Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, А. Дро, В. А. Калягин, Об асимптотике точных констант в неравенствах Маркова–Бернштейна в интегральных метриках с классическим весом, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:44:48

**ОБ АСИМПТОТИКЕ ТОЧНЫХ КОНСТАНТ
В НЕРАВЕНСТВАХ МАРКОВА–БЕРНШТЕЙНА
В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТРИКАХ С КЛАССИЧЕСКИМ ВЕСОМ**

А. И. АПТЕКАРЕВ, А. ДРО, В. А. КАЛЯГИН

Пусть X, Y банаховы пространства непрерывных функций действительного переменного, содержащие многочлены. Неравенство Маркова–Бернштейна имеет вид

$$(1) \quad \|P'\|_X \leq M_n \|P\|_Y, \quad \deg P \leq n.$$

Константа M_n называется наилучшей, если неравенство нельзя улучшить для всех многочленов степени не выше n . Для наилучшей константы имеем очевидно $M_n = M_n(X, Y) = \sup\{\|P'\|_X/\|P\|_Y, \deg P \leq n\}$. Классическими примерами являются неравенство Маркова для алгебраических многочленов в пространствах $X = Y = L^\infty[-1, 1]$ с наилучшей константой $M_n = n^2$ и неравенство Бернштейна для тригонометрических многочленов в пространствах $X = Y = L^\infty[-\pi, \pi]$ с наилучшей константой $M_n = n$ (см. [1]). Неравенства Маркова–Бернштейна известны для большого набора пространств X, Y . Проблема определения наилучшей константы является более сложной и результаты в этом направлении не столь многочисленны (см. энциклопедический обзор в [2]). В настоящей работе рассматриваются неравенства типа (1) для алгебраических многочленов в весовых функциональных пространствах $X = Y = L^2([a, b], w(x))$ с классическим весом $w(x)$. Известны результаты для весовых функций Эрмита, Лагерра и Лежандра [2]:

1. $w(x) = \exp(-x^2), x \in (-\infty, \infty), M_n = \sqrt{2n}$ (E. Schmidt, 1944);
2. $w(x) = \exp(-x), x \in [0, \infty), M_n = \frac{1}{2 \sin(\pi/(4n+2))}$ (P. Turan, 1960);
3. $w(x) = 1, x \in [-1, 1]$, наилучшая константа неизвестна, но известна ее асимптотика $M_n \sim (2n+3)^2/4\pi$ (E. Schmidt, 1944).

Основным результатом настоящей работы являются асимптотики наилучших констант в неравенстве Маркова–Бернштейна для случая обобщенного веса Лагерра $w(x) = x^\alpha \exp(-x), x \in [0, \infty), \alpha > -1$ и весов Гегенбауэра $w(x) = (1-x^2)^\gamma, x \in [-1, 1], \gamma > -1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = Y = L^2([a, b], w(x))$, тогда

1. Для $w(x) = x^\alpha \exp(-x), [a, b] = [0, \infty)$ наилучшая константа в неравенстве Маркова–Бернштейна (1) имеет асимптотику

$$M_n = \frac{n}{x_1} [1 + O(1)],$$

где x_1 – ближайший к началу координат ноль функции Бесселя $J_\beta(x)$, $\beta = (\alpha - 1)/2$.

2. Для $w(x) = (1-x^2)^\gamma, [a, b] = [-1, 1]$ наилучшая константа в неравенстве Маркова–Бернштейна (1) имеет асимптотику

$$M_n = \frac{n^2}{2x_1} [1 + O(1)],$$

где x_1 – ближайший к началу координат ноль функции Бесселя $J_\beta(x)$, $\beta = (\gamma - 1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В литературе известны два подхода к определению наилучшей константы в пространствах вида $L^2([a, b], w(x))$. Первый подход, развитый Миловановичем (см. [2]), состоит в приведении к диагональному виду матрицы оператора дифференцирования в базисе ортогональных с весом $w(x)$ многочленов. Наилучшая константа тогда связана с экстремальными собственными значениями этой матрицы. Другой подход предложен в работе [3], где рассматривается задача об определении наименьшего (отрицательного) значения константы λ при котором квадратичная форма

$$\langle p, q \rangle := \int p(x)q(x)w(x) dx + \lambda \int p'(x)q'(x)w(x) dx$$

