Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Факторы, ранг и вложение типичного $\mathbb{Z}^n$ -действия в $\mathbb{R}^n$ -поток, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm2612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 04:11:34

Факторы, ранг и вложение типичного $\mathbb{Z}^n$ -действия в $\mathbb{R}^n$ -поток**В. В. Рыжиков**

Недавний интерес к типичным свойствам сохраняющих меру действий привел к ряду новых результатов. Среди этих свойств – наличие корня у $\mathbb{Z}$ -действия (J. King), типичность конечных групповых расширений (О. Н. Агеев), вложение $\mathbb{Z}$ -действий в поток (S. de Lazaro, T. de la Rue), типичность компактных групповых расширений, не являющихся конечными (А. М. Еременко, А. М. Степин), – об этих и других результатах см. [1]–[3]. Ниже рассматриваются сохраняющие меру μ групповые действия на пространстве Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$.

1. В [3] С. В. Тихонов показал, что типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие вкладывается в инъективное $\mathbb{R}^n$ -действие. В [4] доказано, что типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие вкладывается только в инъективное $\mathbb{R}^n$ -действие. Этот результат можно усилить.

ТЕОРЕМА 1. *Типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие вкладывается только в такое $\mathbb{R}^n$ -действие, элементы которого, кроме тождественного, обладают свойством слабого перемешивания.*

Если автоморфизм T_r , $r \neq 0$, входящий в $\mathbb{R}^n$ -действие, не обладает слабым перемешиванием, то любая (“близкая к лучу”) последовательность $T_{z(k)}$ такая, что для всех k расстояние от $z(k)$ до луча $\{tr \mid t \in \mathbb{R}\}$ и расстояние от $z(k)$ до $z(k+1)$ не превосходят некоторой константы, не содержит перемешивающую подпоследовательность. Однако типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие обладает противоположным свойством.

Пусть F_j – последовательность конечных подмножеств группы G . Говорим, что G -действие обладает F_j -перемешиванием, если для любой последовательности $g(j) \in F_j$ выполнено $\mu(A \cap T_{g(j)}B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$. Условие F_j -перемешивания эквивалентно слабой операторной сходимости $T_{g(j)} \rightarrow \Theta$, где оператор Θ – ортопроекция на пространство констант в $L_2(X, \mu)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть счетная группа G такова, что существует ее перемешивающее действие, причем класс сопряженности этого действия плотен в пространстве всех G -действий. Пусть последовательность конечных множеств F_j такова, что для любого конечного множества F для достаточно больших j пересечение F_j с F пусто. Тогда типичное действие обладает $F_{j(k)}$ -перемешиванием для некоторой последовательности $j(k)$ (зависящей от действия).*

Теорема 1 вытекает из теоремы 2. Если $G = \mathbb{Z}^n$, условия теоремы 2 выполнены. Рассмотрев последовательность $F_j = \{z : 2^j < |z| \leq 2^{j+1}\}$, видим, что близкая к лучу последовательность пересекается с каждым F_j (для больших значений j), следовательно, содержит перемешивающую подпоследовательность. Как выяснилось выше, это влечет слабое перемешивание всех автоморфизмов (кроме тождественного) $\mathbb{R}^n$ -действия, содержащего наше $\mathbb{Z}^n$ -действие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\{J_p\}$ – плотное в группе всех автоморфизмов множество, и пусть $\{T_g : g \in G\}$ – рассматриваемое перемешивающее действие. Тогда действия вида $\{J_p T_g J_p^{-1} : g \in G\}$ плотны в пространстве всех действий (см. [3] для определения метрики на пространстве действий). Так как действие $\{J_p T_g J_p^{-1} : g \in G\}$ перемешивает, то существует номер $j(k, p)$ такой, что для всех $g \in F_{j(k, p)}$ автоморфизмы T_g находятся в $\frac{1}{2k}$ -окрестности оператора Θ . (Здесь и далее мы фиксируем некоторую метрику, задающую слабую операторную топологию на пространстве марковских операторов в $L_2(X, \mu)$.) Для действия $\{S_g\}$, достаточно близкого к действию $\{T_g\}$, автоморфизмы S_g при $g \in F_{j(k, p)}$ будут принадлежать

