Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Кордонский, Стабильная рациональность группы Spin_{10} , *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:38:19

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

СТАБИЛЬНАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ ГРУППЫ Spin_{10}

В. Э. Кордонский

Доказательство стабильной рациональности групп Spin_n было предложено в работе [1], но оно содержало ошибку, так как опиралось на неверно доказанную лемму 3.1 той же работы.¹ Поэтому стабильная рациональность групп Spin_7 и Spin_{10} впервые доказывается в настоящей работе.

Все необходимые факты и определения можно найти в [2]–[4].

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Многообразие X называется *рациональным* (соответственно *стабильно рациональным*), если многообразие X (соответственно $X \times \mathbb{C}^n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$) бирационально изоморфно $\mathbb{C}^m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$.

Действие алгебраической группы G называется *рациональным* (соответственно *стабильно рациональным*), если рациональный фактор X/G является рациональным (соответственно стабильно рациональным) многообразием.

Группа G называется *рациональной* (соответственно *стабильно рациональной*), если любое локально свободное линейное представление $G : V$ рационально (соответственно стабильно рационально).

Отметим, что если существует стабильно рациональное локально свободное линейное представление алгебраической группы G , то любое локально свободное линейное представление группы G стабильно рационально [5].

Пусть $G : V$ — произвольное линейное действие. Обозначим через G_* стабилизатор общего положения действия $G : V$, а через $N = N_G(G_*) \subset G$ нормализатор группы G_* . Как было показано в [1], стабильная рациональность группы G равносильна стабильной рациональности группы N .

ТЕОРЕМА 1. *Группа Spin_7 стабильно рациональна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см., например, [2] и [6]), что группа Spin_7 имеет неприводимое восьмимерное представление $\mathrm{Spin}_7 : V$. Нам достаточно показать, что нормализатор N стабилизатора общего положения действия $\mathrm{Spin}_7 : V$ стабильно рационален.

Покажем, что группа N равна $G_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Работа проведена при содействии гранта INTAS-OPEN-97-1570.

¹ Доказательство этой леммы основано на существовании на многообразии $\mathbb{P}^{2^n-1}$ рациональной функции y (в обозначениях [1]) со специальными свойствами. В действительности можно показать, что такой функции не существует.

Как известно (см., например, [2] и [6]), стабилизатор общего положения действия $\mathrm{Spin}_7 : V$ равен G_2 . Прямое вычисление показывает, что $N = N_{\mathrm{Spin}_7}(G_2) = G_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Группа $G_2 \times \mathbb{Z}_2$ стабильно рациональна (см. [1], [5]). Значит, и группа Spin_7 также стабильно рациональна.

Для доказательства стабильной рациональности группы Spin_{10} нам потребуется следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Стабильная рациональность связной группы G равносильна стабильной рациональности ее максимальной полупростой подгруппы H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как стабильная рациональность связной группы равносильна стабильной рациональности ее подгруппы Леви [1], можно считать, что группа G редуктивна.

Рассмотрим произвольное локально свободное линейное действие $G : V$. Легко видеть, что многообразие V/G является (рациональным) фактором для действия $(G/H) : (V/H)$. Так как G/H является тором, то по теореме Гильберта 90 (см., например, [3]) V/H и $(G/H) \times (V/G)$ бирационально изоморфны. Но многообразие G/H является рациональным многообразием (как и любая алгебраическая группа), значит, стабильная рациональность многообразия V/H равносильна стабильной рациональности многообразия V/G .

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Группа Spin_{10} стабильно рациональна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см., например, [2] и [6]), что группа Spin_{10} имеет неприводимое шестнадцатимерное представление $\mathrm{Spin}_{10} : V$. Обозначим нормализатор стабилизатора общего положения действия $\mathrm{Spin}_{10} : V$ через N .

Стабильная рациональность группы Spin_{10} равносильна стабильной рациональности группы N . С другой стороны, группа N связна и максимальная полупростая подгруппа группы N равна Spin_7 (см., например, [6]). Из теоремы 2 следует, что стабильная рациональность группы N равносильна стабильной рациональности группы Spin_7 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Богомолов Ф. А. // Матем. сб. 1986. Т. 130. №1. С. 3–17.
- [2] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
- [3] Винберг Э. Б., Попов В. Л. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.
- [4] Popov V. L. // Proceedings of the Sophus Lie Memorial Conference, Oslo, 1992: Scandinavian Univ. Press, 1994. P. 315–361.
- [5] Богомолов Ф. А., Кацыло П. И. // Матем. сб. 1985. Т. 126. №4. С. 584–589.
- [6] Элашвили А. Г. // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6. №1. С. 51–62.

Московский центр непрерывного
математического образования

Принято редколлегией
22.12.1999