Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Шварцман, Свободные G -пучки на замкнутых римановых поверхностях,
УМН, 1999, том 54, выпуск 6, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 08:29:04

СВОБОДНЫЕ G -ПУЧКИ НА ЗАМКНУТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

О. В. ШВАРЦМАН

1. Определения. Пусть X – замкнутая риманова поверхность, G – такая конечная группа ее автоморфизмов, что $X/G = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Рассмотрим одномерное комплексное G -расслоение L над X (в дальнейшем – обратимый G -пучок). G -пучок L назовем эффективным, если единичный элемент группы тождественно действует в пространстве расслоения L .

Через G_x обозначим стабилизатор точки $x \in X$. G_x – это циклическая группа порядка n_x . Существует такая окрестность U_x точки x , что действие образующей группы G_x в $L|_{U_x}$ имеет вид

$$(z_x, t) \mapsto (e^{2\pi\sqrt{-1}/n_x} z_x, e^{2\pi\sqrt{-1}r_x/n_x} t), \quad 0 \leq r_x < n_x,$$

где z_x – локальный параметр в точке x , $t \in \mathbb{C}$. Предположим, что $\text{НОД}(n_x, r_x) = 1$, если $r_x > 0$. Общий случай к этому легко сводится. Пару (n_x, r_x) назовем показателем точки x . Любые две точки, лежащие на одной орбите группы G в X , имеют одинаковый показатель, и для всех G -орбит, кроме конечного числа, он равен $(1, 0)$. Конечное число нетривиальных показателей $\{(n_1, r_1), \dots, (n_s, r_s)\}$, $n_i > 1$, назовем сигнатурой G -пучка L и обозначим через $\sigma(L)$.

Пусть L – обильный эффективный обратимый G -пучок на X . Рассмотрим градуированную алгебру $A(L) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(L^{\otimes n})$ голоморфных сечений, ассоциированную с пучком L , и ее градуированную подалгебру G -инвариантных сечений $A(L)^G$.

При каких условиях алгебра $A(L)^G$ свободна, т.е. изоморфна градуированной алгебре многочленов $\mathbb{C}[T_1, T_2]$? Ответ на этот вопрос будет дан в терминах степени $\deg L$ пучка L на X , порядка $|G|$ группы G и сигнатуры $\sigma(L^\vee) = \{(n_1, e_1), (n_2, e_2), \dots, (n_s, e_s)\}$ двойственного обратимого G -пучка $L^\vee$. Заметим, что сигнатура и отношение $\deg L/|G|$ определяют G -пучок L однозначно, с точностью до изоморфизма.

2. Формулировка результата.

ТЕОРЕМА. Алгебра $A(L)^G$ тогда и только тогда свободна, когда выполняется одно из трех (взаимоисключающих) условий:

- 1) $\sigma(L^\vee) = \{(n_1, 0), \dots, (n_s, 0)\}$ и $\deg L/|G| = 1$;
- 2) $\sigma(L^\vee) = \{(n_1, n_1 - 1), (n_2, 0), \dots, (n_s, 0)\}$ и $\deg L/|G| = \frac{1}{n_1}$;
- 3) $\sigma(L^\vee) = \{(n_1, e_1), (n_2, e_2), (n_3, 0), \dots, (n_s, 0)\}$,
 $\deg L/|G| = \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{1}{n_1 n_2} + \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2} = 1$.

В первом случае $A(L)^G = \mathbb{C}[T_1, T_2]$, $\deg T_1 = 1$, $\deg T_2 = 1$, а во втором и третьем – $\deg T_1 = n_1$, $\deg T_2 = 1$ и $\deg T_1 = n_1$, $\deg T_2 = n_2$ соответственно.

