Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Мальцев, Нелокальные скобки Пуассона и метод Уизема, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 03:56:44

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА И МЕТОД УИЗЕМА

А. Я. МАЛЬЦЕВ

Мы рассматриваем нелокальные теоретико-полевые скобки Пуассона на пространстве функций $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x))$ вида:

$$(1) \quad \{\varphi^i(x), \varphi^j(y)\} = \sum_{k \geq 0} B_k^{ij}(\varphi, \varphi_x, \dots) \delta^{(k)}(x-y) + \sum_{k \geq 0} e_k S_{(k)}^i(\varphi, \varphi_x, \dots) \nu(x-y) S_{(k)}^j(\varphi, \varphi_y, \dots),$$

где $e_k = \pm 1$, $\nu(x-y) = -\nu(y-x)$, $\partial_x \nu(x-y) = \delta(x-y)$ и обе суммы содержат конечное число членов, зависящих от конечного числа производных φ по x . Как хорошо известно, скобки (1) обыкновенно встречаются в теории “интегрируемых” систем типа Кортевега–де Фриза, Нелинейного Шрёдингера и т. п.

Е. В. Ферапонтовым ([1], см. также [2]) был введен важный класс скобок (1), обладающий замечательными дифференциально-геометрическими свойствами, вытекающими из тождества Якоби:

$$(2) \quad \{U^\nu(X), U^\mu(Y)\} = g^{\nu\mu}(U) \delta'(X-Y) + b_\lambda^{\nu\mu}(U) U_X^\lambda \delta(X-Y) + \sum_{k \geq 0} e_k S_{(k)\lambda}^\nu(U) U_X^\lambda \nu(X-Y) S_{(k)\delta}^\mu(U) U_Y^\delta, \quad 1 \leq \nu, \mu, \lambda, \delta \leq N.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для любого гамильтонова оператора, записанного в форме (1), потоки $\varphi^i = S_{(k)}^i(\varphi, \varphi_x, \dots)$ коммутируют друг с другом и сохраняют гамильтонову структуру (1).*

Заметим здесь, что первое утверждение теоремы для нелокальных скобок Ферапонтова (2) было ранее доказано Е. В. Ферапонтовым из дифференциально-геометрических соображений (см. библиографию в [2]). В [2] может быть найдена также полная классификация скобок (2) с дифференциально-геометрической точки зрения.

Пусть теперь мы имеем локальную гамильтонову систему

$$(3) \quad \varphi_t^i = Q^i(\varphi, \varphi_x, \dots),$$

порожденную локальным функционалом $H = \int \mathcal{P}_H(\varphi, \varphi_x, \dots) dx$.

Метод Уизема ([3]) дает нам эволюционные уравнения на медленно промодулированные параметры m -фазных решений (3) в форме:

$$(4) \quad U_T^\nu = V_\mu^\nu(U) U_X^\mu, \quad \nu, \mu = 1, \dots, N,$$

где N – полное число параметров m -фазных решений исключая начальные фазы. При некоторых условиях “регулярности” (см. [4]) мы можем предложить процедуру усреднения скобки (1) и получения скобки Ферапонтова для системы Уизема (4).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть имеется скобка Пуассона (1) и система (3), порожденная локальным гамильтонианом H и обладающая N -параметрическим ($N \geq 2m$) полным семейством m -фазных решений, не считая m начальных фазовых сдвигов θ_0^α . Пусть система (3) имеет также N коммутативных локальных трансляционно-инвариантных интегралов*

$$I^\nu = \int \mathcal{P}^\nu(\varphi, \varphi_x, \dots) dx, \quad \{I^\nu, H\} = 0, \quad \{I^\nu, I^\mu\} = 0,$$

порождающих локальные потоки в силу скобки Пуассона (1) и таких, что усредненные плотности $\langle \mathcal{P}^\nu \rangle$ могут быть взяты за параметры U^ν на пространстве m -фазных решений (3).

