Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Ниукканен, Метод факторизации и особые преобразования функции Ап-
пеля F_4 и функций Горна H_1 и G_2 , *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:35:28

МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ И ОСОБЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ АППЕЛЯ F_4 И ФУНКЦИЙ ГОРНА H_1 И G_2

А. В. НИУККАНЕН

С помощью метода факторизации [1] показано, что для функций F_4 , H_1 и G_2 наряду с общими линейными преобразованиями [2], являющимися аналогами линейных преобразований функции Гаусса, имеют место специальные линейные преобразования, обусловленные не только типом этих рядов, но и особенностями их формальной структуры. Эти исключительные преобразования, не выполняющиеся ни для каких других рядов, имеют важное значение для теории функций F_4 , H_1 и G_2 .

1. Обозначения и формулы факторизации. Наряду с обычными “условными” обозначениями [3] применим для F_4 , H_1 и G_2 “инструктивные” обозначения [1], [2], позволяющие однозначно восстановить явный вид любого ряда:

$$\begin{aligned} (1) \quad F_4[a_1, a_2, b_1, b_2; z_1, z_2] &= F[a_1, a_2 // * : * // b_1; * // b_2; z_1, z_2] \\ &= \sum (a_1, i_1 + i_2)(a_2, i_1 + i_2)(b_1, i_1)^{-1}(b_2, i_2)^{-1} z_1^{i_1} z_2^{i_2} / i_1! i_2!, \\ (2) \quad H_1[\alpha, a, a_2, b_1; z_1, z_2] &= F[\langle \alpha | 1, \bar{1} \rangle, a // * : * // b_1; a_2 // *; z_1, z_2] \\ &= \sum (\alpha, i_1 - i_2)(a, i_1 + i_2)(b_1, i_1)^{-1}(a_2, i_2) z_1^{i_1} z_2^{i_2} / i_1! i_2!, \\ (3) \quad G_2[a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2; z_1, z_2] &= F[\langle \alpha_1 | \bar{1}, 1 \rangle, \langle \alpha_2 | 1, \bar{1} \rangle // * : a_1 // *; a_2 // *; z_1, z_2] \\ &= \sum (\alpha_1, -i_1 + i_2)(\alpha_2, i_1 - i_2)(a_1, i_1)(a_2, i_2) z_1^{i_1} z_2^{i_2} / i_1! i_2!, \end{aligned}$$

где $0 \leq i_1 < \infty, 0 \leq i_2 < \infty$, $(a, n) \equiv \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера. Гипергеометрические ряды (1)–(3) допускают факторизованные представления (см. [1], [4]):

$$\begin{aligned} (4) \quad F_4 &= U_1[a_1, b_1; d(s_2), d(s_1)] U_1[a_2, b_2; z_1 s_1, z_2 s_2] \Big|_{s_1=s_2=0}, \\ (5) \quad H_1 &= U_1[a, b_1; d(s_2), d(s_1)] U_2[\alpha, a_2; z_1 s_1, z_2 s_2] \Big|_{s_1=s_2=0}, \\ (6) \quad G_2 &= U_2[\alpha_1, a_1; d(s_2), d(s_1)] U_2[\alpha_2, a_2; z_1 s_1, z_2 s_2] \Big|_{s_1=s_2=0}, \end{aligned}$$

где $d(s) \equiv d/ds$, а U_1, U_2 – двойные ряды вида

$$\begin{aligned} (7) \quad U_1[a, b; x_1, x_2] &= F[a // * : * // *; * // b; x_1, x_2], \\ (8) \quad U_2[\alpha, a; x_1, x_2] &= F[\langle \alpha | 1, \bar{1} \rangle // * : * // *; a // *; x_1, x_2]. \end{aligned}$$

2. Трансформационные свойства функций U_1, U_2 . Каждая из функций U_1, U_2 имеет биномиальный тип (1//0) по первому переменному и куммеровский тип (1//1) – по второму. Специализация соответствующих общих преобразований [2] в биномиальном и куммеровском случаях приводит к двум парам формул:

$$\begin{aligned} (9) \quad U_1[a, b; x_1 + u, x_2] &= (1-u)^{-a} U_1[a, b; x_1/(1-u), x_2/(1-u)], \\ (10) \quad U_2[\alpha, a; x_1 + u, x_2] &= (1-u)^{-\alpha} U_2[\alpha, a; x_1/(1-u), x_2/(1-u)], \\ (11) \quad U_1[a, b; x_1, x_2] &= e^{x_2} F[\langle b-a | 1, \bar{1} \rangle // * : * // b; a, 1+a-b; -x_2, -x_1] \\ &= \exp(x_2) \bar{H}_{11}[b-a, a, 1+a-b, b; -x_2, -x_1], \\ (12) \quad U_2[\alpha, a; x_1, x_2] &= e^{-x_2} F[\langle \alpha | 1, \bar{1} \rangle, \langle 1-\alpha-a | \bar{1}, 1 \rangle : \alpha+a; *; -x_1, -x_2] \\ &= \exp(-x_2) \Gamma_1[\alpha+a, 1-\alpha-a, \alpha; -x_1, -x_2], \end{aligned}$$

где наряду с “инструктивными” обозначениями приведены также стандартные горновские обозначения рядов $\bar{H}_{11}$ и Γ_1 .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00317).