3. Набросок доказательства теоремы. Докажем необходимость условий теоремы. Достаточность следует из обратимости ключевых лемм. Напомним конструкцию Брискорна–Долгачева ([1]–[3]): вложение $X \hookrightarrow L^\vee$ в качестве нулевого сечения определяет вложение рациональной кривой $C = X/G$ в нормальную поверхность $Y = L^\vee/G$. Кривая C стягивается на поверхности Y в точку, рождая нормальную особенность (Y, y_0) Брискорна–Долгачева. Пусть I – множество тех индексов k , для которых $e_k > 0$ (можно считать, что $I = \{1, 2, \dots, t\}$, $t \leq s$). Граф Γ дивизора хорошего разрешения этой особенности имеет вид звезды

$$[n_1, e_1] \text{-----} \overset{-a}{\bullet} \text{-----} [n_t, e_t]$$

у которой центральная рациональная кривая имеет индекс самопересечения $-a$, $a = \deg L/|G| + \sum_{i=1}^t e_i/n_i$, а каждый луч $[n_i, e_i]$, $i = 1, \dots, t$, представляет из себя линейный граф

где a_k — это компоненты непрерывной дроби вида

$$n_i/e_i = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots}}, \quad a_i > 1, \quad [4], [2].$$

ЛЕММА 1. Алгебра $A(L)^G$ тогда и только тогда свободна, когда дивизор разрешения по Брискорну–Долгачеву стягивается в неособую точку.

Утверждение леммы — это прямое следствие определений и стандартных результатов из [1], [3], [4].

ЛЕММА 2. $|I| < 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $s \geq 3$. По условию точка (Y, y_0) неособа, в частности, ее локальная фундаментальная группа тривиальна. Но, как доказано в [5; теорема 2.2], для этого необходимо, чтобы группа G , действующая в $L^\vee - X$, порождалась отражениями или, что то же самое, группа G порождалась стабилизаторами G_x точек $x \in X$ с показателем $(n_x, 0)$, $n_x > 1$. Приведем эквивалентную формулировку этого условия в терминах плоской группы $\tilde{G}$ сигнатуры $(0; n_1, \dots, n_s)$ и такой ее нормальной подгруппы без кручения N , что $\tilde{G}/N = G$ [6]. Группу $\tilde{G}$ можно задать образующими $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ с соотношениями $\prod_{i=1}^s \gamma_i = 1$, $\gamma_j^{n_j} = 1$, $j = 1, \dots, s$, а условие состоит в том, что $\tilde{G}$ нормально порождается элементами $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_s$ (напомним, что $I = \{1, \dots, t\}$). Такое возможно, лишь если $|I| < 3$. В противном случае существует естественный гомоморфизм группы $\tilde{G}$ в нетривиальную плоскую группу $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_t | \gamma_1 \cdots \gamma_t = 1, \gamma_j^{n_j} = 1, j = 1, \dots, t \rangle$, ядро которого нормально порождено элементами $\gamma_{t+1}, \dots, \gamma_s$.

В силу леммы 2 граф Γ линейен, и остается воспользоваться следующим утверждением.

ЛЕММА 3. Дивизор хорошего разрешения по Брискорну–Долгачеву с линейным графом Γ тогда и только тогда стягивается в неособую точку, когда

- а) $a = 1$;
- б) определитель матрицы пересечений графа Γ равен по модулю единице.

Условия а) и б) леммы 3 эквивалентны диофантовым уравнениям 1), 2), 3) в формулировке теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Я благодарю профессора И. Бернштейна за интересные обсуждения, а университеты Тель-Авива и Бар-Илана за финансовую помощь и гостеприимство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долгачев И. В. // Функци. анализ и его прил. 1975. Т. 9. №2. С. 67–68. [2] Brieskorn E. // Invent. Math. 1968. V. 4. P. 336–358. [3] Pinkham H. // Math. Ann. 1977. V. 227. P. 183–193. [4] Долгачев И. В. // Функци. анализ и его прил. 1974. Т. 8. №2. С. 75–77. [5] Шварцман О. В. // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1991. С. 32–39. [6] Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.