Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Тертычный, Об асимптотических свойствах решений уравнения $\dot{\phi} + \sin \phi = f$ при периодическом f , *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:22:33

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\dot{\phi} + \sin \phi = f$ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ f

С. И. ТЕРТЫЧНЫЙ

Несмотря на внешнюю простоту уравнения

$$(1) \quad \frac{d}{d\tau} \phi(\tau) + \sin \phi(\tau) = f(\tau),$$

имеющего важные приложения в физике (см., например, [1; уравнение (2.2)], [2; уравнения (3.27) (4.7)], [3; уравнение (4.4)]), в квадратурах его решения выразить удастся лишь в некоторых специальных случаях, например, когда f есть постоянная величина. Тем не менее, это нелинейное уравнение оказывается связанным с некоторым явно вычисляемым линейным оператором, что позволяет в случае, когда функция f периодична, эффективно описать асимптотические свойства его решений. С этой целью определим на решениях уравнения (1) операторы $P[\phi]$, $Q[\phi]$ формулами

$$P[\phi](\tau) = \int_0^\tau \cos \phi \, d\tau \text{ и } Q[\phi](\tau) = \int_0^\tau e^{-P[\phi]} \sin \phi \, d\tau. \text{ Справедлива}$$

ЛЕММА. Пусть $\phi_0 = \phi_0(\tau)$ есть некоторое решение уравнения (1) и $P_0 = P[\phi_0](\tau)$, $Q_0 = Q[\phi_0](\tau)$. Тогда любое решение $\phi_1 = \phi_1(\tau)$ уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$(2) \quad e^{i\phi_1} = e^{i\phi_0} \frac{a + b\overline{\mathcal{F}_0}}{a + b\mathcal{F}_0},$$

где константы a, b (зависящие от ϕ_0, ϕ_1) можно интерпретировать как однородные координаты некоторой точки $p \sim \{a, b\}$ проективной прямой $\mathbb{R}P^1$. Наоборот, для любой точки $p \sim \{a, b\} \in \mathbb{R}P^1$ непрерывная функция $\phi_1(\tau)$, определяемая (с точностью до слагаемого, кратного 2π) уравнением (2), представляет собой решение уравнения (1). Кроме того, функция $\mathcal{F}_1(\tau)$, связанная с ϕ_1 так же, как $\mathcal{F}_0(\tau)$ связано с ϕ_0 , удовлетворяет совместно с $\mathcal{F}_0$ алгебраическому соотношению

$$(3) \quad \mathcal{F}_1 = \frac{a\mathcal{F}_0 - b}{b + a\mathcal{F}_0}.$$

Пусть теперь ϕ_0 есть решение уравнения (1) при периодическом f , удовлетворяющее начальному условию $\phi_0(0) = 0$. Выбрав произвольно другое решение ϕ уравнения (1), применим сформулированное предложение к последовательности функций $\phi_{(j)}(\tau) = \phi(\tau + jT)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, заданных на общем интервале $[0, T]$ длиной в период функции f и, очевидно, также удовлетворяющих уравнению (1). Последовательность функций $\{\phi_{(j)}\}$ определяет последовательность точек $\{p_j\} \subset \mathbb{R}P^1$, причем $(a_{j+1}, b_{j+1})^T = \Phi \cdot (a_j, b_j)^T$, где матрица

$$(4) \quad \Phi = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}P_0(T)} \cos \frac{1}{2}\phi_0(T) - Q_0(T)e^{\frac{1}{2}P_0(T)} \sin \frac{1}{2}\phi_0(T) & -e^{\frac{1}{2}P_0(T)} \sin \frac{1}{2}\phi_0(T) \\ e^{-\frac{1}{2}P_0(T)} \sin \frac{1}{2}\phi_0(T) + Q_0(T)e^{\frac{1}{2}P_0(T)} \cos \frac{1}{2}\phi_0(T) & +e^{\frac{1}{2}P_0(T)} \cos \frac{1}{2}\phi_0(T) \end{pmatrix}.$$

Можно сказать, что каждый “шаг эволюции” решения ϕ на период T эквивалентен преобразованию $p_j \mapsto p_{j+1}$ и описывается линейным оператором Φ . Соответственно эволюция на интервале в j периодов описывается оператором Φ^j и потому также может быть вычислена в явном виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть асимптотической квазипериодичностью решений уравнения (1) выполнение асимптотического равенства $\phi(\delta\tau + (j+1)T) - \phi(\delta\tau + jT) = 2\pi n + O(e^{-\varkappa j})$ $\forall \delta\tau \in [0, T]$ при $j \rightarrow \infty$ (здесь $\varkappa$ есть положительная вещественная, а n целочисленная константы, зависящие лишь от f).

