Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Штогрин, Примитивные полициклы: критерий, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 6, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 06:02:55

ПРИМИТИВНЫЕ ПОЛИЦИКЛЫ: КРИТЕРИЙ

М. И. ШТОГРИН

В работе [1] для плоского¹ графа G определено понятие примитивного поли- r -цикла $\Pi(G)$ как всей конечной части плоской карты, удовлетворяющей трем условиям (1)–(3). Там же была доказана теорема 1: если граф G допускает реализацию полицикла $\Pi(G)$ как конечной части плоской карты с условиями (1)–(3), см. [1], то все такие реализации изоморфны.

Эту теорему естественно назвать теоремой *единственности*, так как любой планарный граф G с точностью до изоморфизма может допускать только одну реализацию соответствующего ему поли- r -цикла $\Pi(G)$. Более точно, реберный остов тетраэдра $K(3^3)$, куба $K(4^3)$, додекаэдра $K(5^3)$ имеет соответственно 4, 6, 12 разных реализаций, однако все они изоморфны. Устройство поли- r -цикла $\Pi(G)$ будем представлять посредством комбинаторно изоморфного ему абстрактного полиэдра $P(G)$, составленного из правильных евклидовых r -угольников. Тогда $\Pi(3^3) \sim P(3^3) = K(3^3) - f$, $\Pi(4^3) \sim P(4^3) = K(4^3) - f$, $\Pi(5^3) \sim P(5^3) = K(5^3) - f$, где через f обозначена грань многогранника. Из тетраэдра, куба, додекаэдра выброшена одна грань, все равно какая (так как иначе полиэдр был бы гомеоморфен сфере S^2 и не вкладывался бы в евклидову плоскость R^2). Именно по этой причине указанное выше число реализаций совпало с числом граней многогранника. У любого другого *допустимого* графа, отличного от реберного остова тетраэдра, куба и додекаэдра, реализация единственна.

Ниже для данного планарного графа G решается вопрос о *существовании* поли- r -цикла $\Pi(G)$, исходя из свойств самого графа G . А именно, имеет место следующий

КРИТЕРИЙ. *Отличный от реберного остова тетраэдра, куба, додекаэдра планарный граф G допускает на плоскости реализацию примитивного поли- r -цикла $\Pi(G)$ как всей конечной части плоской карты с условиями (1)–(3) из [1] тогда и только тогда, когда*

- каждое ребро принадлежит одному или двум простым циклам кратчайшей² длины r ;*
- те ребра, каждое из которых принадлежит одному r -циклу, составляют простую циклы;*
- пересечение любых двух r -циклов графа либо есть только одно ребро, либо пусто;*
- число всех вместе взятых вершин и r -циклов графа превышает число ребер ровно на 1.*

Каждое ребро из реберного остова тетраэдра, куба, додекаэдра принадлежит двум циклам длины 3, 4, 5 соответственно. Если на каждый r -цикл натянута грань, получится замкнутый многогранник, гомеоморфный сфере. После выбрасывания одной грани получится полиэдр с краем, изоморфный полициклу. Его край есть край выкинутой грани, т.е. r -цикл, $r = 3, 4, 5$.

В случае любого другого допустимого графа G в силу [1; следствие из основной леммы] любой r -цикл поли- r -цикла $\Pi(G)$ ограничивает лишь внутреннюю грань плоского графа G .

Необходимость. Рассмотрим полицикл, удовлетворяющий условиям (1)–(3). В силу условия (2) все грани поли- r -цикла $\Pi(G)$ (т.е. внутренние грани плоского графа G) суть диски, ограниченные простыми циклами длины r . Любое *внутреннее* ребро поли- r -цикла $\Pi(G)$ принадлежит двум граням, являясь их пересечением. Любое *граничное* ребро поли- r -цикла $\Pi(G)$ принадлежит только одной грани. А так как в поли- r -цикле $\Pi(G)$, отличном от $\Pi(3^3)$, $\Pi(4^3)$, $\Pi(5^3)$, любой r -цикл ограничивает грань (см. [1] и рассуждения выше), где $r = g(G)$, то выполнено условие (а). По той же причине условия (1) и (3) можно переформулировать в виде (b) и (c). Кроме того, для полицикла имеет место формула Эйлера $v - p + g = 1$, в которой не хватает всего лишь одной грани, которую следует натянуть на край поли- r -цикла $\Pi(G)$ для получения сферы. Поэтому выполнено и последнее условие (d).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00251).