3. Специальные преобразования функций F_4 , H_1 и G_2 . Используя формулы (4)–(12), а также некоторые вспомогательные преобразования (см. далее п. 5), получаем специальные преобразования функций F_4 , H_1 и G_2 :

$$(13) \quad F_4[a_1, a_2, b_1, b_2; z_1/(1+z_1)(1+z_2), z_2/(1+z_1)(1+z_2)] \\ = (1+z_2)^{a_1} (1+z_1)^{a_2} F[\langle b_1 - a_1 | 1, \bar{1} \rangle, \langle b_2 - a_2 | \bar{1}, 1 \rangle : \mathbf{d}_1; \mathbf{d}_2; z_1, z_2],$$

где $\mathbf{d}_1 = [a_2, 1 + a_2 - b_2/b_1]$, $\mathbf{d}_2 = [a_1, 1 + a_1 - b_1/b_2]$;

$$(14) \quad H_1[\alpha, a, a_2, b_1; z_1/(1+z_1)(1+z_2), z_2(1+z_1)/(1+z_2)] \\ = (1+z_2)^a (1+z_1)^\alpha F[\langle \alpha, b_1 - a/\alpha + a_2 | 1, \bar{1} \rangle : \mathbf{d}'_1; \mathbf{d}'_2; -z_1, -z_2],$$

где $\mathbf{d}'_1 = [\alpha + a/b_1]$, $\mathbf{d}'_2 = [a, 1 + a - b_1/*]$;

$$(15) \quad G_2[a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2; z_1(1-z_2)/(1-z_1), z_2(1-z_1)/(1-z_2)] \\ = (1-z_2)^{\alpha_1} (1-z_1)^{\alpha_2} F[\langle \mathbf{d}_0 | 1, \bar{1} \rangle : \mathbf{d}''_1; \mathbf{d}''_2; z_1, z_2],$$

где $\mathbf{d}_0 = [\alpha_2, 1 - \alpha_1 - a_1/1 - \alpha_1, \alpha_2 + a_2]$, $\mathbf{d}''_1 = [\alpha_2 + a_2/*]$, $\mathbf{d}''_2 = [\alpha_1 + a_1/*]$. Эти преобразования составляют основной результат данной заметки.

4. Общий план доказательств формул (13)–(15). Поясним его на примере ряда F_4 . Введем Ω -произведение вида

$$(16) \quad Q_{11} = U_1[a_1, b_1; d(s_2)/(1+z_2), d(s_1)/(1+z_2)] U_1[a_2, b_2; z_1 s_1/(1+z_1), z_2 s_2/(1+z_1)]|_{s_1=s_2=0}.$$

В силу (4), (7) величина (16) выражается через F_4 (см. (13)). С другой стороны, применяя дважды формулу (9), имеем

$$(17) \quad Q_{11} = (1+z_2)^{a_1} (1+z_1)^{a_2} U_1[a_1, b_1; d(s_2) - z_2, d(s_1)] U_1[a_2, b_2; z_1 s_1 - z_1, z_2 s_2]|_{s_1=s_2=0}.$$

При условии $s_2 = 0$ оператор вида $\varphi[d(s_2) - z_2]$ эквивалентен $\varphi[d(s_2)] \exp(-z_2 s_2)$. Кроме того, $\psi(z_1 s_1 - z_1) = \exp[-d(s_1)] \psi(z_1 s_1)$. В результате (17) примет вид

$$(18) \quad Q_{11} = (1+z_2)^{a_1} (1+z_1)^{a_2} U_1[a_1, b_1; d(s_2), d(s_1)] \exp[-d(s_1)] \\ \times \exp(-z_2 s_2) U_1[a_2, b_2; z_1 s_1, z_2 s_2]|_{s_1=s_2=0}.$$

Величины вида $U_1(\cdot) \exp(\cdot)$, входящие в (18), выражаются через функции $\bar{N}_{11}$ с помощью (11). Применяя формулу факторизации, получаем преобразование (13). Два других преобразования доказываются аналогично.

5. Значение полученных результатов. Впервые показано, что три *полных* горновских ряда *второго* порядка выражаются в виде *полных* рядов *третьего* порядка. Примеры подобного рода ранее в литературе отсутствовали. Многие труднодоказуемые результаты классической теории горновских функций и некоторые новые важные формулы являются непосредственными следствиями преобразований (13)–(15). Ограничиваясь формулой (13), отметим, что в случае $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + 1$ ряд 2F в правой части (13) распадается в произведение двух функций Гаусса, что дает формулу Ватсона. В случае $b_2 = a_2$ из (13) следует формула Бейли, связывающая ряды F_4 и F_1 специального вида. Наиболее сложные разложения Берчелла–Чонди, содержащие функцию F_4 , также являются следствиями формулы (13). В одной из довоенных работ Бейли вплотную приблизился к преобразованию (13), однако неоправданное предубеждение против использования рядов с “индефинитными параметрами” типа $\langle \alpha | 1, \bar{1} \rangle$ помешало ему сформулировать это преобразование в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ниукканен А. В. // УМН. 1988. Т. 43. № 3. С. 191–192. [2] Ниукканен А. В. // Труды IX Международной конференции СМСР. Дубна, 1997. С. 219–223. [3] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. [4] Niukkanen A. W. // J. Phys. A: Math. and Gen. 1984. V. 17. P. L731–L736.

Институт геохимии и аналитической химии
им. В. И. Вернадского РАН
E-mail: elkor@geokhi.msk.su NIUKKANEN@tula.net

Принято редколлегией
02.10.1999