Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Измestьев, Многообразия, определяемые простыми многогранниками, как конфигурационные пространства шарнирных механизмов, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 11:17:29

МНОГООБРАЗИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ПРОСТЫМИ МНОГОГРАННИКАМИ, КАК КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

И. В. ИЗМЕСТЬЕВ

В настоящей заметке строится шарнирный механизм, конфигурационное пространство которого эквивариантно гомеоморфно объединению нескольких экземпляров многообразия $\mathcal{Z}_P$, сопоставляемого всякому простому выпуклому многограннику P (см. [1] и [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть P – простой выпуклый многогранник размерности n с m гипергранями, G – одна из групп $\mathbb{Z}_2$ или S^1 . Пусть также фиксирована биекция между гипергранями многогранника P и слагаемыми разложения $G^m = G \oplus G \oplus \dots \oplus G$. Любой точке $p \in P$ соответствует подгруппа $H(p) \subset G^m$, порожденная группами всех тех гиперграней, которые содержат точку p . Тогда многообразие $\mathcal{Z}_P$ задается формулой $\mathcal{Z}_P \approx G^m \times P / \sim$, где $(g, p) \sim (h, q) \Leftrightarrow p = q$ и $gh^{-1} \in H(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ([3], см. также [4]–[6]). Шарнирным механизмом в $\mathbb{R}^n$ называется четверка $\mathcal{L} = (L, \ell, V, \mu)$, включающая (1) конечный граф L с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$; (2) отображение $\ell: \mathcal{E} \rightarrow (0, +\infty)$, сопоставляющее каждому ребру графа L положительное число, называемое его длиной; (3) подмножество $V \subset \mathcal{V}$ в множестве вершин графа L , элементы которого называются закрепленными вершинами; (4) отображение $\mu: V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Шарнирный механизм в $\mathbb{R}^2$ называют плоским шарнирным механизмом.

Конфигурационное пространство $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ шарнирного механизма $\mathcal{L}$ – это множество отображений $\phi: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (так называемых реализаций механизма) со следующими свойствами: (1) $\phi|_V = \mu$; (2) $|\phi(v) - \phi(w)| = \ell(v, w)$ для любого ребра $(v, w) \in \mathcal{E}$. Полуконфигурационное пространство $\mathcal{SC}(\mathcal{L}, \mathcal{W})$ состоит из сужений всех реализаций на некоторое подмножество $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.

Мы проведем рассуждение в случае $G = \mathbb{Z}_2$, для $G = S^1$ см. замечание 3 в конце статьи. Идея, позволяющая ввести на конфигурационном пространстве шарнирного механизма действие группы $\mathbb{Z}_2^m$, состоит в следующем. Пусть v – вершина графа L , имеющая степень 2. Тогда в любой реализации ϕ механизма $\mathcal{L}$ образ вершины v можно отразить симметрично относительно прямой, проходящей через образы смежных с ней вершин v' и v'' , снова получив реализацию механизма. Если дан набор $\{v_i\}_1^m$ попарно несмежных вершин степени 2, то инволюции, заданные этими вершинами, перестановочны и определяют действие $\mathbb{Z}_2^m$ на $\mathcal{C}$. Пространство орбит этого действия гомеоморфно полуконфигурационному пространству $\mathcal{S} = \mathcal{SC}(\mathcal{L}, \mathcal{W})$, где $\mathcal{W} = \mathcal{V} \setminus \{v_i\}_1^m$. При этом $\mathcal{C} \approx \mathbb{Z}_2^m \times \mathcal{S} / \sim$, где $(g, \phi|_{\mathcal{W}}) \sim (h, \psi|_{\mathcal{W}}) \Leftrightarrow \phi|_{\mathcal{W}} = \psi|_{\mathcal{W}}$ и $gh^{-1} \in H(\phi)$, $H(\phi)$ – группа инволюций, отвечающих тем из вершин v_i , для которых $|\phi(v'_i) - \phi(v''_i)| = \ell(v_i, v'_i) + \ell(v_i, v''_i)$. Сравнивая с формулой из определения 1, видим, что гомеоморфизм $\mathcal{C} \approx \mathcal{Z}_P$ обеспечивается гомеоморфизмом $\mathcal{S} \approx P$, сохраняющим соответствующие стационарные подгруппы: если $\phi|_{\mathcal{W}} \mapsto p$, то $H(\phi) = H(p)$.

Здесь мы построим шарнирный механизм, конфигурационное пространство которого состоит из нескольких копий многообразия $\mathcal{Z}_P$. Мы следуем по пути, проложенному Кингом [3]–[5].

ТЕОРЕМА. Для любого простого выпуклого многогранника P существует плоский шарнирный механизм $\mathcal{L}$, конфигурационное пространство которого эквивариантно гомеоморфно несвязному объединению нескольких экземпляров многообразия $\mathcal{Z}_P$. Действие группы $\mathbb{Z}_2^m$ на пространстве $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ осуществляется по описанному выше образцу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем для начала n подвижных вершин $w_i, i = 1, \dots, n$, каждая из которых соединена ребром длины R с закрепленной вершиной, имеющей координаты $(0, R)$, где R – достаточно большое число. Координаты точки w_i вблизи нуля записываются как $(x_i, O(1/R))$ (символ отображения ϕ мы опускаем и под координатами точки w_i понимаем координаты ее образа).

