Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Мальцев, Усреднение гамильтоновых структур в дискретном варианте метода Уизема, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 219–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm25>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:07:07

УСРЕДНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СТРУКТУР В ДИСКРЕТНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА УИЗЕМА

А. Я. МАЛЬЦЕВ

Данная работа посвящена построению процедуры усреднения гамильтоновых структур в дискретном варианте метода Уизема, являющейся аналогом процедуры Дубровина–Новикова для усреднения локальных теоретико-полевых скобок. Дискретным вариантом метода Уизема ([1], [2]) мы будем называть получение уравнений эволюции медленно промодулированных m -фазных решений нелинейных систем

$$(1) \quad \dot{\varphi}_n^i = f^i(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \varphi_{n+1}, \dots),$$

определенных на пространстве полей $\varphi = (\varphi_n^1, \dots, \varphi_n^p)$, где n принимает все целочисленные значения, функции f зависят от конечного числа аргументов.

Квазипериодическими m -фазными решениями системы (1) называются решения вида

$$(2) \quad \varphi_n^i(t) = \Phi^i(\mathbf{k}(\mathbf{U})n + \omega(\mathbf{U})t + \theta_0, \mathbf{U}),$$

где $\mathbf{k}(\mathbf{U})$ и $\omega(\mathbf{U})$ — m -мерные векторы, $\mathbf{U} = (U^1, \dots, U^N)$ — параметры решения, а 2π -периодические функции m переменных (θ) $\Phi^i(\theta, \mathbf{U})$ удовлетворяют условиям:

$$(3) \quad \omega^\alpha(\mathbf{U})\Phi_{\theta^\alpha}^i(\theta, \mathbf{U}) = f^i(\Phi(\theta, \mathbf{U}), \Phi(\theta - \mathbf{k}(\mathbf{U}), \mathbf{U}), \Phi(\theta + \mathbf{k}(\mathbf{U}), \mathbf{U}), \dots).$$

Пусть система (1) является гамильтоновой со скобкой Пуассона

$$(4) \quad \{\varphi_n^i, \varphi_k^j\} = \sum_m B_{(m)}^{ij}(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \varphi_{n+1}, \dots) \delta_{n,k-m},$$

где сумма содержит конечное число слагаемых (описание таких скобок см. в [3]), с гамильтонианом:

$$(5) \quad H[\varphi] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_H(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \varphi_{n+1}, \dots),$$

и имеет N инволютивных первых интегралов вида:

$$(6) \quad I^\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}^\nu(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \varphi_{n+1}, \dots), \quad \nu = 1, \dots, N,$$

$$(7) \quad \{I^\nu, I^\mu\} = 0, \quad \{I^\nu, H\} = 0$$

($B_{(m)}^{ij}$, $\mathcal{P}_H$ и $\mathcal{P}^\nu$ зависят от конечного числа аргументов).

В силу (1) при этом будет:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}^\nu(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots) = \sum_m [Q_{(m)}^\nu(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots) - Q_{(m)}^\nu(\varphi_{n-m}, \varphi_{n-m-1}, \dots)]$$

(сумма содержит конечное число слагаемых, $Q_{(m)}^\nu$ зависят от конечного числа аргументов). Систему Уизема, описывающую эволюцию медленно промодулированных параметров $\mathbf{U}$, можно записывать в виде

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial T} \langle \mathcal{P}^\nu \rangle(\mathbf{U}(X)) = \sum_m m \frac{\partial}{\partial X} \langle Q_{(m)}^\nu \rangle(\mathbf{U}(X)),$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение на семействе (2), определяемое формулой:

$$\langle F(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots) \rangle(\mathbf{U}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^m \int F(\Phi(\theta, \mathbf{U}), \Phi(\theta - \mathbf{k}(\mathbf{U}), \mathbf{U}), \dots) d^m \theta.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01623).

