Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Пунинская, Гипотеза Вюота для модулей над наследственными нетеровыми первичными кольцами, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:48:14

ГИПОТЕЗА ВООТА ДЛЯ МОДУЛЕЙ НАД НАСЛЕДСТВЕННЫМИ НЁТЕРОВЫМИ ПЕРВИЧНЫМИ КОЛЬЦАМИ

В. А. ПУНИНСКАЯ

Эта статья является продолжением работы автора [1]. Полное доказательство результатов, сформулированных в ней, будет опубликовано в [2]. Гипотеза Вootа утверждает, что для любой счетной (полной) теории T первого порядка число неизоморфных счетных моделей T либо счетно, либо континуум. Гипотеза Вootа для ω -стабильных теорий модулей была доказана Каравалья [3; теорема 6]. *Полным n -типом* в теории T ($n < \omega$) называется совместное с T полное множество формул от n свободных переменных без параметров. Множество всех n -типов теории T обозначается $S_n(T)$. Все кольца, рассматриваемые в этой статье, предполагаются счетными. Модуль (над счетным кольцом R) называется *модулем с малым числом типов*, если для любого натурального n его (полная) теория $\text{Th}(M)$ имеет только счетное число n -типов.

Пусть M не является модулем с малым числом типов. Так как для любой счетной полной теории T либо $|S_n(T)| = \omega$, либо $|S_n(T)| = 2^\omega$ [4; теорема 6.3.4], то $\text{Th}(M)$ имеет континуум n -типов. Поскольку каждая счетная модель теории $\text{Th}(M)$ не может реализовать более чем счетное число n -типов, $\text{Th}(M)$ имеет 2^ω неизоморфных счетных моделей и гипотеза Вootа верна для $\text{Th}(M)$. Следовательно, в силу результата Каравалья гипотеза Вootа выполняется для произвольной полной теории модулей над любым кольцом, над которым каждый модуль с малым числом типов является ω -стабильным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть R – счетное простое полунаследственное справа нётерово справа кольцо, имеющее конечную левую размерность Голди. Тогда каждый правый R -модуль с малым числом типов ω -стабилен.*

Напомним, что кольцо R имеет *классическое правое кольцо частных*, если множество его регулярных элементов является правым множеством Ore.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть R имеет классическое правое кольцо частных $Q(R)$. Если гипотеза Вootа верна для произвольной полной теории модулей над $Q(R)$, то она верна для произвольной полной теории модулей без кручения над R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – правый модуль без кручения с малым числом типов. По [5; следствие 1.3] M делим. Тогда M становится правым модулем над $Q(R)$ при определенном действии последнего.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть R – счетное полупервичное правое кольцо Голди и M – правый R -модуль без кручения с малым числом типов. Тогда M является Σ -инъективным, следовательно, ω -стабильным модулем.*

Основным результатом этой статьи является

ТЕОРЕМА 4. *Каждый модуль с малым числом типов над счетным наследственным нётеровым первичным кольцом ω -стабилен.*

В [6; теорема 3.2] доказывается аналогичная теорема для счетных (некоммутативных) дедекиндовых первичных колец, т.е. таких наследственных нётеровых первичных колец, которые не содержат ненулевых собственных идемпотентных идеалов [7; 5.6.3]. Представлялось интересным убрать в этом результате ограничение на число ненулевых собственных идемпотентных идеалов, что и удалось сделать в предыдущей теореме. Из теоремы 4 немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. *Гипотеза Вootа верна для произвольной полной теории модулей над счетным наследственным нётеровым первичным кольцом.*

Автор пользуется случаем поблагодарить профессора А. В. Михалева за помощь и интерес к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прест М., Пунинская В. А. // УМН. 1999. Т. 54. №3. С. 149–150. [2] Puninskaya V. Modules with few types over a hereditary Noetherian prime ring // J. Symbolic Logic (to appear). [3] Garavaglia S. // J. Symbolic Logic. 1980. V. 45. P. 155–164. [4] Hodges W. Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. [5] Puninskaya V. Vaught's conjecture for modules over a serial ring // J. Symbolic Logic (to appear). [6] Puninskaya V. // Bull. London Math. Soc. 1999. V. 31. №2. P. 129–135. [7] McConnell J. C., Robson J. C. Noncommutative Noetherian Rings. New York: Wiley, 1987.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
02.10.1999