Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Вероятностные законы в распределении дробных частей значений многочленов и обоснование гипотезы квантового хаоса, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:22:27

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАКОНЫ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНОВ И ОБОСНОВАНИЕ ГИПОТЕЗЫ КВАНТОВОГО ХАОСА

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

Эта работа посвящена классической задаче о распределении дробных частей значений многочленов, которая, начиная с работ Харди, Литтлвуда и Г. Вейля [1], [2], привлекает к себе большое внимание. Данную работу стимулировали следующие два обстоятельства: 1) давно был проявлен интерес к доказательству центральной предельной теоремы для распределения дробных частей значений различных функций, и, в частности, она была доказана для показательных функций определенного вида [3], [4]; 2) исследование распределения расстояний между соседними дробными частями значений многочленов вызвано проблемой обоснования гипотезы квантового хаоса, сами эти расстояния соответствуют расстояниям между соседними энергетическими уровнями некоторых квантовых систем, а гипотеза состоит в том, что закон распределения этих расстояний в общем случае квазипуассоновский, т.е. имеет плотность $\rho(\sigma)$, близкую к $\rho(\sigma) = e^{-\sigma}$ [5]–[7].

Основные результаты работы – это усиленный закон больших чисел и центральная предельная теорема в распределении дробных частей от сумм значений бесконечного числа многочленов с попарно различными степенями (теорема 1), предельные законы распределения дробных частей и расстояний между ними для фиксированного многочлена (теорема 2) и обоснование сформулированной выше гипотезы (теорема 3 и ее следствие), причем в отличие от первых двух теорем приведено доказательство теоремы 3, которое есть следствие одной общей теоремы из работы [8].

В случае многочленов произвольных степеней, рассматриваемых в теореме 1, вероятностное пространство есть бесконечномерный тор $T = \{a = (a_0, a_1, \dots) : 0 \leq a_s < 1 \ (s = 0, 1, \dots)\}$, являющийся произведением счетного числа единичных окружностей $0 \leq a_s < 1 \ (s = 0, 1, \dots)$, вероятность P есть мера на T , являющаяся прямым произведением обычных длин на этих окружностях, а дробная часть $\{f_n(x)\}$ значения многочлена $f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ степени n в точке x есть случайная величина от случайно выбранной точки $a = (a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots) \in T$. То же самое касается дробной части $\{\sum_{\nu=s_1}^{s_2} f_n(\nu)\}$ от суммы значений многочлена $f_n(x)$ в последовательных точках ν , которая также является случайной величиной, зависящей от точки $a = (a_0, a_1, \dots) \in T$, на вероятностном пространстве (T, P) .

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим последовательность случайных величин $\zeta_k = \zeta_k(a)$ ($k = 1, 2, \dots$) на вероятностном пространстве (T, P) таких, что $\zeta_k(a) = \{\sum_{\nu=s_{1k}}^{s_{2k}} f_{n_k}(\nu)\}$ есть дробная часть суммы значений многочлена $f_{n_k}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n_k}x^{n_k}$ степени $n_k \geq 1$ в натуральных числах ν , расположенных на отрезке $s_{1k} \leq \nu \leq s_{2k}$. Предположим, что все числа n_k попарно различны между собой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. с вероятностью 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta_k = \frac{1}{2};$$

2. при $N \rightarrow \infty$ распределения вероятностей случайных величин

$$\kappa_N = \frac{1}{\sqrt{N/12}} \left(\sum_{k=1}^N \zeta_k - \frac{N}{2} \right)$$

слабо сходятся к гауссовскому нормальному распределению с плотностью

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что у многочлена $f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ степени $n \geq 1$ среди коэффициентов $a_1, \dots, a_n$ есть иррациональное число. Тогда справедливы равенства*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \{f_n(k)\} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\{f_n(k+1)\} - \{f_n(k)\}| = \frac{1}{3}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что у многочлена $f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ степени $n \geq 2$ среди коэффициентов $a_2, \dots, a_n$ есть иррациональное число; σ – произвольное число из интервала $0 < \sigma \leq 1$; N – натуральное число; $D_N(\sigma)$ – число чисел в ряду $k = 1, \dots, N$ таких, что $0 \leq \{f_n(k+1)\} - \{f_n(k)\} < \sigma$. Тогда*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} D_N(\sigma) = \sigma - \frac{\sigma^2}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим плоский двумерный тор $T_2 = \{x, y : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ и функцию $\chi(x, y)$ на нем, имеющую вид

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y - x < \sigma, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда имеем:

$$\frac{1}{N} D_N(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi(\{f(k)\}, \{f(k+1)\}),$$

и утверждение теоремы 3 сводится к доказательству того, что при $N \rightarrow \infty$ правая часть последнего равенства сходится к интегралу

$$\iint_{T_2} \chi(x, y) dx dy = \sigma - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Но этот факт следует из теоремы I, доказанной в §3 гл. II работы [8]. Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $D_N(\sigma)$ – величина, введенная в формулировке теоремы 3, то предельная функция распределения $P(\sigma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} D_N(\sigma)$ отличается от функции пуассоновского распределения, имеющего плотность $\rho(\sigma) = \exp(-\sigma)$, на величину третьего порядка малости по σ в области $0 \leq \sigma \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция пуассоновского распределения есть интеграл

$$\int_0^\sigma e^{-s} ds = 1 - e^{-\sigma} = \sigma - \frac{\sigma^2}{2} + O(\sigma^3),$$

и утверждение следствия вытекает из теоремы 3.

Выражаю глубокую благодарность F. Götze, заинтересовавшему меня указанными проблемами, Т.В. Локоть и Г.А. Маргулису за полезные обсуждения, а Sonderforschungsbereich 343 университета г. Билефельд – за поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hardy G. H., Littlewood J. E. // Proc. Internat. Congr. Math. Cambridge. 1912. P. 223–229. [2] Weyl H. // Math. Ann. 1916. V. 77. P. 313–352. [3] Кас М. // Ann. of Math. (2). 1946. V. 47. №1. P. 33–49. [4] Fortet R. // Studia Math. 1940. V. 1. P. 54–69. [5] Berry M. V., Tabor M. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1977. V. 356. P. 375–394. [6] Casati G., Chirikov B. V., Guarneri I. // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1350–1353. [7] Knauf A., Sinai Ya. G. Classical Nonintegrability, Quantum Chaos. Basel: Birkhäuser, 1997. (DMV Seminar. V. 27.) [8] Пустыльников Л. Д. // УМН. 1993. Т. 48. №4. С. 131–166.