Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Гапеев, Байесовские задачи последовательного различения гипотез для непрерывных случайных процессов, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 04:18:47

БАЙЕСОВСКИЕ ЗАДАЧИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАЗЛИЧЕНИЯ ГИПОТЕЗ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

П. В. ГАПЕЕВ

В монографии [1] рассматривается задача последовательного различения двух простых гипотез о среднем значении для винеровского процесса. В данной работе мы рассматриваем указанную задачу для процессов диффузионного типа и фрактального броуновского движения.

Пусть на некотором полном стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P_\pi)$ задана $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина θ , принимающая два значения, $P_\pi[\theta = 1] = \pi$, $P_\pi[\theta = 0] = 1 - \pi$, $\pi \in [0, 1]$; и существуют меры P_0 и P_1 , локально эквивалентные на фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, сингулярные на $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$, такие, что исходная мера P_π имеет структуру $P_\pi = \pi P_1 + (1 - \pi)P_0$.

Предположим, что наблюдается непрерывно поступающий процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$, который в зависимости от значения θ имеет распределения $P_i[X \in A] = P_\pi[X \in A | \theta = i]$, $i = 0, 1$; $A \in \mathcal{F}^X = \sigma\{X_t, t \geq 0\}$. Будем предполагать, что относительно меры P_π случайная величина θ является взаимно независимой с процессами, имеющими распределения $P_i[X \in A]$, $i = 0, 1$; $A \in \mathcal{F}^X$. Тогда для распределения процесса X относительно меры P_π имеет место разложение $P_\pi[X \in A] = \pi P_\pi[X \in A | \theta = 1] + (1 - \pi)P_\pi[X \in A | \theta = 0]$, $A \in \mathcal{F}^X$, где π и $(1 - \pi)$ являются априорными вероятностями простых статистических гипотез $H_0: \theta = 0$ и $H_1: \theta = 1$.

Наша задача заключается в том, чтобы на основе наблюдений над процессом $X = (X_t)_{t \geq 0}$ последовательно определить, какая из гипотез H_0 или H_1 выполнена.

Введем понятие решающего правила $\delta = (\tau, d)$, где $\tau = \tau(\omega)$ является моментом остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \in [0, t]\}$, $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, а $d = d(\omega)$ есть $\mathcal{F}_\tau^X$ -измеримая случайная величина, принимающая два значения 0 и 1. Выбор момента остановки $\tau = \tau(\omega)$ означает выбор правила прекращения наблюдений над процессом X , а функция терминального решения $d = d(\omega)$ (или решающая функция) показывает, какую из гипотез в момент τ нам следует принять. Будем следовать следующему правилу: если $d(\omega) = 1$, то принимаем гипотезу H_1 , если $d(\omega) = 0$, то утверждаем, что верна гипотеза H_0 .

С каждым решающим правилом $\delta = (\tau, d)$ можно естественным образом связать потери двух типов: потери, связанные со стоимостью наблюдений, и потери, связанные с неправильным выбором заключительного решения. Средние потери первого типа будем характеризовать величиной $K(\tau)$, где функция $K(t)$, $t \geq 0$, имеет вид

$$K(t) = c_1 \pi E_1 \log[d(P_1 | \mathcal{F}_t^X)/d(P_0 | \mathcal{F}_t^X)] + c_0(1 - \pi)E_0 \log[d(P_0 | \mathcal{F}_t^X)/d(P_1 | \mathcal{F}_t^X)],$$

где математические ожидания являются информационными количествами Кульбака–Лейблера, связанными с мерами P_0 и P_1 , случайная величина τ означает продолжительность наблюдений и c_0 и c_1 являются заданными положительными постоянными, выражающими платы за единицу наблюдений в случае выполнения гипотез H_0 и H_1 соответственно. В качестве средних потерь второго типа возьмем величину $aP_\pi[d = 0, \theta = 1] + bP_\pi[d = 1, \theta = 0]$, где $a, b > 0$ – некоторые заранее выбранные константы, означающие платы за неправильный выбор решения. Тогда общие средние потери от принятия решающего правила $\delta = (\tau, d)$ задаются равенством $L_\pi(\tau, d) = K(\tau) + E_\pi[aI(d = 0, \theta = 1) + bI(d = 1, \theta = 0)]$.

Решение байесовской задачи последовательного различения гипотез состоит в нахождении функции байесовского риска $\rho(\pi) = \inf_{(\tau, d)} L_\pi(\tau, d)$, $\pi \in [0, 1]$, и оптимального π -байесовского решающего правила $\delta^* = \delta_\pi^* = (\tau^*, d^*)$, при котором этот инфимум достигается. (Подобную вариационную постановку см. в [2], [3] и [4].) Поставленная задача сводится к задаче об оптимальной остановке процесса апостериорной вероятности $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$, $\pi_t = P_\pi[\theta = 1 | \mathcal{F}_t^X]$, $\pi_0 = \pi$.

ЛЕММА 1. Функция байесовского риска $\rho(\pi)$, $\pi \in [0, 1]$ имеет представление

$$\rho(\pi) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}} E_\pi[k_\tau + g_{a,b}(\pi_\tau)] = E_\pi[k_\tau^* + g_{a,b}(\pi_{\tau^*})],$$

где $g_{a,b}(\pi) = \max\{a\pi, b(1 - \pi)\}$, $\mathcal{M} = \{\tau \geq 0 : E_\pi k_\tau < \infty\}$, $k_t = c_0 k_t^0 + c_1 k_t^1$, где $k^0 = k^0(P_0, P_1)$ и $k^1 = k^1(P_1, P_0)$ являются процессами Кульбака мер P_0 и P_1 и функция

терминального решения $d^* = 1$ при $\pi_{\tau^*} \geq b/(a+b)$ и $d^* = 0$ при $\pi_{\tau^*} < b/(a+b)$. (Процесс Кульбака $k(P, Q)$ мер P и Q определяется как возрастающий процесс из разложения Дуба–Мейера относительно меры P для процесса $\log[d(P | \mathcal{F}_t^X)/d(Q | \mathcal{F}_t^X)]$.)

