Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, Р. Г. Шафиков, Гипотезы Чена и Рамаданова, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm2614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:16:46

Гипотезы Чена и Рамаданова

С. Ю. Немировский, Р. Г. Шафиков

В этой заметке мы применяем теорему об униформизации из наших работ [1], [2] для обобщения результата Фу и Вонга [3] о связи двух известных гипотез о поведении метрики Бергмана строго псевдовыпуклой области в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

1. Пусть $D \Subset \mathbb{C}^n$ – произвольная ограниченная область. *Кернфункция Бергмана* области D может быть определена формулой $K_D(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z) \overline{\varphi_j(z)}$, где $\{\varphi_j\}_{j=1, \dots, \infty}$ – любой ортонормированный базис гильбертова пространства $L^2 \mathcal{O}(D)$ голоморфных функций с интегрируемым квадратом в области D .

Хорошо известно, что функция $\log K_D(z)$ строго плюрисубгармонична, а замкнутая положительная $(1, 1)$ -форма $k_D := i\partial\bar{\partial} \log K_D(z)$ инвариантна относительно биголоморфных отображений между ограниченными областями. *Метрикой Бергмана* области D называется кэлерава метрика, соответствующая этой кэлеровой форме.

2. Классическая задача, ставившаяся в разной форме Бергманом, Хуа и Яу, состоит в описании области в терминах дифференциально-геометрических свойств ее метрики Бергмана. Так, ограниченная область с полной метрикой Бергмана постоянной голоморфной секционной кривизны биголоморфна шару по известной теореме Лю Чи-кена [4].

Гипотеза Чена [5] утверждает, что для строго псевдовыпуклой области с гладкой границей сделанные в теореме Лю предположения могут быть существенно ослаблены. А именно, такая область биголоморфна шару тогда и только тогда, когда ее метрика Бергмана является метрикой Кэлера–Эйнштейна. (Формулировка этой гипотезы в заметке [5] несколько расплывчата. Точное утверждение выше взято из работы [3].)

3. Фефферман [6] (см. также [7]) установил следующий глубокий результат о граничном поведении кернфункции строго псевдовыпуклой области D с гладкой границей. Пусть $\rho \in C^\infty(\bar{D})$ – это некоторая определяющая функция области D . Тогда существует представление

$$K_D(z) = \varphi(z) \rho(z)^{-(n+1)} + \psi(z) \log |\rho(z)|, \quad (1)$$

где функции $\varphi, \psi \in C^\infty(\bar{D})$, причем φ не обращается в нуль нигде на ∂D . Заметим, что последнее свойство влечет за собой полноту метрики Бергмана строго псевдовыпуклой области.

Несмотря на то, что кернфункция определяется глобально, ее асимптотическое поведение при $z \rightarrow z_0 \in \partial D$ зависит только от локальной CR-геометрии границы в точке z_0 (см. [6]). Например, для кернфункции единичного шара $B \subset \mathbb{C}^n$ имеется явное выражение $K_B(z) = \frac{n!}{\pi^n} (1 - \|z\|^2)^{-(n+1)}$ с тождественно нулевым логарифмическим членом. Таким образом, если граница строго псевдовыпуклой области D сферична (т.е. локально CR-диффеоморфна единичной сфере $\partial B \subset \mathbb{C}^n$ в каждой своей точке $q \in \partial D$), то коэффициент ψ при логарифмическом члене в представлении (1) обращается в нуль с бесконечным порядком на границе этой области.

Гипотеза Рамаданова [8] утверждает, что и обратно, из условия $\psi(z) = O(\rho^\infty)$ при $z \rightarrow \partial D$ следует сферичность границы области D . Для областей в $\mathbb{C}^2$ эта гипотеза была доказана Грэмом и Бернсом (см. [9]) и Буте де Монвелем [10].

Работа первого автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 05-01-00981) и программой “Современные проблемы теоретической математики” ОМН РАН. Второй автор был поддержан грантом Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada.

4. Теперь мы можем сформулировать и доказать основные результаты работы.