¹Употребляемая здесь терминология из теории графов взята из книги [2].

²Кратчайший цикл в графе G называют обхватом графа и обозначают через $g(G)$; значит, $r = g(G)$.

Достаточность. Рассмотрим планарный граф, удовлетворяющий условиям (a)–(d). Натянем грани на все r -циклы, а также на тот простой цикл z , который составлен из всех ребер графа G , каждое из которых принадлежит лишь одному r -циклу, см. условие (b). В силу условия (a) степень вершины графа не меньше 2. В силу условия (c) в вершине графа сходится не более трех r -циклов. Три r -цикла составляют циклическую последовательность вокруг вершины. Если число r -циклов меньше трех, то они входят в одну циклическую последовательность вместе с циклом z из условия (b). Поэтому получается многообразие. Выкинем одну излишнюю грань, натянутую на цикл z . Тогда в силу (d) останется в точности диск, составленный из одних r -угольников, удовлетворяющий условиям (1)–(3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для реального получения поли- r -цикла из данного графа при выполнении условий критерия следует натянуть диски на все r -циклы графа. Полученный поли- r -цикл при желании можно вложить в плоскость, причем только единственным способом, см. [1].

ПРИМЕЧАНИЕ. Натянув грани на все r -циклы графа, получим абстрактный двумерный полиэдр, судя по свойствам которого всем выполняющимся условиям критерия можно придать следующую смысловую окраску: (a) – неразветвленность в ребрах, (b) – отсутствие дыр, (c) – клеточный комплекс с примитивными схождениями в вершинах, (d) – односвязность.

ПРИМЕР 1. Для простой цепи, состоящей из 3 ребер додекаэдра, возможно одно из двух: либо эта цепь не принадлежит одной грани додекаэдра, и тогда она является частью простого цикла, длина которого больше 6, так как сама эта цепь является единственной кратчайшей между своими концами, либо эта цепь принадлежит одной грани, и тогда она является частью кратчайшего простого цикла, длина которого равна 5, совпадающего с краем этой грани. Следовательно, любой кратчайший простой реберный цикл додекаэдра ограничивает грань. Это свойство по наследству сохраняет половина поверхности додекаэдра: *корзина* с дном и пятью боковыми гранями. Реберный остов корзины удовлетворяет условиям (a)–(d). Проекция корзины на плоскость дна представляет собою поли-5-цикл. Реберный остов корзины как планарный граф имеет шесть других укладок на плоскости, однако для них нарушено условие (2): среди внутренних граней кроме пяти 5-угольников имеется один 10-угольник. Из 7 различных укладок только одной соответствует полицикл. Это согласуется с теоремой единственности [1], которая не отрицает наличия других укладок планарного графа на плоскости, а лишь утверждает, что среди всех неизоморфных укладок может находиться только один поли- r -цикл. (Это своеобразный аналог известной теоремы [2; теорема 11.5].)

ПРИМЕР 2. Из трех правильных 8-угольников можно склеить правильную треугольную призму. Возьмем две такие призмы с одним общим 8-угольником, обладающие скрещивающимися перпендикулярными осями, расположив их по разные стороны от плоскости общего 8-угольника. Получим своеобразный граненый *перстень* – полиэдр, составленный из пяти правильных 8-угольников, обладающий зеркально-поворотной осью четвертого порядка.

Реберный остов этого полиэдра является планарным графом, который имеет восемь различных укладок на плоскости, в каждой укладке имеется по семь внутренних граней. Существует четыре изоморфные укладки с четырьмя 8-угольными и тремя 9-угольными гранями и четыре изоморфные укладки с тремя 8-угольными и четырьмя 9-угольными гранями. Ни одна укладка данного планарного графа на плоскости не удовлетворяет условию (2).

Рассматриваемый полиэдр состоит из пяти правильных 8-угольных граней, его реберный остов удовлетворяет условиям (a)–(c), но не удовлетворяет условию (d) предъявленного выше критерия. Учитывая примечание, данный полиэдр не является односвязным примитивным поли-8-циклом. Если угодно, его можно назвать неодносвязным примитивным поли-8-циклом. Этот полиэдр представляет собою сферу с одной дырой и одной ручкой, и наличие ручки служит реальной помехой для существования вложения этого полиэдра в плоскость $\mathbb{R}^2$. Поэтому не существует комбинаторного отображения рассматриваемого полиэдра в (8^3) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Деза М., Штогрин М. И. // УМН. 1999. Т. 54. №6. С. 159–160. [2] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.