Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Васильева, Эндоморфизмы свободных суперкоммутативных алгебр, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:20:51

ЭНДОМОРФИЗМЫ СВОБОДНЫХ СУПЕРКОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР

Е. А. ВАСИЛЬЕВА

Свободные суперкоммутативные (ε -коммутативные) ассоциативные K -алгебры с множеством X свободных порождающих являются в общем случае универсальными обертывающими алгебрами абелевых цветных супералгебр Ли. В недавней работе [1] были введены стандартные базисы таких алгебр, доказан критерий того, чтобы подмножество идеала являлось стандартным базисом этого идеала, получены алгоритмы построения стандартных базисов. В данной заметке техника стандартных базисов в суперкоммутативных алгебрах применяется нами для того, чтобы определить, является ли заданный эндоморфизм суперкоммутативной алгебры сюръективным.

Пусть K – поле, $\text{char } K \neq 2, 3$, G – абелева полугруппа, $\varepsilon: G \times G \rightarrow K^*$ – кососимметрическая билинейная форма на G такая, что

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, y)\varepsilon(y, x) &= 1, \\ \varepsilon(x_1 + x_2, y) &= \varepsilon(x_1, y)\varepsilon(x_2, y), \\ \varepsilon(x, y_1 + y_2) &= \varepsilon(x, y_1)\varepsilon(x, y_2)\end{aligned}$$

для любых $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in G$. Обозначим

$$G_- = \{g \in G \mid \varepsilon(g, g) = -1\}, \quad G_+ = \{g \in G \mid \varepsilon(g, g) = +1\}.$$

Пусть $X = \bigcup_{g \in G} X_g = \{x_1, \dots, x_n\}$ – G -градуированное множество. Определим функцию степени $d: X \rightarrow G$ соотношением $d(x) = g$ для всех $x \in X_g$. Обозначим через $\langle X \rangle$ полугруппу ассоциативных слов из алфавита X . Продолжим d с множества X на $\langle X \rangle$, полагая $d(u) = \sum_{i=1}^n d(x_i) \in G$ для $u = x_1 \dots x_n \in \langle X \rangle$.

Пусть $(\langle X \rangle)_g = \{u \in \langle X \rangle \mid d(u) = g\}$, $(A\langle X \rangle)_g$ – K -линейная оболочка элементов из $(\langle X \rangle)_g$. Тогда $A\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} (A\langle X \rangle)_g$ – свободная ассоциативная G -градуированная алгебра. Пусть J – двусторонний G -градуированный идеал в $A\langle X \rangle$, порожденный однородными элементами вида

$$ab - \varepsilon(d(a), d(b))ba, \quad a, b \in \langle X \rangle.$$

Фактор-алгебру $A\langle X \rangle/J$ будем обозначать $K_\varepsilon[X]$. Алгебра $K_\varepsilon[X]$ является свободной ε -коммутативной ассоциативной K -алгеброй с множеством X свободных порождающих. Если $G_- = \emptyset$, то $K_\varepsilon[X]$ является алгеброй квантовых полиномов. Если $\varepsilon \equiv 1$, то $K_\varepsilon[X]$ – обычная полиномиальная алгебра.

Обозначим через $\pi: A\langle X \rangle \rightarrow K_\varepsilon[X]$ естественный гомоморфизм. Пусть X – линейно упорядоченное множество. Будем рассматривать следующий порядок на $\langle X \rangle$: сначала слова упорядочиваются по длине, а затем лексикографически. Этот порядок естественным образом индуцирует порядок на $\pi(\langle X \rangle)$. Дополнительно мы полагаем, что $u > 0$ для любого ненулевого $u \in \pi(\langle X \rangle)$.

Пусть ψ – эндоморфизм алгебры $K_\varepsilon[X]$, сохраняющий градуировку и удовлетворяющий условию $\psi|_K = \text{id}_K$. Любой такой эндоморфизм имеет вид

$$h \mapsto h(f_1, \dots, f_n),$$

где $f_i = \psi(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, и все элементы f_i являются однородными степени $d(x_i)$.