Вычислим попарные скобки Пуассона $\mathcal{P}^\nu(\varphi, \varphi_x, \dots)$ в форме

$$\{\mathcal{P}^\nu(\varphi, \varphi_x, \dots), \mathcal{P}^\mu(\varphi, \varphi_y, \dots)\} = \sum_{k \geq 0} A_k^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots) \delta^{(k)}(x - y) + \sum_{k \geq 0} e_k(F_{(k)}^\nu(\varphi, \varphi_x, \dots))_x \nu(x - y) (F_{(k)}^\mu(\varphi, \varphi_y, \dots))_y$$

(обе суммы содержат конечное число членов). Мы имеем здесь полные производные функций $F_{(k)}^\nu$ и $F_{(k)}^\mu$ по x и y как следствие того, что функционалы I^ν и I^μ порождают локальные потоки в силу (1). Из коммутативности набора $\{I^\nu\}$ мы получаем также $A_0^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots) + \sum_{k \geq 0} e_k(F_{(k)}^\nu(\varphi, \varphi_x, \dots))_x F_{(k)}^\mu(\varphi, \varphi_x, \dots) \equiv \partial_x Q^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$ для некоторых функций $Q^{\nu\mu}(\varphi, \varphi_x, \dots)$.

Тогда для “медленных” координат $U^\nu(X) = \langle \mathcal{P}^\nu \rangle(X)$ мы можем определить скобку Пуассона согласно формуле:

$$(5) \quad \{U^\nu(X), U^\mu(Y)\} = \left[A_1^{\nu\mu}(X) + \sum_{k \geq 0} e_k(\langle F_{(k)}^\nu F_{(k)}^\mu \rangle - \langle F_{(k)}^\nu \rangle \langle F_{(k)}^\mu \rangle)(X) \right] \delta'(X - Y) + \left[\frac{\partial \langle Q^{\nu\mu} \rangle(X)}{\partial X} - \sum_{k \geq 0} e_k \frac{\partial \langle F_{(k)}^\nu \rangle(X)}{\partial X} \langle F_{(k)}^\mu \rangle(X) \right] \delta(X - Y) + \sum_{k \geq 0} e_k \frac{\partial \langle F_{(k)}^\nu \rangle(X)}{\partial X} \nu(X - Y) \frac{\partial \langle F_{(k)}^\mu \rangle(Y)}{\partial Y},$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение на пространстве m -фазных решений (3) и все усредненные величины являются функциями $U(X)$ и $U(Y)$ в соответствующих точках X и Y . Скобка (5) удовлетворяет тождеству Якоби и является инвариантной по отношению к выбору $\{I^1, \dots, I^N\}$, т.е. если $U^\nu = \langle \mathcal{P}^\nu \rangle$, $\tilde{U}^\nu = \langle \tilde{\mathcal{P}}^\nu \rangle$ и $\{U^\nu(X), U^\mu(Y)\}$, $\{\tilde{U}^\nu(X), \tilde{U}^\mu(Y)\}'$ – скобки (5), построенные при помощи наборов $\{I^\nu\}$ и $\{\tilde{I}^\nu\}$ соответственно, то:

$$\{\tilde{U}^\nu(X), \tilde{U}^\mu(Y)\}' \equiv \frac{\partial \tilde{U}^\nu}{\partial U^\lambda}(X) \{U^\lambda(X), U^\sigma(Y)\} \frac{\partial \tilde{U}^\mu}{\partial U^\sigma}(Y).$$

Отметим здесь, что предложенная процедура является обобщением метода Дубровина–Новикова ([5]–[7]), введенного для локальных теоретико-полевых скобок.

ТЕОРЕМА 3. Гамильтониан $\overline{H} = \int \langle \mathcal{P}_H \rangle(U(X)) dX$ порождает в силу (5) локальный поток, дающий уравнения Уизема для системы (3).

Подробное рассмотрение сформулированных результатов может быть найдено в [4].

Автор благодарен Б. А. Дубровину, С. П. Новикову, В. Л. Алексееву, О. И. Мохову, М. В. Павлову и Е. В. Ферапонтову за плодотворные обсуждения.

Автор также благодарит INTAS (грант № 96-0770) и РФФИ (грант № 97-01-00281) за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ferapontov E. V. // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1995. V. 170. P. 33–58. [2] Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. // УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 191–192. [3] Уизем Дж. Линеинные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. [4] Maltsev A. Ya. // solv-int/9910011. [5] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785. [6] Дубровин Б. А., Новиков С. П. // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98. [7] Dubrovin B. A., Novikov S. P. // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1993. V. 9. № 4. P. 1–136.