$\frac{1}{k}$ -окрестности оператора Θ . Таким образом, для каждой пары натуральных чисел (k, p) выбираем такую окрестность $U(k, p)$ действия $\{J_p T_g J_p^{-1} : g \in G\}$, чтобы для некоторого номера $j(k, p)$ при всех $g \in F_{j(k, p)}$ для любого действия $\{S_g\}$ из $U(k, p)$ автоморфизмы S_g находились в $\frac{1}{k}$ -окрестности оператора Θ . Осталось заметить, что (массивное) множество $\bigcap_k \bigcup_p U(k, p)$ состоит из действий, каждое из которых обладает $F_{j(k)}$ -перемешиванием.

2. Теорема Кинга о слабом замыкании утверждает: если $\mathbb{Z}$ -действие ранга 1 коммутирует с автоморфизмом S , то слабое замыкание этого $\mathbb{Z}$ -действия содержит S . Как показали Т. Довнарвич и Я. Квятковский [5], для $\mathbb{Z}^2$ -действий нет аналога этой теоремы. Кинг доказал, что собственный фактор преобразования ранга 1 является жестким. (Автоморфизм T называется жестким, если для некоторой последовательности $r_j \rightarrow \infty$ выполнено $T^{r_j} \rightarrow \text{Id}$; фактор – жесткий, если ограничение автоморфизма на этот фактор является жестким. Фактором действия T называется ограничение T на инвариантную σ -алгебру.) Недавно Довнарвич построил $\mathbb{Z}^2$ -действия ранга 1 с факторами, не являющимися жесткими.

ТЕОРЕМА 3. Если $\mathbb{Z}^n$ -действие ранга 1 коммутирует с автоморфизмом, обладающим корнями всех степеней, то действие жесткое.

Если $\mathbb{Z}^n$ -действие ранга 1 обладает собственным фактором, но не является конечным расширением над ним, то этот фактор жесткий.

Если $\mathbb{Z}^n$ -действие ранга 1 является слабо перемешивающим расширением относительно фактора, то слабое замыкание действия содержит ортопроектор на пространство, отвечающее этому фактору.

Представляется интересным вопрос о типичности относительно слабо перемешивающего (ОСП) расширения. Свойство ОСП означает следующее. Рассмотрим действие как косое произведение на пространстве $(X \times Y, \mu \times \mu')$. ОСП означает эргодичность меры η , заданной на $X \times Y \times Y$ и определяемой равенством

$$\eta((A \times B) \times (A' \times B')) = \mu(A \cap B) \mu'(A') \mu'(B').$$

Пусть T имеет фактор S , причем $S^{r_j} \rightarrow \text{Id}$. Имеет ли место для типичного T поднятие жесткости: $T^{r_j} \rightarrow \text{Id}$? Если нет, то ОСП расширение не типично. Действительно, если T есть ОСП расширение ранга 1 (типичные действия обладают рангом 1), то согласно теореме 3 для некоторой последовательности p_j выполнено $T^{p_j} \rightarrow P$, где P – ортопроектор на пространство, отвечающее фактору S . Но $S^{p_j} \rightarrow \text{Id}$, а P не является тождественным оператором.

Список литературы

- [1] А. М. Степин, А. М. Еременко, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 95–108. [2] В. В. Рыжиков, *Матем. заметки*, **59**:4 (1996), 630–632. [3] С. В. Тихонов, *Матем. сб.*, **197**:1 (2006), 97–132. [4] В. В. Рыжиков, С. В. Тихонов, *Матем. заметки*, **79**:6 (2006), 925–930. [5] T. Downarowicz, J. Kwiatkowski, *Studia Math.*, **153**:2 (2002), 115–125.

В. В. Рыжиков (V. V. Ryzhikov)
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vryz@mech.math.msu.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
14.06.2006