Существование $g_1, \dots, g_n$ таких, что $g_i(f_1, \dots, f_n) = x_i$, эквивалентно сюръективности эндоморфизма ψ .

Пусть $f_1, \dots, f_m$ — однородные элементы алгебры $K_\varepsilon[X]$. Обозначим через $lp(f_i)$ старший моном полинома f_i . Введем специальные переменные $t_1, \dots, t_m$, каждая из которых соответствует одному из однородных элементов f_i , и положим $d(t_i) = d(f_i) = d(lp(f_i))$. Рассмотрим алгебру $K_\varepsilon[T, X] = K_\varepsilon[t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n]$ и алгебру $K_\varepsilon[T]$. Зададим порядок на $K_\varepsilon[T, X]$ такой, что

$$(1) \quad x_i > K_\varepsilon[T]$$

для любого $i = 1, \dots, n$. Например, положим $t_1 < \dots < t_m < x_1 < \dots < x_n$ и возьмем лексикографический порядок на мономах. Обозначим через L идеал в $K_\varepsilon[T, X]$, порожденный множеством

$$\{f_1 - t_1, \dots, f_m - t_m\},$$

и пусть H — стандартный базис L . Введем следующие обозначения:

$$H_T = H \cap K_\varepsilon[T], \quad Lp(H_T) = \{lp(h) \mid h \in H_T\}, \\ H_M = \{h \in H \mid lp(h) \text{ не делится ни на один элемент } Lp(H_T)\}.$$

Легко видеть, что если H — редуцированный стандартный базис L , то H_M является теоретико-множественным дополнением H_T .

В недавней работе [2] Д. Шэннона и М. Свидлера построен алгоритм, позволяющий для данных полинома и множества элементов алгебры многочленов определить, допускает ли он представление в виде полинома от этих элементов как новых переменных, и в случае положительного ответа найти это представление в явном виде. В случае суперкоммутативной алгебры многочленов мы воспользуемся следующим результатом, который является аналогом теоремы, дающей обоснование описанного алгоритма (см. [2]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h \in K_\varepsilon[X]$ и $g \in K_\varepsilon[T, X]$ — нормальная форма элемента h по модулю H . Тогда $h \in K_\varepsilon[f_1, \dots, f_m]$ тогда и только тогда, когда $g \in K_\varepsilon[T]$, при этом $h = g(f_1, \dots, f_m)$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в коммутативном случае. Теперь мы можем перейти к изложению основной теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Следующие условия эквивалентны:

- (1) эндоморфизм ψ алгебры $K_\varepsilon[X]$ сюръективен;
- (2) множество H_M имеет вид $H_M = \{x_1 - g_1, \dots, x_n - g_n\}$, где $g_i \in K_\varepsilon[T]$.

Доказательство импликации $(1) \Rightarrow (2)$ теоремы основано на том, что для суперкоммутативной алгебры $K_\varepsilon[X]$ условие (2) эквивалентно условию $K_\varepsilon[f_1, \dots, f_n] = K_\varepsilon[X]$. Рассуждение опирается на теорему 1 и существенно использует свойства введенного порядка на мономах алгебры $K_\varepsilon[T, X]$.

Импликация $(2) \Rightarrow (1)$ доказывается непосредственным вычислением, на последнем шаге которого мы получаем соотношение, эквивалентное условию (1) теоремы.

Автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям А. А. Михалеву и А. В. Михалеву за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mikhalev A. A., Vasilieva E. A. // Proceedings of 2nd International Tainan–Moscow Algebra Workshop. Hong Kong: Springer-Verlag, 1999. P. 108–126. [2] Shannon D., Sweedler M. // J. Symbolic Comput. 1988. V. 6. № 2–3. P. 267–273.

Принято редколлегией
22.12.1999