остается положительно определенной в линейном пространстве многочленов степени n . Для случая пространств с классическими весами оба подхода приводят к исследованию экстремальных нулей последовательности многочленов определенной симметричным рекуррентным соотношением четного порядка (см. подробности в [2], [3]). В случае обобщенного веса Лагерра $w(x) = x^\alpha \exp(-x)$, например, соответствующая последовательность многочленов определяется равенствами:

$$(2) \quad Q_n(x) = \left(x - 2 - \frac{\alpha}{n}\right) Q_{n-1}(x) - \left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) Q_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

с начальными условиями $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x - \alpha - 1$. В этом случае для наилучшей константы имеет место равенство $M_n = 1/\sqrt{\mu_{1,n}}$, где $\mu_{1,n}$ – ближайший к началу координат ноль многочлена $Q_n(x)$. Для Якоби рекуррентное соотношение имеет порядок 4 (многочлен степени n выражается через 4 предыдущих многочлена). В случае веса Гегенбауэра каждый многочлен последовательности является произведением двух многочленов, для определения которых известны рекуррентные соотношения 2-го порядка. Явные формулы смотри в работе [3]. Задача об асимптотике наилучшей константы сводится, таким образом, к задаче об асимптотике экстремального нуля последовательности многочленов, определенных некоторым рекуррентным соотношением 2-го порядка. Общий результат в этом направлении получен в работе [4]. Для исследования асимптотики мы следуем, в основном, идее этой работы. Рассмотрим случай обобщенного веса Лагерра. Нас интересует поведение многочленов $Q_n(x)$, определенных равенствами (2) в окрестности точки $x = 0$. Выберем иную нормировку и перейдем к последовательности многочленов $q_n(x) = Q_n(x)/Q_n(0)$, $n \geq 0$. Для новой последовательности выполнено $q_n(0) = 1$ и многочлены связаны рекуррентным соотношением

$$(3) \quad xq_n(x) = a_nq_{n+1}(x) + b_nq_n(x) + c_nq_{n-1}(x),$$

где $a_n = Q_{n+1}(0)/Q_n(0)$, $b_n = 2 + \alpha/(n+1)$, $c_n = Q_{n-1}(0)/Q_n(0)(1 + \alpha/n)$. Прямые вычисления дают $Q_{n+1}(0)/Q_n(0) = -(1 + \alpha/(n+1))$. Используя этот факт преобразуем разностное уравнение (3) к виду

$$(4) \quad \frac{q_{n+1}^h - 2q_n^h + q_{n-1}^h}{h^2} + \frac{2\alpha}{z} \frac{q_{n+1}^h - q_{n-1}^h}{2h} + q_n^h = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

которое получается из (3) при $x = h^2$, $nh = z$, $q_n^h = q_n(h^2)$. Аккуратный переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) переводит разностное уравнение (4) в дифференциальное $y''(z) + (2\alpha/z)y'(z) + y(z) = 0$, решением которого (с начальным условием $y(0) = 1$) является функция $j_\beta(z) = 2^\beta \Gamma(\beta+1)z^{-\beta} J_\beta(z)$, где J_β стандартная функция Бесселя, $\beta = (\alpha-1)/2$. Отмеченный предельный переход дает также асимптотику $q_n(z^2/n^2) \sim j_\beta(z)$ равномерно по z на компактных множествах действительной оси. Отсюда следует асимптотика ближайшего к началу нуля $\mu_{1,n}$ многочлена $Q_n(x)$: $\mu_{1,n} \sim x_1^2/n^2$, где x_1 – ближайший к началу ноль функции Бесселя J_β , $\beta = (\alpha-1)/2$, что доказывает первую часть теоремы. В случае весов Гегенбауэра рассуждения аналогичны, но требуют более точных оценок при выполнении предельного перехода.

Работа первого автора частично поддержана грантом научных школ 96-15-96185 и грантом РФФИ 99-01-01149. Работа третьего автора частично поддержана грантом РФФИ 99-01-01251 и грантом МОПО (Новосибирск).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимаций. М.: Наука, 1972. [2] Milovanovic G. V., Mitrinovic D. S., Rassias Th. M. Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros: Word Scientific, 1994. [3] Draux A., Elhami Ch. // J. Comput. Appl. Math. 1999. V. 106. № 2. P. 203–243. [4] Аптекарев А. И. // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 5. С. 43–62.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН;
INSA de Rouen, France;
Нижегородский государственный технический университет
E-mail: aptekaa@rfbr.ru, draux@insa-rouen.fr kalia@waise.nntu.sci-nnov.ru

Принято редколлегией
22.12.1999