Легко видеть, что условие асимптотической квазипериодичности эквивалентно существованию предела последовательности $\{p_j\}$. Соответствующий критерий может быть сформулирован следующим образом. Рассмотрим выражение

$$(5) \quad \mathcal{I} = 4|(\mathcal{F}(T) + i)e^{i\phi(0)} - \mathcal{F}(T) + i|^{-2} [-Q(T)(e^{-P(T)} + 1) \sin(\phi(T) - \phi(0)) - \frac{1}{2}(-Q^2(T) + (e^{-P(T)} + 1)^2)(1 - \cos(\phi(T) - \phi(0))) + (1 - e^{-P(T)})^2].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\mathcal{J}$ не зависит от выбора решения $\phi(\tau)$ уравнения (1) и, следовательно, представляет собой функционал от функции f .

КРИТЕРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТИ. Если $\mathcal{J}[f] > 0$, все решения уравнения (1) обладают свойством асимптотической квазипериодичности, при $\mathcal{J}[f] < 0$, асимптотической квазипериодичности нет.

Более точно, при $\mathcal{J} > 0$, существует два квазипериодических (удовлетворяющих уравнению $\phi(\tau + T) = \phi(\tau) + 2\pi n \quad \forall \tau$) решения, одно из которых устойчиво, а другое неустойчиво. При $\mathcal{J} < 0$ эволюция $\phi(\tau)$ на целое число периодов функции f сводится либо к последовательному повторению конечного числа различных 'состояний', либо последовательность функций $\phi_{(j)}(\tau)$ не повторяется и заполняет всюду плотное подмножество пространства решений уравнения (1) при данном f .

При наличии асимптотической квазипериодичности целое число n , фигурирующее в (4) (индекс квазипериодичности), может быть вычислено с помощью формулы

$$(6) \quad 2\pi n = \phi_0(T) + 2b_\infty \operatorname{Im} \int_0^T d\tau \frac{e^{-P_0(\tau) + i\phi_0(\tau)}}{a_\infty + b_\infty \mathcal{F}_0(\tau)}.$$

Здесь a_∞, b_∞ определяются формулами $b_\infty = -2 \sin \frac{1}{2}\phi_0(T)$, $a_\infty = Q_0(T) \sin \frac{1}{2}\phi_0(T) + (1 - e^{-P_0(T)}) \cos \frac{1}{2}\phi_0(T) \pm \sqrt{\mathcal{J}_0[f]}$, причем знаки выбираются верхними или нижними так, чтобы получилось большее из двух собственных значений $\lambda_\pm = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}P_0(T)}(-Q_0(T) \sin \frac{1}{2}\phi_0(T) + (1 - e^{-P_0(T)}) \cos \frac{1}{2}\phi_0(T) \pm \sqrt{\mathcal{J}_0[f]})$, матрицы (4).

Касаясь возможных приложений изложенных результатов, отметим, что уравнение (1) используется в физике как основа модели реакции безгистерезисного перехода Джозефсона в сверхпроводниках на внешнее электрическое воздействие, описываемое функцией f [4]. Здесь асимптотическая квазипериодичности соответствует так называемому эффекту захвата фазы, при наличии которого среднее напряжение на переходе является строго постоянным (и пропорциональным индексу квазипериодичности n), что используется для создания эталонов напряжения. В такой постановке f следует рассматривать как функцию некоторого набора параметров, в простейшем случае одного, и ищутся условия, при которых захват фазы имеет место. Например, выбрав $f(\tau) = x + f_1(\tau)$, где x есть варьируемый параметр, а $f_1(\tau) = \exp(m \arctan p(-\cos(2\pi\tau T^{-1}) + b)) + a$, для $m = 1.5$, $b = -0.8$, $p = 20$, $T = 2\pi/\Omega$, $\Omega = 0.47$ и a задаваемом из условия $\int_0^T f d\tau = 0$ (эта зависимость качественно воспроизводит форму сигнала на выходе генератора на диоде Ганна), можно показать, воспользовавшись сформулированным выше критерием, что эффект захвата фазы имеет место на последовательности конечных интервалов, и, в частности, на интервалах $(\dots, -0.992713)$, для которого $n = -2$, $(-0.764183, -0.576732)$ ($n = -1$), $(-0.338007, -0.230051)$ ($n = 0$), $(0.00990918, 0.0151067)$ ($n = 1$), $(0.134249, \dots)$ ($n = 2$) и т.д., и отсутствует в промежутках между ними.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность к.ф.-м.н. О.В. Карпову за инициирование данной работы и ее поддержку и д.ф.-м.н. В.М. Бухштаберу за многочисленные полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kim J., Sosso A., Clark A. F. // J. Appl. Phys. 1998. V. 83. P. 3225–3232. [2] Jain A. K., Likharev K. K., Lukens J. E., Sauvageau J. E. // Phys. Rep. 1984. V. 109. P. 309–426. [3] Wiesenfeld K., Benz S. P., Booij P. A. A. // J. Appl. Phys. 1994. V. 76. P. 3835–3846. [4] Shapiro B. Ya., Dayan I., Gitterman M., Weiss G. H. // Phys. Rev. 1992. V. B46. P. 8349–8352.