В силу (4) будем иметь:

$$(9) \quad \{\mathcal{P}^\nu(\varphi_n, \dots), \mathcal{P}^\mu(\varphi_k, \dots)\} = \sum_m A_{(m)}^{\nu\mu}(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots) \delta_{n,k-m},$$

причем, в силу (7),

$$\sum_m A_{(m)}^{\nu\mu}(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots) = \sum_l (Q_{(l)}^{\nu\mu}(\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots) - Q_{(l)}^{\nu\mu}(\varphi_{n-l}, \varphi_{n-l-1}, \dots))$$

(все суммы содержат конечное число слагаемых, $A_{(m)}^{\nu\mu}$ и $Q_{(l)}^{\nu\mu}$ зависят от конечного числа аргументов).

ТЕОРЕМА 1. Пусть (без нарушения общности) параметры $\mathbf{U}$ выбраны так, что $U^\nu = \langle \mathcal{P}^\nu \rangle$. Тогда:

- 1) система (8) является гамильтоновой относительно скобки Пуассона гидродинамического типа (см. [4]–[5]), задаваемой соотношениями

$$(10) \quad \{U^\nu(X), U^\mu(Y)\} = \sum_m m \langle A_{(m)}^{\nu\mu} \rangle(X) \delta'(X - Y) + \left[\frac{\partial}{\partial X} \sum_l l \langle Q_{(l)}^{\nu\mu} \rangle(X) \right] \delta(X - Y)$$

с гамильтонианом $H = \int \langle \mathcal{P}_H \rangle(X) dX$;

- 2) в силу (10) выполняются соотношения

$$(11) \quad \{k^\alpha(\mathbf{U}(X)), U^\nu(Y)\} = \omega^{\alpha(\nu)}(\mathbf{U}(X)) \delta'(X - Y) + \frac{\partial \omega^{\alpha(\nu)}(\mathbf{U}(X))}{\partial X} \delta(X - Y),$$

$$\{k^\alpha(\mathbf{U}(X)), k^\beta(\mathbf{U}(Y))\} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, N,$$

где $\omega^{(\nu)}(\mathbf{U})$ – частоты, аналогичные ω , соответствующие потокам, порожаемым интегралами I^ν на семействе решений (2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть у системы (1) имеется два несовпадающих набора интегралов вида (6), $\{I^1, \dots, I^N\}$ и $\{\bar{I}^1, \dots, \bar{I}^N\}$, обладающих всеми требуемыми свойствами. Тогда скобки (10), полученные с помощью этих наборов, совпадают, т.е. если на семействе (2) $U^\nu = I^\nu$, $\bar{U}^\nu = \bar{I}^\nu$, то скобка (10), полученная с помощью набора $\{I^1, \dots, I^N\}$, после замены параметров на семействе m -фазных решений вида $U^\nu = U^\nu(\bar{\mathbf{U}})$ переходит в скобку, полученную с помощью набора $\{\bar{I}^1, \dots, \bar{I}^N\}$.

Доказательство теорем 1 и 2 полностью совпадает с доказательством тех же теорем для усредненных методом Дубровина–Новикова теоретико-полевых скобок Пуассона (см. [6], [7]) и базируется на ограничении по Дираку скобки Пуассона

$$\{\varphi^i(\theta, X), \varphi^j(\theta', Y)\} = \sum_m B_{(m)}^{ij}(\varphi(X), \varphi(X - \varepsilon), \dots) \delta(X - Y + m\varepsilon) \delta(\theta - \theta')$$

на подмногообразии функций таких, что $\varphi(\theta, X)$ при любом X является функцией из (3) (при этом полагается $\delta(X - Y + m\varepsilon) = \delta(X - Y) + m\varepsilon \delta'(X - Y) + \dots$ при свертке с гладкими функциями). Необходимые условия регулярности этого подмногообразия, а также координаты, в которых производится ограничение, подробно описаны в [6].

В заключение автор благодарит С.П. Новикова и О.И. Мохова за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. [2] Luke J. C. // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1966. V. 292. №1430. P. 403–412. [3] Дубровин Б.А. // Функцион. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. №2. С. 57–59. [4] Дубровин Б.А., Новиков С.П. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. №4. С. 781–785. [5] Дубровин Б.А., Новиков С.П. // УМН. 1989. Т. 44. №6. С. 29–98. [6] Maltsev A. Ya. // solv-int/9611008 1996 (to appear). [7] Мальцев А.Я. // УМН. 1997. Т. 52. №2. С. 177–178.