ТЕОРЕМА. *Гипотеза Чена в $\mathbb{C}^n$ следует из гипотезы Рамаданова в $\mathbb{C}^n$.*

Поскольку гипотеза Рамаданова доказана в $\mathbb{C}^2$, мы получаем, что гипотеза Чена также верна в $\mathbb{C}^2$, т.е. имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. *Метрика Бергмана строго псевдовыпуклой области $D \in \mathbb{C}^2$ с гладкой границей является метрикой Кэлера–Эйнштейна тогда и только тогда, когда эта область биголоморфна шару.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Фу и Вонг [3] доказали эти результаты в частном случае *односвязных* областей, используя более слабую теорему об униформизации Черна и Жи [11], и сформулировали общий случай в качестве открытого вопроса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Предположим, что метрика Бергмана строго псевдовыпуклой области D является метрикой Кэлера–Эйнштейна. Фу и Вонг [3] вычислили (весьма остроумно), что в этом случае коэффициент ψ при логарифмическом члене в разложении (1) обращается в нуль с бесконечным порядком на границе области. Приняв гипотезу Рамаданова, мы получаем, что граница области D сферична. Следовательно, область D покрывается единичным шаром по теореме об униформизации (см. теорему А.2 в [1] и следствие 3.2 в [2]).

Поскольку область D является фактором шара по группе голоморфных преобразований скольжения, на ней существует естественная полная метрика постоянной голоморфной секционной кривизны, которая получается как фактор стандартной инвариантной метрики в шаре. Согласно Чену и Яу [12], полная метрика Кэлера–Эйнштейна на D единственна с точностью до постоянного множителя. Поэтому метрика Бергмана области D пропорциональна факторметрике, а значит, имеет постоянную голоморфную секционную кривизну. Отсюда по теореме Лю [4] вытекает, что область D биголоморфна шару.

ПРИМЕР. Область $D_{BS} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \sin \log |z| + |w|^2 < 0, e^{-\pi} < |z| < 1\}$, построенная Бернсом и Шнайдером [13], является примером неодносвязной строго псевдовыпуклой области со сферической границей в $\mathbb{C}^2$. Таким образом, кернфункция этой области не имеет логарифмической асимптотики на границе, но ее метрика Бергмана не является метрикой Кэлера–Эйнштейна.

Список литературы

- [1] С.Ю. Немировский, Р.Г. Шафиков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 115–130.
 [2] С.Ю. Немировский, Р.Г. Шафиков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 131–138.
 [3] S. Fu, B. Wong, *Math. Res. Lett.*, **4**:5 (1997), 697–703. [4] Q.-K. Lu, *Acta Math. Sinica*, **16**, 269–281; *Chinese Math.-Acta*, **8** (1966), 283–298. [5] S.-Y. Cheng, *Conference on non-linear problems in geometry* (Katata, September 3–8, 1979), Tohoku University, Department of Mathematics, Sendai, 1979, 2. [6] C. Fefferman, *Invent. Math.*, **26** (1974), 1–65. [7] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand, *Journées: Équations aux Dérivées Partielles de Rennes* (1975), Asterisque, **34–35**, Soc. Math. France, Paris, 1976, 123–164. [8] I. P. Ramadanov, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **34**:7 (1981), 927–929. [9] C. R. Graham, *Complex analysis, II* (College Park, MD, 1985–86), Lecture Notes in Math., **1276**, Springer, Berlin, 1987, 108–135. [10] L. Boutet de Monvel, *The Bergman kernel in dimension 2*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles 1987–1988, exp. 22, École Polytech., Palaiseau, 1988. [11] S. S. Chern, S. Ji, *Ann. of Math.* (2), **144**:2 (1996), 421–439. [12] S.-Y. Cheng, S.-T. Yau, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:4 (1980), 507–544. [13] D. Burns, Jr., S. Shnider, *Invent. Math.*, **33**:3 (1976), 223–246.

С. Ю. Немировский (S. Yu. Nemirovskii)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
 Ruhr-Universität Bochum, Germany
 E-mail: stefan@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
 Принято редколлегией
 14.06.2006

Р. Г. Шафиков (R. G. Shafikov)
 University of Western Ontario, London, Canada
 E-mail: shafikov@uwo.ca