Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, Об одной теореме Пуанкаре, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 223–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:50:46

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПУАНКАРЕ

Н. Г. Мошевитин

1. Рассматривается компактное многообразие M , $\dim M = d$ (или просто ограниченная область в $\mathbb{R}^d$) и преобразование $g: M \rightarrow M$, сохраняющее объем. Хорошо известно, что почти всякая траектория $g^t x$ возвращается, т.е. имеет место соотношение

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T > 0 \quad \exists t > T: \rho(g^t x, x) < \varepsilon.$$

(Здесь и далее $\rho(\cdot, \cdot)$ означает некоторое расстояние на M .) Этот простой результат называется *теоремой Пуанкаре о возвращаемости* (см. [1]). В настоящей заметке дается несложный (основывающийся только на лемме Бореля–Кантелли) количественный вариант этой теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть положительнозначная функция $\psi(t)$ вещественного аргумента сколь угодно медленно возрастает к $+\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и $\psi(t)/t^{1/d}$ монотонно убывает к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Тогда для почти каждого (в смысле меры Лебега) $x \in M$ найдется последовательность $t_\nu \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\rho(g^{t_\nu} x, x) < t_\nu^{-1/d} \psi(t_\nu).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известная теорема из теории алгебраических чисел (см. [2]) утверждает, что для чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, $d \geq 1$, образующих вместе с единицей базис некоторого вещественного алгебраического поля степени $d+1$, выполнено

$$\max_{1 \leq j \leq d} \min_{a_j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j t - a_j| \geq C(\alpha) t^{-1/d} \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, приведен пример сохраняющего объем сдвига g на торе $\mathbb{T}^d$, для которого

$$\rho(g^t x, x) > C t^{-1/d} \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{T}^d,$$

и показатель $-1/d$ при степени t в нашей теореме неумлучшаем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, имеет место неравенство

$$\sup_{x \in M} \min_{0 \leq t < \tau \leq T} \rho(g^\tau x, g^t x) < C(M) T^{-1/d}$$

с некоторой постоянной $C(M)$, зависящей только от M , причем $\sup$ и $\min$ в этой формуле, вообще говоря, переставить нельзя.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть на компактном многообразии M , $\dim M = d$, имеется векторное поле v , $\operatorname{div} v \equiv 0$, g^t – фазовый поток поля v . Пусть функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию нашей теоремы. Тогда для почти каждого (в смысле меры Лебега) $x \in M$ найдется последовательность $t_\nu \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\rho(g^{t_\nu} x, x) < t_\nu^{-1/d} \psi(t_\nu).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-00378 и № 96-15-96072).

2. Доказательство теоремы. Пусть $\sigma \subset M$ – множество тех точек из M , для которых утверждение теоремы не выполнено:

$$\sigma = \left\{ x \in M : \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0, k \in \mathbb{N} \min_{k_0 \leq q \leq k, q \in \mathbb{N}} \rho(g^q x, x) \geq k^{-1/d} \psi(k) \right\}.$$

Пусть

$$\sigma_{k_0, k} = \left\{ x \in M : \min_{k_0 \leq q \leq k, q \in \mathbb{N}} \rho(g^q x, x) \geq k^{-1/d} \psi(k) \right\}.$$

Ясно, что все $\sigma_{k_0, k}$ измеримы,

$$(1) \quad \sigma_{k_0, k} \subseteq \sigma_{k'_0, k} \text{ при } k'_0 \geq k_0,$$

$$(2) \quad \sigma = \bigcup_{k_0=0}^{+\infty} \bigcap_{k=k_0}^{+\infty} \sigma_{k_0, k}.$$

Пусть $\mathcal{A}_k = \{A\}$ – некоторое разбиение M на квадратируемые кусочки A , удовлетворяющее свойствам

$$(3) \quad k^{-1/d} \psi(k) \ll \text{diam } A \leq k^{-1/d} \psi(k), \quad \mu(A) \asymp k^{-1} (\psi(k))^d, \\ \# \mathcal{A}_k \ll k (\psi(k))^{-d}.$$

Обозначим $U_k(x) = \{y \in M : \rho(x, y) < k^{-1/d} \psi(k)\}$. Ясно, что для $x \in A$ выполнено $A \subseteq U_k(x)$. Рассмотрим множество $\sigma_{k_0, k}(A) = \sigma_{k_0, k} \cap A$ и оценим его меру. Множества

$$g^0 \sigma_{k_0, k}(A), g^{k_0} \sigma_{k_0, k}(A), \dots, g^{[k/k_0]k_0} \sigma_{k_0, k}(A)$$

попарно не пересекаются (это следует из определения $\sigma_{k_0, k}(A)$), а g^t сохраняет объем (как отмечалось в начале заметки). Из ограниченности M следует, что $\mu(\sigma_{k_0, k}(A)) \ll k^{-1} k_0$. Далее,

$$(4) \quad \mu(\sigma_{k_0, k}) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}_k} \mu(\sigma_{k_0, k}(A)) \ll \# \mathcal{A}_k k^{-1} k_0 \ll k_0 (\psi(k))^{-d}$$

(в последнем неравенстве учтено (3)).

Выберем теперь возрастающие к бесконечности последовательности натуральных чисел $\mu_\nu, \lambda_\nu \rightarrow +\infty, \nu \rightarrow +\infty$ так, чтобы ряд

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \mu_\nu (\psi(\lambda_\nu))^{-d}$$

сходил. Из (1), (2) следует, что

$$\sigma \subseteq \bigcup_{p=w}^{+\infty} \sigma_{\mu_p, \lambda_p} \quad \forall w \in \mathbb{N}.$$

Поскольку ряд $\sum_{\nu=0}^{+\infty} \mu(\sigma_{\mu_\nu, \lambda_\nu})$ сходится в силу оценки (4) и выбора последовательностей μ_ν, λ_ν , получаем, что $\mu(\sigma) = 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. [2] Касселс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений: М., 1961.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.12.1997