Важным элементом нашей конструкции будет пантограф (см. рис.), позволяющий производить деление отрезка в данном отношении. Если выполнены равенства $\vec{ad}/\vec{de} = \vec{ef}/\vec{fb} = \lambda$,

$dc = ef$, $cf = de$, то имеем при любом положении точек a и b $\vec{ac}/\vec{cb} = \lambda$. Вершины a и b будем называть исходными, вершину c – функциональной, λ – параметром пантиграфа. Вершина d закреплена во внутренней точке ребра ae при помощи ребер da и de с суммарной длиной равной длине ae . Так же мы поступаем в других подобных случаях. Нетрудно, используя $n-1$ пантиграф, вычислить значение любой линейной функции Λ от переменных x_i , удовлетворяющей условию $\Lambda(1, \dots, 1) = 1$. Для этого нужно точки w_1 и w_2 сделать исходными вершинами первого пантиграфа и для каждого следующего пантиграфа помещать одну из его исходных вершин в функциональную вершину предыдущего, а другую – в очередную из w_i . Функциональная вершина t последнего пантиграфа будет иметь координаты $(\Lambda(x), O(1/R))$.

Рассмотрим теперь систему линейных неравенств, задающую многогранник P . Линейной заменой координат в $\mathbb{R}^n$ и умножением данных неравенств на константы приведем ее к виду $\Lambda_i(x) \geq -r_i$ ($\leq r_i$), $i = 1, \dots, m$, где $\Lambda_i(1, \dots, 1) = 1$, $r_i > 0$. Построим для каждого i вершину t_i , $i = 1, \dots, m$, вычисляющую функционал Λ_i , и присоединим к ней ребром длины $(R + r_i)/2$ вершину v_i , которую, в свою очередь, соединим ребром той же длины с вершиной, закрепленной в одной из точек $(\pm R, 0)$ – в зависимости от знака соответствующего неравенства. При любой реализации механизма расстояние между вершинами $(\pm R, 0)$ и t_i не превосходит $R + r_i$, и это условие после несложных преобразований можно записать в виде $\Lambda_i(x) \geq -r_i + O(1/R^3)$ ($\leq r_i + O(1/R^3)$) при достаточно большом R . Кроме того, при большом R эти неравенства являются единственными ограничениями на x -координаты точек w_i , естественно интерпретируемые как координаты в полуконфигурационном пространстве $\mathcal{SC}(\mathcal{L}, \{w_i\})$, которое, таким образом, оказывается гомеоморфно многограннику P с сохранением стационарных подгрупп (ввиду простоты P добавочные члены $O(1/R^3)$ при большом R не изменяют гранной структуры). Вследствие этого полуконфигурационное пространство $\mathcal{SC}(\mathcal{L}, \{w_i\} \cup \{v_i\})$ эквивариантно гомеоморфно многообразию $\mathcal{Z}_P$. Все конфигурационное пространство $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ будет набором нескольких копий $\mathcal{Z}_P$ ввиду наличия у каждого пантиграфа симметрии, сохраняющей исходные и функциональную вершины. Доказательство окончено.

Замечания. 1) Шарнирный механизм позволяет получить эквивариантное вложение многообразия $\mathcal{Z}_P$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+m}$ с ортогональным действием группы $\mathbb{Z}_2^m$. Координаты точки, соответствующей данной реализации, это $\{x_i\}_1^n$ и ориентированные площади треугольников с вершинами $(\pm R, 0)$, v_i , t_i (которые меняют свой знак под действием элементов группы $\mathbb{Z}_2^m$). 2) Построенный механизм содержит $O(nm)$ ребер и вершин. Это количество можно уменьшить до $O(n \ln m)$, если соединять пантиграфы не последовательно, а в виде двоичного дерева. 3) Для случая действия тора $(S^1)^m$ аналогичный шарнирный механизм строится в $\mathbb{R}^3$: заметим, что в трехмерной реализации на вершину степени 2 действует окружность точно так же, как в плоской реализации действовала группа $\mathbb{Z}_2$.

Автор выражает благодарность профессору В. М. Бухштаберу и профессору А. Б. Сосинскому за стимулирующие обсуждения и любезно предоставленный материал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Davis M. W., Januszkiewicz T. // Duke Math. J. 1991. V. 62. №2. P. 417–451.
- [2] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Тр. МИАН. 1999. Т. 225. С. 96–131. [3] King H. C. Semicontfiguration spaces of planar linkages // Preprint, math.GT/9810130. [4] King H. C. Planar linkages and algebraic sets // Preprint, math.AG/9807023. [5] King H. C. Configuration spaces of linkages in $\mathbb{R}^n$ // Preprint, math.GT/9811138. [6] Звонкин Д. // Russian J. Math. Phys. 1996. Т. 5. №2. С. 247–266.