Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, О спектральных свойствах неразложимой неотрицательной матрицы и ее главных подматриц копорядка один, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:53:56

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕРАЗЛОЖИМОЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ И ЕЕ ГЛАВНЫХ ПОДМАТРИЦ КОПОРЯДКА ОДИН

С. В. САВЧЕНКО

Пусть λ – собственное значение подматрицы $A - v$, полученной из конечной матрицы A с элементами $A(w, w')$ вычеркиванием v -столбца и v -строки. Упорядочим по убыванию порядки соответствующих ему жордановых клеток: $n_1 = \dots = n_d > n_{d+1} \geq \dots \geq n_k$. Пусть $\hat{\xi}_p$, $p = 1, \dots, d$, – векторы, порождающие жордановы цепочки максимального порядка, и ξ_p , $p = 1, \dots, d$, – соответствующие им собственные векторы: $(A - v - \lambda E)^{n_p-1} \hat{\xi}_p = \xi_p$, где E – единичная матрица. Пусть η_p , $p = 1, \dots, d$, – собственные векторы транспонированной к $A - v$ матрицы, принадлежащие жордановым цепочкам максимального порядка, отвечающим собственному значению λ . Определим однозначно по $\hat{\xi}_p$ векторы η_p (возможность такого выбора см. в п. 5 [1]) условием $(\hat{\xi}_{p'}, \eta_p) = \delta_{p'p}$, где $\delta_{p'p}$ – символ Кронекера и $(\xi, \eta) = \sum_w \xi(w) \eta(w)$. Обозначим через ξ_v и η_v векторы с координатами $\xi_v(w) = A(v, w)$ и $\eta_v(w) = A(w, v)$ (здесь $w \neq v$).

ТЕОРЕМА 1. *Множество порядков жордановых клеток, соответствующих точке λ как собственному значению матрицы A , совпадает с совокупностью чисел $\{n_2, \dots, n_k\}$, если и только если*

$$(1) \quad \sum_{p=1}^d (\xi_v, \xi_p)(\eta_v, \eta_p) \neq 0.$$

Переход от $A - v$ к A , при котором у фиксированного собственного значения λ “пропадает” одна максимальная жорданова клетка, а порядки остальных не меняются, по понятным причинам, мы будем называть *типичным* для λ . Можно показать, что типичный переход одновременно является и *максимально возможным*: больше чем на n_1 и 1 соответственно алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения λ уменьшиться не могут.

Обозначим через $\lambda(A)$ собственное значение неотрицательной матрицы A (так в дальнейшем мы будем называть матрицу с неотрицательными элементами), совпадающее с ее спектральным радиусом (см. главу XIII [2]). Определим граф $G(A)$ матрицы A по следующему правилу: из w в w' выходит ребро тогда и только тогда, когда $A(w, w') \neq 0$. Если граф $G(A)$ является связным, то матрица A называется *неразложимой*.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A – конечная неразложимая неотрицательная матрица. Тогда при любом v переход от $A - v$ к A является типичным для $\lambda = \lambda(A - v)$.*

Индекс v называется *минимальным*, если $\lambda(A - v) = \min_w \lambda(A - w)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть A – конечная неразложимая неотрицательная матрица. Тогда если индекс v не является минимальным, то алгебраическая кратность собственного значения $\lambda(A - v)$ матрицы $A - v$ равна единице. В случае минимального индекса v число k жордановых клеток, соответствующих собственному значению $\lambda(A - v)$ матрицы $A - v$, также не зависит от конкретного выбора v . Для любых двух минимальных индексов упорядоченные по убыванию порядки n_i жордановых клеток совпадают при $i = 2, \dots, k$. Что касается порядков n_1 максимальных жордановых клеток, то они могут отличаться друг от друга не более чем на единицу.*

