Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Фаткина, О представлении натурального числа суммой трех почти равных слагаемых, порожденных простыми числами, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 03:33:10

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА
СУММОЙ ТРЕХ ПОЧТИ РАВНЫХ СЛАГАЕМЫХ,
ПОРОЖДЕННЫХ ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ**

С. Ю. ФАТКИНА

В данной статье мы рассмотрим видоизмененную проблему Гольдбаха, а именно тернарную задачу для почти равных слагаемых, принадлежащих различным множествам. Основной результат сформулирован в теореме. Доказательство использует методы работы Г. И. Архипова, К. Буриева, В. Н. Чубарикова [1], а также оценки тригонометрических сумм с простыми числами в коротких интервалах из работы [2].

ТЕОРЕМА. Пусть N – достаточно большое натуральное число. Тогда для $U = N^{5/8} \log^c N$, где c – некоторая константа, диофантово уравнение

$$N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3],$$

$$\frac{N}{3} - U < p_i < \frac{N}{3} + U, \quad i = 1, 2, \quad \frac{N}{3} - U < [\sqrt{2}p_3] < \frac{N}{3} + U,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 . Более того, число решений этого уравнения представляется асимптотической формулой

$$T(N, U) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{U^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{U^2}{\log^4 N}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число решений запишем аналитической формулой

$$T(N, U) = \int_0^1 S_1^2(\alpha) S_2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = \int_{-\Delta}^{\Delta} + \int_{\Delta}^{1-\Delta} = I_1 + I_2, \quad \Delta = N^\varepsilon / U \quad (0 < \varepsilon < 1/40),$$

где

$$S_1(\alpha) = \sum_{\frac{N}{3}-U < p < \frac{N}{3}+U} e^{2\pi i \alpha p}, \quad S_2(\alpha) = \sum_{\frac{N}{3}-U < [\sqrt{2}p] < \frac{N}{3}+U} e^{2\pi i \alpha [\sqrt{2}p]}.$$

Сначала оценим сверху I_2 . Преобразуем $S_2(\alpha)$, воспользовавшись разложением в ряд Фурье $e^{-2\pi i \alpha \{x\}}$ (см. [3; с. 21, лемма 1]):

$$S_2(\alpha) = \frac{1 - e^{-2\pi i \alpha}}{2\pi i \log N} \sum_{|m| < M} \frac{1}{\alpha + m} \sum_{\frac{N}{3}-U < [\sqrt{2}p] < \frac{N}{3}+U} \Lambda(n) e^{2\pi i (\alpha+m)\sqrt{2}p} + O\left(\frac{U}{\sqrt{M}}\right),$$

$M = N^{1/8}$. При определенных α существуют оценки для сумм вида $\sum_{N-A < n < N} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$, $q \leq \tau$, $|\theta| < 1$, и пусть дано любое $B > 0$. Тогда существуют $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, такие, что при условиях

$$\tau = A^2 N^{-1} \log^{c_1} N, \quad q \geq \log^{c_2} N \quad \text{и} \quad N^{\frac{3}{5}} \log^{c_3} N \leq A \leq N$$

справедлива оценка $\sum_{N-A < n < N} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n} \ll A \log^{-B} N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [2; с. 260, теорема 2].

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$, $q \leq \tau$, $|\theta| < 1$, и пусть даны любые $B > 0$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$. Тогда существует $c_3 > 0$ такое, что при условиях

$$\tau = A^2 N^{-1} \log^{c_1} N, \quad q \leq \log^{c_2} N, \quad \frac{|\theta|}{q\tau} \geq \frac{\log^{B+1} N}{A} \quad \text{и} \quad N^{\frac{5}{8}} \log^{c_3} N \leq A \leq N$$

справедлива оценка $\sum_{N-A < n < N} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n} \ll A \log^{-B} N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [2; с. 260, теорема 3].

При α , принадлежащем интервалу $(1/\tau, 1 - 1/\tau)$, либо представление α в виде $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}$, либо представления чисел $\sqrt{2}(\alpha + m) = \frac{am}{qm} + \frac{\theta m}{qm\tau}$ ($|m| < M$) удовлетворяют требованиям леммы 1. Значения α , принадлежащие интервалам $(\Delta, 1/\tau)$ и $(1 - 1/\tau, 1 - \Delta)$, удовлетворяют условиям леммы 2. Следовательно, $F(\alpha) = \min(|S_1(\alpha)|, |S_2(\alpha)|) \ll U / \log^{B+1} N$ на интервале $(\Delta, 1 - \Delta)$. Итак, при $B = 3$ справедлива оценка

$$|I_2| \leq \max_{\Delta \leq \alpha \leq 1-\Delta} F(\alpha) \left(\frac{3}{2} \int_0^1 |S_1^2(\alpha)| d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^1 |S_2^2(\alpha)| d\alpha \right) \ll \frac{U^2}{\log^4 N}.$$

Преобразуем $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$ при $|\alpha| < \Delta$, используя представление функции Чебышёва $\psi(x)$ в виде суммы по нулям дзета-функции Римана, мнимая часть которых ограничена $T = N^{0.4}$ (см. [4; с. 264, теорема 4.5]), и заменим в интеграле I_1 суммы $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$ на $S_3(\alpha)$ и $S_4(\alpha)$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2} \log^3 N} \int_0^1 S_3^2(\alpha) S_4(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha + O\left(\frac{U^2}{\log^4 N}\right) + R,$$

$$S_i(\alpha) = \sum_{\frac{N}{3}-U < n < \frac{N}{3}+U} e^{2\pi i \alpha n} - \sum_{|\rho| < T} \sum_{\frac{N}{3}-U < n < \frac{N}{3}+U} c_i n^{\rho-1} e^{2\pi i \alpha n}, \quad c_3 = n, \quad c_4 = \frac{n}{\sqrt{2}}$$

(см. [1; с. 39, 42]).

Нам потребуется следующая оценка.

ЛЕММА 3. $\sum_{|\rho| < T} y^\delta \ll y e^{-c(\log y)^{0.2}}$ при $T \leq y^{0.4}$ (δ – действительная часть ρ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [5; с. 210, лемма 11.20].

Из леммы следует, что $\max_{\Delta < \alpha < 1-\Delta} |S_4(\alpha)| \ll U e^{-c \log^{0.2} N}$, а $R \ll \frac{U^2}{\log^4 N}$.

И, наконец, $\int_0^1 S_3^2(\alpha) S_4(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha = 3U^2(1 + O(e^{-c \log^{0.2} N}))$.

Учитывая оценки I_1 и I_2 , получаем асимптотическую формулу

$$T(N, U) = \frac{3U^2}{\sqrt{2} \log^3 N} + O\left(\frac{U^2}{\log^4 N}\right).$$

Доказательство теоремы завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н. // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 28–57. [2] Zhan Tao // Acta Math. Sinica (N.S.). 1991. V. 7. № 3. P. 259–272. [3] Попов О. В. Арифметические приложения оценок сумм Г. Вейля от многочленов растущей степени // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1995. [4] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. [5] Pan Chengdong, Pan Chengbiao. On the Goldbach Conjecture. Beijing: Science Press, 1981.

Принято редколлегией
22.12.1999