Предположим, что наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ согласован с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ и относительно исходной меры P_π допускает представление

$$X_t = X_0 + \int_0^t [\theta a_1(s, X) + (1 - \theta) a_0(s, X)] ds + \int_0^t b(s, X) dB_s,$$

где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение, функционалы $a_i(t, x)$, $i = 0, 1$ и $b(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ являются неупреждающими и выполняется $P_\pi[\int_0^t |a_i(s, X)| ds < \infty] = 1$, $i = 0, 1$; $P_\pi[\int_0^t b^2(s, X) ds < \infty] = 1$, $P_\pi[(a_1(t, X) - a_0(t, X))/b(t, X)]^2 > 0] = 1$, $t \geq 0$.

ЛЕММА 2. Предположим, что неупреждающие функционалы $a_i(t, x)$, $i = 0, 1$ и $b(t, x)$, $x \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ удовлетворяют условию Липшица ([2; (4.110)]) и условию линейного роста ([2; (4.111)]). Тогда процесс апостериорной вероятности π имеет дифференциал $d\pi_t = \pi_t(1 - \pi_t)[(a_1(t, X) - a_0(t, X))/b(t, X)] d\hat{B}_t$, где процесс $\hat{B} = (\hat{B}_t, \mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ является обновляющим броуновским движением: $\mathcal{F}_t^{\hat{B}} \equiv \mathcal{F}_t^X$, $t \geq 0$, и существует неупреждающий процесс $\hat{q} = (\hat{q}(t, \hat{B}))_{t \geq 0}$, $\hat{q}(t, \hat{B}) = [(a_1(t, X) - a_0(t, X))/b(t, X)]$. Для процесса $k = (k_t)_{t \geq 0}$ имеет место выражение $k_t = c \int_0^t \hat{q}^2(s, \hat{B}) ds$, $c = (c_0 + c_1)/2$.

Рассмотрим процесс $M = (M_t)_{t \geq 0}$, $M_t = \int_0^t \hat{q}(s, \hat{B}) d\hat{B}_s$ и замену времени $u(t, \hat{B}) = \langle M \rangle_t$. В условиях данной задачи процесс M является непрерывным локальным мартингалом и указанная замена времени является непрерывной, строго возрастающей и имеет обратную замену $v(s, \hat{B}) = \inf\{t \geq 0 : u(t, \hat{B}) > s\}$ такую, что $v(u(t, \hat{B}), \hat{B}) = t$ и, следовательно, существует неупреждающий функционал $\check{q}(s, x) = \hat{q}(v(s, x), x)$, $s \geq 0$, $x \in C([0, \infty), \mathbb{R})$.

ЛЕММА 3. Предположим, что для функционала $\check{q}^{-1}(s, x) = 1/\check{q}(s, x)$ выполняются условие Липшица ([2; (4.110)]) и условие линейного роста ([2; (4.111)]). Тогда процесс M является обновляющим локальным мартингалом: $\mathcal{F}_t^M \equiv \mathcal{F}_t^{\hat{B}} \equiv \mathcal{F}_t^X$, $t \geq 0$.

С помощью замены времени $u(t, \hat{B}) = \langle M \rangle_t$ в процессе $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ данная задача сводится к задаче последовательного различения гипотез для винеровского процесса (см. [1; IV, п. 2]).

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что выполнены все условия предыдущих лемм. Тогда функция байесовского риска $\rho(\pi)$, $\pi \in [0, 1]$, имеет единственное представление

$$\rho(\pi) = aA_* + (\pi - A_*)[a - c\psi(A_*)] + c[\Psi(\pi) - \Psi(A_*)], \quad c = (c_0 + c_1)/2,$$

$\Psi(\pi) = (1 - 2\pi) \log \frac{\pi}{1-\pi}$, $\psi(\pi) = \Psi'(\pi) = (\frac{1-\pi}{\pi} - \frac{\pi}{1-\pi}) + 2 \log \frac{1-\pi}{\pi}$, π -байесовское решающее правило $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ существует и имеет вид: $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : \pi_t \notin (A_*, B_*)\}$; $d^* = 1$ при $\pi_{\tau^*} = B_*$, $d^* = 0$ при $\pi_{\tau^*} = A_*$; и границы A_* и B_* однозначно определяются из следующей системы:
$$\begin{cases} b + a = c[\psi(A_*) - \psi(B_*)], \\ b(1 - B_*) = aA_* + (B_* - A_*)[a - c\psi(A_*)] + c[\Psi(B_*) - \Psi(A_*)]. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае, если наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ имеет представление $X_t = \theta t + B_t^H$, где $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ – фрактальное броуновское движение с показателем автономности Харста $H \in (0, 1)$, утверждение теоремы 4 остается справедливым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976. [2] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистка случайных процессов. М.: Наука, 1974. [3] Koell C. // Sequential Anal. 1994. V. 13. №3. P. 221–236. [4] Galtchouk L. I. Optimality of the Wald SPRT for processes with continuous time parameter // Submitted in Annals of Statistics.