В силу теорем 2 и 3 только для минимального индекса v число $\lambda(A - v)$ может быть собственным значением матрицы A (то, что во всем интервале $(\lambda(A - v), \lambda(A))$ нет точек спектра матрицы A с положительными элементами, было известно еще Фробениусу; общий случай см. в [3]). Теорема 2 позволяет сформулировать следующий критерий: точка $\lambda(A - v)$ принадлежит спектру неразложимой неотрицательной матрицы A , если и только если в графе $G(A - v)$ отсутствует путь, проходящий через все его подграфы $G((A - v)_i)$, где $(A - v)_i$ – неразложимые подматрицы

матрицы $A - v$, для которых $\lambda((A - v)_i) = \lambda(A - v)$ (по теореме 6.3 [4] существование такого пути равносильно наличию всего одной жордановой клетки).

Для бесконечной неотрицательной матрицы A число $\lambda(A)$ определим как супремум спектральных радиусов ее конечных подматриц. В дальнейшем мы будем рассматривать только устойчиво положительно-рекуррентные матрицы, т.е. неразложимые неотрицательные матрицы A , у которых диагональный элемент матричнозначной функции $(E - zA)^{-1}$ имеет полюс в точке $z = \lambda(A)^{-1}$ (см. [5]). В условии следующей теоремы предполагается, что матрица $A - v$ получена из A заменой нулями элементов v -столбца и v -строки.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой устойчиво положительно-рекуррентной матрицы A найдется такая положительная мера μ на множестве ее индексов, что при любом v , за исключением, быть может, элементов некоторого конечного множества, действие матрицы $A - v$ (как и матрицы A) на пространстве $\ell_1(\mu)$ порождает квазикompактный оператор. Его спектральный радиус совпадает с $\lambda(A - v)$, и в этой точке он имеет простое собственное значение, т.е. изолированное собственное значение алгебраической кратности единица (это утверждение с заменой $\lambda(A - v)$ на $\lambda(A)$ верно и для A , причем интервал $[\lambda(A - v), \lambda(A)]$ не принадлежит спектру A).*

Если неотрицательная матрица A симметрична и $\lambda(A) < \infty$, то она определяет на пространстве ℓ_2 ограниченный самосопряженный оператор, максимальная точка спектра которого совпадает с $\lambda(A)$. В этом случае условие устойчивой положительной рекуррентности эквивалентно изолированности точки $\lambda(A)$ от остальной части спектра (ее кратность как собственного значения равна единице и координаты соответствующего собственного вектора положительны). Для произвольной эрмитовой матрицы A , порождающей ограниченный самосопряженный оператор (его мы также обозначим через A), число $\lambda(A)$ определим как максимальную точку спектра этого оператора. Очевидно, понятие минимального индекса здесь также имеет смысл. При помощи принципа минимакса (см. [6]) легко показать, что если $\lambda(A)$ – простое собственное значение и все координаты собственного вектора отличны от нуля, то множество минимальных индексов матрицы A конечно, и для любого ее неминимального индекса v точка $\lambda(A - v)$ не принадлежит спектру оператора A и, следовательно, является простым собственным значением $A - v$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть A – симметрическая устойчиво положительно-рекуррентная матрица и v – ее минимальный индекс. Тогда кратность k собственного значения $\lambda(A - v)$ при переходе от $A - v$ к A уменьшается на единицу (если $k = 0$, то $\lambda(A - v)$ – точка непрерывного спектра обоих операторов). В случае, когда $k \geq 2$, минимальный индекс единствен.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Келдыш М. В. // УМН. 1971. Т. 26. №4. С. 15–41. [2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. [3] Friedland S., Nabben R. // Linear Algebra Appl. 1997. V. 255. P. 303–313. [4] Schneider H. // Linear Algebra Appl. 1986. V. 84. P. 161–189. [5] Гуревич Б. М., Савченко С. В. // УМН. 1998. Т. 53. №2. С. 3–106. [6] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. IV. М.: Мир, 1982.