данной системы действует в пространстве $L_2^a((T^3)^3)$ по формуле:

$$(1) \quad (H_{\mu, \lambda} f)(k_1, k_2, k_3) = (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + \lambda \varepsilon(k_3)) f(k_1, k_2, k_3) - \mu \sum_{\alpha=1,2} \int_{(T^3)^3} \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \delta(k_\beta + k_3 - k'_\beta - k'_3) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3,$$

$\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Здесь $\delta(k)$ – трехмерная дельта-функция Дирака, $\varepsilon(k)$ – вещественно аналитическая функция в некоторой комплексной окрестности тора T^3 , удовлетворяющая условию $\varepsilon(k) = \varepsilon(-k)$ для любого $k \in T^3$, $\lambda > 0$ – отношение масс фермиона и 3-й частицы, $\mu > 0$ – энергия взаимодействия.

Пусть $K = k_1 + k_2 + k_3$ – квазиимпульс системы, а $F_K = \{(k_1, k_2, k_3) \in T^3 : k_1 + k_2 + k_3 = K\}$ – шестимерное многообразие. Обозначим через $L_2^a(F_K)$ гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на F_K и удовлетворяющих условию:

$$f(k_1, k_2, k_3) = f(k_1, k_2, K - k_1 - k_2) = -f(k_2, k_1, K - k_1 - k_2) = -f(k_2, k_1, k_3).$$

Пространство $L_2^a((T^3)^3)$ и оператор $H_{\mu, \lambda}$ представляются в виде следующих прямых интегралов (см. [5]):

$$(2) \quad L_2^a((T^3)^3) = \int_{T^3} \oplus L_2^a(F_K) dK, \quad H_{\mu, \lambda} = \int_{T^3} \oplus \hat{H}_{\mu, \lambda}(K) dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\hat{H}_{\mu, \lambda}(K)$, $K \in T^3$, действует в пространстве $L_2^a(F_K)$ по формуле:

$$(3) \quad \hat{H}_{\mu, \lambda}(K) f(p, q, K - p - q) = \varepsilon_{K, \lambda}(p, q) f(p, q, K - p - q) - \mu \int_{T^3} [f(p, q', K - p - q') + f(q', q, K - q - q')] dq'.$$

Здесь $\varepsilon_{K, \lambda}(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \lambda \varepsilon(K - p - q)$, $K \in T^3$, $0 < \lambda < \infty$.

Предположим, что функция $\varepsilon(p)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_0 \in T^3$.

ЛЕММА. Пусть $K_0 = 3p_0 \in T^3$. Тогда существует аналитическая функция $P_\lambda(K)$, определенная в некоторой β_λ -окрестности $U_{\beta_\lambda}(K_0)$ точки K_0 , такая, что для любого $K \in U_{\beta_\lambda}(K_0)$ точка $(P_\lambda(K), P_\lambda(K))$ является единственной точкой минимума функции $\varepsilon_{K,\lambda}(p, q)$.

Пусть $\widehat{L}(K)$ – подпространство функций $f(p, q)$ из $L_2((T^3)^2)$, удовлетворяющих условию $f(p, q) = -f(q, p)$, а $H_{\mu,\lambda}(K)$, $K \in T^3$, – ограниченный самосопряженный оператор, действующий в $\widehat{L}(K)$ по формуле:

$$(4) \quad (H_{\mu,\lambda}(K)f)(p, q) = \varepsilon_{K,\lambda}(p, q)f(p, q) - \mu \int_{T^3} [f(p, q') - f(q, q')] dq'.$$

Для любого $K \in T^3$ оператор $H_{\mu,\lambda}(K)$ унитарно эквивалентен оператору $\widehat{H}_{\mu,\lambda}(K)$, действующему в $L_2^g(F_K)$ по формуле (3).

Положим

$$z(K, \lambda) = \min \varepsilon_{K,\lambda}(p, q), \quad \mu(K, \lambda) = \min \left(\int_{T^3} \frac{dq}{\varepsilon_{K,\lambda}(p, q) - z(K, \lambda)} \right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для любых $K \in T^3$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$ оператор $H_{\mu,\lambda}(K)$ не имеет собственных значений $z > \max \varepsilon_{K,\lambda}(p, q)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \in T^3$ и $\mu \neq \mu(K, \lambda)$. Тогда дискретный спектр оператора $H_{\mu,\lambda}(K)$ конечен.

Предположим, что для некоторого $K \in U_{\beta_\lambda}(K_0)$ выполняется соотношение:

$$(5) \quad \mu(K, \lambda) = \left(\int_{T^3} \frac{dq}{\varepsilon_{K,\lambda}(P_\lambda(K), q) - z(K, \lambda)} \right)^{-1}.$$

Обозначим через λ_0 решение уравнения

$$\frac{2(1+\lambda)^2}{\pi\lambda\sqrt{1+2\lambda}} - \frac{(1+\lambda)^2}{\pi\lambda^2} \left(\pi - 2 \arccos \frac{\lambda}{1+\lambda} \right) = 1, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\lambda > \lambda_0$, $K \in U_{\beta_\lambda}(K_0)$ и в точке K выполняется равенство (5). Тогда оператор $H_\lambda(K) = H_{\mu(K,\lambda),\lambda}(K)$ имеет бесконечное число собственных значений $E_{\lambda,1}(K), E_{\lambda,2}(K), \dots, E_{\lambda,n}(K), \dots$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda,n}(K) = z(K, \lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ефимов В. Н. // Ядерная физика. 1970. Т. 12. №5. С. 1080–1091. [2] Яфаев Д. К. // Матем. сб. 1974. Т. 9 (136). №4 (8). С. 567–592. [3] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985. [4] Лакаев С. Н. // ТМФ. 1991. Т. 89. №1. С. 94–104. [5] Лакаев С. Н. // Функциональный анализ и его приложения. 1993. Т. 27. №3. С. 15–28.

Принято редколлегией
02.10.1999